Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2011. Том 52, № 5

УДК 517.55+517.965

УСТОЙЧИВОСТЬ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО РАЗНОСТНОГО ОПЕРАТОРА И АМЕБА ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО МНОЖЕСТВА

Е. К. Лейнартас

Аннотация. С использованием понятия амебы алгебраического множества сформулирован многомерный аналог условия: все корни полинома по модулю меньше единицы. Доказано, что этот аналог является необходимым и достаточным условием устойчивости задачи Коши для полиномиального разностного оператора с постоянными коэффициентами.

Ключевые слова: многомерное разностное уравнение, амеба алгебраической гиперповерхности, устойчивость задачи Коши.

Введение

Одномерная теория линейных разностных уравнений строится аналогично теории линейных обыкновенных дифференциальных уравнений и имеет вполне завершенный вид (см., например, [1]). Задача Коши и вопросы зависимости ее решения от начальных данных и правой части уравнения исследуются в рамках теории дискретных динамических систем (см., например, [2]). Возможны различные варианты определения понятия устойчивости задачи Коши, отражающие эту зависимость, но в случае уравнений с постоянными коэффициентами все они сводятся к известному свойству характеристического многочлена разностного уравнения: все его корни лежат внутри единичного круга комплексной плоскости. Для переноса этого условия на многомерный случай удобнее эквивалентная формулировка: *вне открытого единичного круга нет корней характеристического многочлена.*

В § 1 устойчивость задачи Коши для многомерного разностного уравнения определяется в духе теории цифровых рекурсивных фильтров (см. [3]), а именно, ограниченность входных данных задачи влечет ограниченность решения. Отметим, что устойчивость двумерных цифровых фильтров исследована в [4].

С использованием понятия амебы алгебраического множества в работе сформулирован многомерный аналог условия (условие (iii) теоремы 1), обеспечивающего устойчивость многомерной задачи Коши. При этом роль внешности единичного круга играет подходящим образом выбранная компонента дополнения амебы характеристического множества разностного уравнения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 11–01–00852) и Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (коды проектов НШ–7347.2010.1 и МО 2.1.1/4620).

Отметим, что понятие амебы алгебраического множества оказалось полезным (см. [5, 6]) для переноса на многомерный случай известной (см. [1, 7]) теоремы Пуанкаре об асимптотике решений разностных уравнений.

Далее формулируется основной результат данной работы — теорема 1. Существенной частью ее доказательства является исследованная в § 2 задача о разрешимости задачи Коши для полиномиального разностного оператора в классе экспоненциальных функций. Доказано (теорема 2), что если начальные данные задачи Коши и правая часть уравнения экспоненциальны, то и решение задачи также экспоненциально.

§ 1. Устойчивость задачи Коши

Для линейного одномерного разностного уравнения порядка m

$$f(x+m)+\sum_{\alpha=0}^{m-1} c_\alpha(x) f(x+\alpha)=g(x), \quad x=0,1,2\ldots, \tag{1}$$

задача Коши формулируется следующим образом. Найти комплекснозначную функцию целочисленного аргумента $f(x)$, удовлетворяющую уравнению (1) и принимающую в m точках $x=0,1,\ldots,m-1$ заданные значения:

$$f(x)=\varphi(x), \quad x=0,1,\ldots,m-1. \tag{2}$$

Задача Коши поставлена корректно, если она имеет решение, которое единственно и «непрерывно зависит» от начальных данных и правой части уравнения.

Задача (1), (2) очевидным образом имеет единственное решение. Понятие устойчивости, отражающее эту зависимость, может быть определено различными способами, однако в случае постоянных коэффициентов c_α все эти виды устойчивости сводятся к следующему свойству характеристического многочлена $P(z)=z^m+\sum\limits_{\alpha=0}^{m-1} c_\alpha z^\alpha$ уравнения (1):

$(*)$ *во внешности единичного круга* $\{|z|\geq 1\}$ *нет корней характеристического уравнения* $P(z)=0$.

Это следует главным образом из вида общего решения однородного уравнения (1): оно является суммой элементарных решений $p_j(x)\lambda_j^x$, где $p_j(x)$ — некоторый многочлен от x, степень которого меньше кратности корня λ_j характеристического многочлена $p(x)$.

Многомерная ситуация значительно сложнее (см. [8]), и вопрос о правильной постановке задачи Коши (см. [9]), обеспечивающей существование и единственность решения, нетривиален. Кроме того, характеристическое уравнение имеет бесконечное число корней и, следовательно, решения однородного уравнения не исчерпываются «элементарными».

Обозначим через $\mathbb{Z}$ множество целых и через $\mathbb{Z}_+$ — множество целых неотрицательных чисел. Для точек x, y из n-мерной целочисленной решетки $\mathbb{Z}^n$ неравенство $x\geq y$ означает, что $x_j\geq y_j$ для $j=1,2,\ldots,n$.

В данной работе рассматривается разностное уравнение с постоянными коэффициентами c_α, $\alpha\in\mathbb{Z}_+^n$, вида

$$\sum_{0\leq\alpha\leq m} c_\alpha f(x+\alpha)=g(x), \quad x\in\mathbb{Z}_+^n. \tag{3}$$

Если $c_m \neq 0$, то целочисленный вектор m назовем *порядком уравнения* (3) и обозначим $X_0 = \{x \in \mathbb{Z}^n : x \geq 0 \text{ и } x \ngeq m\}$.

Сформулируем следующую задачу Коши: *найти функцию* $f(x)$, *удовлетворяющую уравнению* (3) *и совпадающую на множестве* X_0 *с заданной функцией* $\varphi(x)$:

$$f(x) = \varphi(x), \quad x \in X_0. \tag{4}$$

Замечание 1. В дальнейшем удобно считать, что функция начальных данных $\varphi(x)$ определена не только на $X_0 \subset \mathbb{Z}^n_+$, но и на всем множестве $\mathbb{Z}^n$, для этого ее следует продолжить на $\mathbb{Z}^n \setminus X_0$ нулем.

Задача (3), (4) имеет единственное решение (см. ниже предложения 1 и 2). Для $n = 1$ она совпадает с задачей (1), (2). Понятие устойчивости задачи (3), (4) введем следующим образом. Для функции$f(x)$, заданной на множестве $X \subset \mathbb{Z}^n$, определим ее норму

$$\|f\| = \|f\|_X = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

и назовем задачу Коши (3), (4) *устойчивой*, если существует константа К > 0 такая, что для любых входных данных $\varphi(x)$ и $g(x)$ соответствующее решение $f(x)$ задачи удовлетворяет условию

$$\|f\| \leq K(\|\varphi\| + \|g\|).$$

Отметим, что в теории разностных схем устойчивость определяется аналогичным образом (см., например, [10, 11]). Однако коэффициенты разностных уравнений, возникающих, к примеру, при дискретизации уравнений математической физики, зависят от параметров сетки. Таким образом, требуется исследовать на устойчивость семейство разностных операторов.

Для формулировки многомерного аналога условия $(*)$, обеспечивающего устойчивость, потребуются понятия многогранника Ньютона, амебы многочлена и некоторые их свойства (более подробное изложение этих свойств и их доказательства см. в [12, 13]).

Характеристическим многочленом уравнения (3) называется многочлен

$$P(z) = \sum_{0 \leq \alpha \leq m} c_\alpha z^\alpha.$$

Многогранником Ньютона N_P многочлена $P(z)$ называется выпуклая оболочка в $\mathbb{R}^n$ элементов множества $A = \{\alpha \in \mathbb{Z}^n_+ : c_\alpha \neq 0\}$.

Амебой называется образ множества нулей V многочлена $P(z)$ при отображении $\operatorname{Log} : z = (z_1, \ldots, z_n) \to (\log|z_1|, \ldots, \log|z_n|) = \operatorname{Log}|z|$. Применение термина «амеба» объясняется тем, что для $n = 2$ изображение множества $\operatorname{Log} V$ действительно напоминает «биологическую» амебу.

Решение $\mathscr{P}(x)$ разностного уравнения

$$\sum_{\alpha \in A} c_\alpha \mathscr{P}(x + \alpha) = \delta_0(x), \quad x \in \mathbb{Z}^n, \tag{5}$$

где

$$\delta_0(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \neq 0, \\ 1, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

называется *фундаментальным решением.*

Дополнение амебы $\mathbb{R}^n \setminus \operatorname{Log} V$ состоит из конечного числа связных компонент, которое не превосходит числа целых точек многогранника N_P.

Всякой непустой компоненте E дополнения $\mathbb{R}^n \setminus \operatorname{Log} V$ соответствует точка $\nu \in N_P \cap \mathbb{Z}^n$ (порядок компоненты E), и, кроме того, этой компоненте E_ν соответствует фундаментальное решение уравнения (3):

$$\mathscr{P}_\nu(x) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\operatorname{Log}^{-1} u} \frac{z^{x-I}}{P(z)}, \quad u \in E_\nu. \tag{6}$$

Каждой вершине многогранника Ньютона N_P многочлена $P(z)$ соответствует непустая связная компонента E_m дополнения амебы $\mathbb{R}^n \setminus \mathscr{A}_P$, для которой *двойственный конус* C_m к вершине m многогранника N_P:

$$C_m = \{s \in \mathbb{R}^n : \max_{x \in N_P} \langle s, x \rangle = \langle s, m \rangle\},$$

является асимптотическим. Это означает, что вместе с каждой точкой $u \in E_m$ этой компоненте принадлежит и сдвиг асимптотического конуса: $u + C_m \subset E_m$, и никакой конус, содержащий C_m, этим свойством не обладает. Кроме того, в области $\operatorname{Log}^{-1} E_m \subset \mathbb{C}^n$ функция $1/P(z)$ разлагается в ряд Лорана вида

$$1/P(z) = \sum_{x \in K_m + m} \mathscr{P}_m(x)/z^x,$$

где K_m — конус, построенный на векторах $m - \alpha, \alpha \in A$. Коэффициенты $\mathscr{P}_m(x)$ этого разложения можно, помимо формулы (6), получить также следующим образом:

$$\frac{1}{P(z)} = \frac{1}{\left(c_m z^m + \sum\limits_{\alpha \neq m} c_\alpha z^\alpha\right)} = \frac{1}{\left(c_m z^m \left(1 - \sum\limits_{\alpha \neq m} \tilde{c}_\alpha z^{\alpha - m}\right)\right)}$$
$$- \frac{1}{c_m z^m} \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\sum_{\alpha \neq m} \tilde{c}_\alpha z^{\alpha - m} \Big)^k = \sum_{x \in K_m + m} \frac{\mathscr{P}_m(x)}{z^x}. \tag{7}$$

Нетрудно видеть, что если порядок уравнения (3) равен m, то точка m является вершиной многогранника Ньютона N_p характеристического многочлена $P(z)$. Соответствующее этой вершине фундаментальное решение $\mathscr{P}_m(x)$ будем называть *фундаментальным решением задачи Коши* (3), (4), а соответствующую компоненту E_m дополнения амебы порядка m — *главной компонентой.*

Таким образом, фундаментальное решение задачи Коши (3), (4) является решением задачи (3), (4) с правой частью $g(x) = \delta_0(x)$ и нулевыми начальными данными:

$$P(\delta)\mathscr{P}_m(x) = \delta_0(x), \quad x \in \mathbb{Z}^n_+, \tag{3$'$}$$

$$\mathscr{P}_m(x) = 0, \quad x \ngeq m. \tag{4$'$}$$

Теорема 1. *Для уравнения вида* (3), *где c_m не равно нулю, следующие условия эквивалентны:*

(i) *задача Коши* (3), (4) *устойчива;*

(ii) *если $\mathscr{P}_m(x)$ — фундаментальное решение задачи* (3), (4), *соответствующее порядку m уравнения, то ряд $\sum\limits_{x \geq 0} |\mathscr{P}_m(x)|$ сходится;*

(iii) *главная компонента E_m дополнения амебы $\mathbb{R}^n \setminus \operatorname{Log} V$ содержит начало координат:* $0 \in E_m$.

Замечание 2. Условие (iii) в случае $n = 1$ совпадает с условием $(*)$.

Здесь докажем лишь импликации (i)⇒(ii)⇒(iii), доказательство заключительной импликации (iii)⇒(i) будет дано в § 2.

Доказательство. (i)⇒(ii) Найдем решение задачи (3), (4) для начальных данных $\varphi(x) \equiv 0$ и правой части $g(x)$, построенной для произвольного фиксированного $x_1 \in \mathbb{Z}^n_+$ следующим образом:

$$g_{x_1}(x) = \begin{cases} \frac{\overline{\mathscr{P}_m(x_1-x)}}{|\mathscr{P}_m(x_1-x)|}, & \text{если } \mathscr{P}_m(x_1 - x) \neq 0, \\ 0, & \text{если } \mathscr{P}_m(x_1 - x) = 0. \end{cases}$$

Согласно предложению 2 для решения $f_{x_1}(x)$ задачи (3), (4) с этими входными данными имеем

$$f_{x_1}(x) = \sum_{y \geq 0} g_{x_1}(y) \mathscr{P}_m(x - y).$$

При $x = x_1$

$$f_{x_1}(x_1) = \sum_{y \geq 0} \frac{\overline{\mathscr{P}_m(x_1 - y)}}{|\mathscr{P}_m(x_1 - y)|} \cdot \mathscr{P}_m(x_1 - y) = \sum_{y \geq 0} |\mathscr{P}_m(x_1 - y)| = \sum_{0 \leq y' \leq x_1} |\mathscr{P}_m(y')|.$$

Так как $\|\varphi\| = 0$ и $\|g_{x_1}\| \leq 1$, в силу устойчивости задачи (3), (4) получим

$$|f_{x_1}(x_1)| = \sum_{0 \leq y' \leq x_1} |\mathscr{P}_m(y')| \leq K$$

для некоторого $K > 0$ и произвольного $x_1 \in \mathbb{Z}^n_+$.

(ii)⇒(iii) Так как фундаментальное решение $\mathscr{P}_m(x)$ — это коэффициенты ряда Лорана для рациональной функции $1/P(z)$, сходимость ряда $\sum\limits_{y \geq 0} |\mathscr{P}_m(y)|$ означает, что точка $I = (1, \dots, 1)$ принадлежит области сходимости $\operatorname{Log}^{-1} E_m$ ряда $\sum\limits_{x \geq 0} \frac{\mathscr{P}_m(x)}{z^x}$, следовательно, $0 = \operatorname{Log} I \in E_m$.

§ 2. Задача Коши в классе экспоненциальных функций

На комплекснозначных функциях $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ целочисленных переменных $x_1, \dots, x_n$ определим операторы δ_j сдвига по переменным x_j: $\delta_j f(x) = f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j = 1, x_{j+1}, \dots, x_n)$, и полиномиальный разностный оператор вида

$$P(\delta) = \sum_{\alpha \in A} c_\alpha \delta^\alpha,$$

где $A \subset \mathbb{Z}^n$ — конечное множество точек n-мерной решетки, $\delta^\alpha = \delta_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \delta_\alpha^{\alpha_n}$ и c_α — постоянные коэффициенты разностного оператора.

Будем рассматривать разностные уравнения вида

$$P(\delta) f(x) = g(x), \quad x \in X, \tag{8}$$

где $f(x)$ — неизвестная, а $g(x)$ — заданная на некотором фиксированном множестве $X \subset \mathbb{Z}^n$ функции. Из множества X выделим подмножество точек $X_0 \subset X$, которые будем называть *начальными* (*граничными*).

Сформулируем задачу: *найти функцию $f(x)$, удовлетворяющую уравнению* (8) *и совпадающую на множестве X_0 с заданной функцией $\varphi(x)$*:

$$f(x) = \varphi(x), \quad x \in X_0. \tag{9}$$

Эту задачу естественно назвать задачей Коши для уравнения (8), а функцию $\varphi(x)$ в условии (9) — начальными данными задачи Коши. Существование и единственность решения задачи Коши зависят от всех объектов, участвующих в ее постановке: разностного оператора $P(\delta)$, множества X, на котором задана правая часть $g(x)$ уравнения, и от множества X_0, на котором задаются начальные данные. Общих результатов о соотношениях между этими объектами, обеспечивающих существование и единственность решения задачи Коши, нет, и, по-видимому, их трудно описать. Приведем некоторые типичные ситуации.

В одномерном случае разностный оператор имеет вид

$$P(\delta) = \sum_{\alpha=0}^{m} c_\alpha \delta_\alpha, \quad c_m \neq 0;$$

в качестве множества X, на котором определена правая часть и ищется решение $f(x)$ уравнения (8), берется множество $\mathbb{Z}_+$ целых неотрицательных чисел, в качестве X_0 — множество $\{0, 1, \dots, m-1\}$. При этих условиях задача (8), (9) очевидным образом имеет единственное решение.

В многомерном случае стандартной для задач, возникающих в комбинаторном анализе, является ситуация, когда $P(\delta) = \sum\limits_{\alpha \in A} c_\alpha \delta^\alpha$ — полиномиальный разностный оператор, $X = \mathbb{Z}_+^n$, а выбор множества X_0 зависит от свойств множества A, определяющего полином P (см., например, [9]). Сформулируем утверждение из [9], обеспечивающее существование и единственность решения задачи Коши, используя для этого понятия многогранника Ньютона и двойственного конуса.

Предложение 1 (см. [9]). *Пусть $m \in N_P \cap \mathbb{Z}^n$ — вершина многогранника Ньютона N_p такая, что для двойственного к этой вершине конуса C_m выполняется условие* $\dim(C_m \cap \mathbb{R}_+^n) = n$. *Если в качестве множества X_0, на котором заданы начальные данные задачи* (8), (9), *взято $X_0 = \mathbb{Z}_+^n \setminus (m + \mathbb{Z}_+^n)$, то задача* (8), (9) *имеет решение, причем единственное.*

Приведем также формулу для решения задачи Коши в случае, когда вершина m многогранника Ньютона N_p является порядком разностного уравнения (т. е. для всех $\alpha \in N_p$ справедливо неравенство $m \geq \alpha$). Отметим, что в этом случае двойственный конус C_m содержит $\mathbb{R}_+^n$, следовательно, условие $\dim(C_m \cap \mathbb{R}_+^n) = n$ выполнено и задача Коши имеет единственное решение.

Предложение 2. *Пусть $\mathscr{P}_m(x)$ — фундаментальное решение задачи* (3), (4) *и $\mu(y) = \sum\limits_{0 \leq \alpha \leq m} c_\alpha \varphi(y + \alpha)$. Тогда для решения $f(x)$ справедлива формула*

$$f(x) = \sum_{y \ngeq 0} \mu(y) \mathscr{P}_m(x - y) + \sum_{y \geq 0} g(y) \mathscr{P}_m(x - y), \tag{10}$$

причем число слагаемых в суммах правой части этой формулы конечно.

Замечание. Формула (10) получена в [14] в случае однородного ($g(x) = 0$) разностного уравнения (8).

Доказательство. Первая сумма в формуле (10)

$$f_0(x) = \sum_{y \ngeq 0} \mu(y) \mathscr{P}_m(x-y)$$

является решением однородного уравнения. Действительно,

$$P(\delta) f_0(x) = \sum_{y \ngeq 0} \mu(y) P(\delta) \mathscr{P}_m(x-y) = \sum_{y \ngeq 0} \mu(y) \delta_0(x-y) = 0$$

для $x \geq 0$. Вторая сумма в формуле (10) $f_1(x) = \sum\limits_{y \geq 0} g(y) \mathscr{P}_m(x-y)$ — это частное решение уравнения (3):

$$P(\delta) f_1(x) = \sum_{y \geq 0} g(y) P(\delta) \mathscr{P}_m(x-y) = \sum_{y \geq 0} g(y) \delta_0(x-y) = g(x) \quad \text{для } x \geq 0,$$

причем для $x \in X_0$ получим $f_1(x) = 0$, так как в силу свойств (3′), (4′) фундаментального решения $\mathscr{P}_m$, соответствующего порядку m уравнения, имеем $\mathscr{P}_m(x) = 0$ для $x \in X_0$. Поэтому остается проверить, что $f_0(x) = \varphi(x)$ для $x \in X_0$. Действительно, имеем

$$\begin{aligned} f_0(x) &= \sum_{y \ngeq 0} \sum_{0 \leq \alpha \leq m} c_\alpha \varphi(y+\alpha) \mathscr{P}_m(x+\alpha-y) \\ &= \sum_{0 \leq \alpha \leq m} c_\alpha \sum_{y \ngeq 0} \varphi(y+\alpha) \mathscr{P}_m(x+\alpha-(y+\alpha)) \\ &= \sum_{0 \leq \alpha \leq m} c_\alpha \sum_{y'} \varphi(y') \mathscr{P}_m(x+\alpha-y') \\ &= \sum_{y'} \varphi(y') \sum_{0 \leq \alpha \leq m} c_\alpha \mathscr{P}_m(x-y'+\alpha) = \sum_{y'} \varphi(y') \delta_0(x-y') = \varphi(x). \end{aligned}$$

Определение. Функцию f целочисленных аргументов $x = (x_1, \dots, x_n) \in X \cap \mathbb{Z}^n$ назовем *экспоненциальной*, если для некоторых $M > 0$ и $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ и для всех $x \in X$ справедливо неравенство $|f(x)| \leq M|\lambda^x|$.

Введем некоторые обозначения, удобные для исследования экспоненциальных решений задачи Коши.

Для функции $f(x)$ определим понятие *a-нормы* ($a \in \mathbb{R}^n$) следующим образом:

$$\|f\|_a = \sup_{x \in X} |f(x) e^{-\langle a, x \rangle}|,$$

где $\langle a, x \rangle = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$. Тогда экспоненциальность функции $f(x)$ эквивалентна условию: *для некоторого $a \in \mathbb{R}^n$ a-норма функции f конечна:* $\|f\|_a < +\infty$.

Кроме того, воспользуемся одной из операций max-plus математики (см., например, [15]), а именно для вещественных чисел $a, b \in \mathbb{R}$ определим операцию

$$a \oplus b = \max\{a, b\}.$$

Если $a, b \in \mathbb{R}^n$, то соответствующая операция для векторов определяется покомпонентно:

$$a \oplus b = (a_1 \oplus b_1, \dots, a_n \oplus b_n).$$

Отметим следующее свойство a-нормы относительно операции $\oplus$. Для любых функций f, h и точек $a, b \in \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство

$$\|f + h\|_{a\oplus b} \le \|f\|_a + \|h\|_b. \tag{11}$$

Естественным представляется вопрос о том, будет ли решение задачи (3), (4) экспоненциальным, если экспоненциальны входные данные $\varphi(x)$ и $g(x)$.

Теорема 2. *Если начальные данные $\varphi(x)$ и правая часть $g(x)$ задачи* (3), (4) *экспоненциальны, т. е. $\|\varphi\|_a < +\infty$ и $\|g\|_b < +\infty$, то и решение задачи экспоненциально. При этом если a, b принадлежат главной компоненте E_m дополнения амебы характеристического многочлена уравнения* (3), *то для соответствующего решения f задачи Коши справедливо неравенство*

$$\|f\|_{a\oplus b} \le M(\|\varphi\|_a + \|g\|_b),$$

где константа $M > 0$ не зависит от φ и g.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $a, b \in E_m$. Воспользуемся формулой (10) предложения 2 для решения f задачи Коши (3), (4), согласно которой $f = f_0 + f_1$, где

$$f_0(x) = \sum_{y\ngeq 0}\sum_{0\le\alpha\le m} c_\alpha\varphi(y+\alpha)\mathscr{P}_m(x-y), \quad f_1(x) = \sum_{y\ge 0} g(y)\mathscr{P}_m(x-y).$$

Обозначим $z = (e^{a_1}, \dots, e^{a_n})$ и преобразуем первую сумму $f_0(x)$:

$$f_0(x) = \sum_{y\ngeq 0}\sum_{\alpha} c_\alpha\varphi_(y+\alpha)\mathscr{P}_m(x-y)$$
$$= \sum_{y\ngeq 0}\Big(\sum_{\alpha} c_\alpha z^\alpha\varphi(y+\alpha)z^{-y-\alpha}\Big)\mathscr{P}_m(x-y)z^{-(x-y)}z^x.$$

Оценим ее модуль для произвольного $x \in \mathbb{Z}^n_+$:

$$|f_0(x)| \le \sum_{y\ngeq 0}\Big(\sum_{\alpha}|c_\alpha|z^\alpha\Big)\|\varphi\|_a|\mathscr{P}_m(x-y)z^{-(x-y)}|z^x$$
$$\le \Big(\sum_{\alpha}|c_\alpha|z^\alpha\Big)\sum_{y\ngeq 0}|\mathscr{P}_m(x-y)z^{-(x-y)}|\cdot\|\varphi\|_a z^x.$$

Так как $a \in E_m$, в точке $z = (e^{a_1}, \dots, e^{a_n}) \in \operatorname{Log}^{-1} E_m$ ряд $\sum\limits_{x\ge 0}\frac{\mathscr{P}_m(x)}{z^x}$ абсолютно сходится, поэтому для некоторой константы $M_1 > 0$ имеем $|f_0(x)| \le M_1\|\varphi\|_a z^x$ или $|f_0(x)| \le M_1\|\varphi\|_a e^{\langle a,x\rangle}$, т. е. $\|f_0\|_a \le M_1\|\varphi\|_a$. Аналогично доказывается, что для второй суммы $f_1(x)$ в случае, если $b \in E_m$, справедливо неравенство $\|f_1\|_b \le M_2\|g\|_b$ для некоторой константы $M_2 > 0$. Тогда с учетом свойства (11) получим

$$\|f\|_{a\oplus b} = \|f_0 + f_1\|_{a\oplus b} \le \|f_0\|_a + \|f_1\|_b \le M_1\|\varphi\|_a + M_2\|g\|_b.$$

Случай, когда точки a, b (или одна из них) не лежат в E_m, сводится к рассмотренному выше следующим образом. Возьмем точку $e \in E_m$ и обозначим $a' = a \oplus e$, $b' = b \oplus e$. Так как $a \le a'$ и $b \le b'$, то $\|\varphi\|_a \le \|\varphi\|_{a'}$ и $\|g\|_b \le \|g\|_{b'}$. Поскольку $e \le a'$, $e \le b'$ и $\mathbb{R}^n_+ \subset C_m$, то $a', b' \in E_m$. Отсюда получим $\|f\|_{a'\oplus b'} \le M_1\|\varphi\|_{a'} + M_2\|g\|_{b'}$.

Доказательство импликации (iii)$\Rightarrow$(i) в теореме 1 получается из теоремы 2, если положить $a = b = 0$. Действительно, $0 \oplus 0 = 0$, $\|\cdot\|_0 = \|\cdot\|$, и из теоремы 2 получим $\|f\| \le M_1\|\varphi\| + M_2\|g\|$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гельфонд А. О.* Исчисление конечных разностей. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1959.
2. *Изерман Р.* Цифровые системы управления. М.: Мир, 1984.
3. *Даджион Д., Мерсеро О.* Цифровая обработка многомерных сигналов. М.: Мир, 1988.
4. *Цих А. К.* Условия абсолютной сходимости ряда из коэффициентов Тейлора мероморфной функции двух переменных // Мат. сб. 1991. Т. 11, № 182. С. 1588–1612.
5. *Лейнартас Е. К., Пассаре М., Цих А. К.* Асимптотика многомерных разностных уравнений // Успехи мат. наук. 2005. Т. 60, № 5. С. 171–172.
6. *Лейнартас Е. К., Пассаре М., Цих А. К.* Многомерная версия теоремы Пуанкаре для разностных уравнений // Мат. сб. 2008. Т. 199, № 10. С. 87–104.
7. *Perron O.* Über die Poincarésche lineare Differenzengleichung // J. Reine Angew. Math. 1909. Bd 137. S. 6–64.
8. *Лейнартас Е. К.* Кратные ряды Лорана и разностные уравнения // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 2. С. 387–393.
9. *Bousquet-Mélou M., Petkovšek M.* Linear recurrences with constant coefficients: the multivariate case // Discrete Math. 2000. V. 225. P. 51–75.
10. *Рябенький В. С.* Введение в вычислительную математику. М.: Физматлит, 2000.
11. *Самарский А.А., Гулин А. В.* Устойчивость разностных схем. М.: Наука, 1973.
12. *Forsberg M., Passare M., Tsikh A.* Laurent determinants and arrangements of hyperplane amoebas, // Adv. Math. 2000. V. 151. P. 45–70.
13. *Passare M., Tsikh A.* Amoebas: their spines and their contours // Contemp. Math. 2005. V. 377. P. 204–258.
14. *Лейнартас Е. К.* Кратные ряды Лорана и фундаментальные решения линейных разностных уравнений // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 2. С. 335–340.
15. *Richter-Gebert J., Sturmfels B., Theobald T.* First steps in tropical geometry // Contemp. Math. 2005. V. 377. P. 289–317.

Статья поступила 15 июня 2010 г.

Лейнартас Евгений Константинович
Институт математики Сибирского федерального университета,
кафедра теории функций,
пр. Свободный, 79, Красноярск 660041
lein@mail.ru