Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2011. Том 52, № 5

УДК 512.554.38

КВАЗИ–ФИЛИФОРМНЫЕ АЛГЕБРЫ ЛЕЙБНИЦА МАКСИМАЛЬНОЙ ДЛИНЫ

Л. М. Камачо, Э. М. Каньете, Х. Р. Гомес, Б. А. Омиров

Аннотация. n-Мерные p-филиформные алгебры Лейбница максимальной длины ранее были изучены при $0 \leq p \leq 2$. Для алгебр Ли нильиндекса $n-2$ существует только одна характеристическая последовательность $(n-2, 1, 1)$, в то время как в теории алгебр Лейбница мы имеем две возможности: $(n-2, 1, 1)$ и $(n-2, 2)$. Первый случай (2-филиформный) исследован ранее. В настоящей статье рассмотрен второй случай, т. е. квази-филиформные нелиевы алгебры Лейбница максимальной длины. Следовательно, данная работа завершает изучение алгебр Лейбница максимальной длины нильиндекса $n-p$ при $0 \leq p \leq 2$.

Ключевые слова: алгебра Ли, алгебра Лейбница, нильпотентность, естественная градуировка, характеристическая последовательность, p-филиформность.

1. Введение

Понятие длины алгебры Ли введено Гомесом, Хименес-Мершан и Рейес [1]. В этой работе они выделили следующее интересное семейство: алгебры, допускающие градуировку с наибольшим числом ненулевых подпространств, названные ими алгебрами максимальной длины. В действительности они рассматривали только связные градуировки, хотя существуют и несвязные алгебры с наибольшим числом ненулевых подпространств. Тем не менее в соответствии с работой [1] понятие алгебры максимальной длины закрепилось. В настоящей работе будут описаны квази-филиформные алгебры Лейбница максимальной длины в смысле статьи [1], т. е. будут рассмотрены только связные градуировки.

Алгебры Лейбница возникают как естественное обобщение алгебр Ли [2, 3], и понятие длины может быть аналогично дано и в данной ситуации. Поэтому предполагается, что алгебры Лейбница максимальной длины будут играть роль, подобную случаю алгебр Ли. Когомологические свойства алгебр Лейбница уже широко изучались (см., например, [4–7]). Замечательным качеством алгебр максимальной длины является относительная простота изучения их когомологических свойств [8].

Проблема классификации неассоциативных нильпотентных алгебр Ли очень сложна. Действительно, эта проблема возникла два столетия назад и до сих

This work is supported in part by the PAI, FQM143 of Junta de Andalucía (Spain). B. A. Omirov was supported by a grant of NATO-Reintegration ref. CBP.EAP.RIG. 983169 and he would like to thank of the Universidad de Sevilla for their hospitality.

пор остается нерешенной. Относительно алгебр Лейбница проблема аналогична, поэтому мы ограничим наше внимание двумя важными семействами алгебр Лейбница: p-филиформными и квази-филиформными (см. определения 4 и 5).

Классификация филиформных и 2-филиформных алгебр Ли максимальной длины дана в [1, 9] (заметим, что в этом случае не существует нуль-филиформных алгебр и понятия 2-филиформности и квази-филиформности согласуются). В случае алгебр Лейбница нуль-филиформный случай изучен в [10], в то время как филиформный и 2-филиформный случаи исследованы в [11].

Мы сконцентрируем внимание на квази-филиформных алгебрах Лейбница. Пусть $\mathscr{L}$ — n-мерная квази-филиформная нелиева алгебра Лейбница. Тогда ее характеристическая последовательность есть либо $(n-2,1,1)$, либо $(n-2,2)$. Первый случай (2-филиформный) исследован в [11]. В настоящей работе мы рассматриваем второй случай, т. е. случай алгебр с характеристической последовательностью $(n-2,2)$. Основной целью является полное изучение алгебр максимальной длины нильиндекса $n-2$. Для изучения этих алгебр мы рассматриваем расширенные естественно градуированные квази-филиформные алгебры Лейбница и доказываем, что расширением естественно градуированных квази-филиформных алгебр Ли являются алгебры Ли.

Основные результаты (см. точные формулировки в теоремах 3.1 и 3.2) будут доказаны в разд. 3, а следующие определения будут использоваться на протяжении всей статьи.

Определение 1. Алгебра $\mathscr{L}$ над полем F называется *алгеброй Лейбница*, если она удовлетворяет тождеству Лейбница: $[x,[y,z]] = [[x,y],z] - [[x,z],y]$ для любых $x,y,z \in \mathscr{L}$, где $[\,,]$ — умножение в $\mathscr{L}$.

Заметим, что если в $\mathscr{L}$ выполнено тождество $[x,x]=0$, то тождество Лейбница совпадает с тождеством Якоби. Таким образом, алгебры Лейбница являются обобщением алгебр Ли.

Для алгебры Лейбница $\mathscr{L}$ определим следующую последовательность идеалов: $\mathscr{L}^1 = \mathscr{L}$ и $\mathscr{L}^{k+1} = [\mathscr{L}^k, \mathscr{L}]$. Далее в качестве основного поля будем рассматривать поле комплексных чисел. Пусть $\mathscr{L}$ — нильпотентная алгебра индекса нильпотентности s, т. е. $\mathscr{L}^{s+1} = 0$ и $\mathscr{L}^s \neq 0$. Определим естественно градуированные алгебры следующим образом.

Определение 2. Положим $\mathscr{L}_i = \mathscr{L}^i/\mathscr{L}^{i+1}$, $1 \le i \le k$, и $\operatorname{gr}\mathscr{L} = \mathscr{L}_1 \oplus \mathscr{L}_2 \oplus \dots \oplus \mathscr{L}_k$. Тогда $[\mathscr{L}_i, \mathscr{L}_j] \subseteq \mathscr{L}_{i+j}$ и получаем градуированную алгебру $\operatorname{gr}\mathscr{L}$. Если $\operatorname{gr}\mathscr{L}$ и $\mathscr{L}$ изоморфны, что обозначается через $\operatorname{gr}\mathscr{L} \cong \mathscr{L}$, то мы называем $\mathscr{L}$ *естественно градуированной алгеброй.*

Построенная выше градуировка называется *естественной градуировкой.*

Множество $R(\mathscr{L}) = \{x \in \mathscr{L} : [y,x] = 0 \ \forall y \in \mathscr{L}\}$ называется *правым аннулятором* $\mathscr{L}$. Для любых $x,y \in \mathscr{L}$ элементы $[x,x]$ и $[x,y]+[y,x]$ лежат в $R(\mathscr{L})$.

Множество $\operatorname{Cent}(\mathscr{L}) = \{z \in \mathscr{L} : [x,z] = [z,x] = 0 \ \forall x \in \mathscr{L}\}$ называется *центром* $\mathscr{L}$. Заметим, что $R(\mathscr{L})$ является идеалом в $\mathscr{L}$.

Определим множество $\mathscr{I}(\mathscr{L}) = \langle [x,x] \ \forall x \in \mathscr{L}\rangle$. Заметим, что $\mathscr{I}(\mathscr{L})$ является идеалом в $\mathscr{L}$.

Пусть x — нильпотентный элемент из $\mathscr{L} \setminus \mathscr{L}^2$. Для нильпотентного оператора правого умножения R_x определим убывающую последовательность $C(x) = (n_1, n_2, \dots, n_s)$, состоящую из порядков клеток Жордана оператора R_x, где $n_1 + n_2 + \dots + n_s = \dim \mathscr{L}$. В множестве таких последовательностей рассматриваем лексикографический порядок, т. е. $C(x) = (n_1, n_2, \dots, n_s) < C(y) =$

$(m_1, m_2, \dots, m_t) \iff$ существует $i \in \mathbb{N}$ такой, что $n_j = m_j$ для любого $j < i$ и $n_i < m_i$.

Определение 3. Последовательность $C(\mathscr{L}) = \max C(x)_{x \in \mathscr{L} \setminus \mathscr{L}^2}$ называется *характеристической последовательностью алгебры* $\mathscr{L}$.

Пример 1.1. Если $C(\mathscr{L}) = (1, 1, \dots, 1)$, то, очевидно, алгебра $\mathscr{L}$ абелева.

Пусть $\mathscr{L}$ — n-мерная нильпотентая алгебра Лейбница, а p — неотрицательное целое число ($p < n$).

Определение 4. Алгебра Лейбница $\mathscr{L}$ называется *p-филиформной*, если $C(\mathscr{L}) = (n - p, \underbrace{1, \dots, 1}_{p})$. Если $p = 1$, то $\mathscr{L}$ называется *филиформной алгеброй*, а если $p = 0$ — *нуль-филиформной алгеброй.*

Определение 5. Алгебра Лейбница $\mathscr{L}$ называется *квази-филиформной*, если ее нильиндекс равен $n - 2$, а именно $\mathscr{L}^{n-2} \neq \{0\}$ и $\mathscr{L}^{n-1} = \{0\}$, где $n = \dim(\mathscr{L})$.

Алгебра Лейбница $\mathscr{L}$ называется *$\mathbb{Z}$-градуированной*, если $\mathscr{L} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} V_i$, где $[V_i, V_j] \subseteq V_{i+j}$ для любых $i, j \in \mathbb{Z}$, с конечным числом ненулевых пространств V_i.

Будем говорить, что $\mathbb{Z}$-градуированная нильпотентная алгебра Лейбница $\mathscr{L}$ допускает *связную градуировку* $\mathscr{L} = V_{k_1} \oplus V_{k_1+1} \oplus V_{k_1+2} \oplus \dots \oplus V_{k_1+t}$, если $V_{k_1+i} \neq 0$ для любого i $(0 \le i \le t)$.

Определение 6. Число $l(\oplus\mathscr{L}) = l(V_{k_1} \oplus V_{k_1+1} \oplus V_{k_1+2} \oplus \dots \oplus V_{k_1+t}) = t + 1$ называется *длиной градуировки*. Говорят, что *градуировка имеет максимальную длину*, если $l(\oplus\mathscr{L}) = t + 1 = \dim(\mathscr{L})$.

Определим длину алгебры $\mathscr{L}$ правилом

$$l(\mathscr{L}) = \max\{l(\oplus\mathscr{L}) : \mathscr{L} = V_{k_1} \oplus V_{k_1+1} \oplus V_{k_1+2} \oplus \dots \oplus V_{k_1+t} \text{ является связной градуировкой}\}.$$

Алгебра Лейбница $\mathscr{L}$ называется *алгеброй максимальной длины*, если $\mathscr{L}$ допускает градуировку максимальной длины.

2. Естественно градуированные квази-филиформные алгебры Лейбница

Следующая теорема дает классификацию естественно градуированных n-мерных квази-филиформных алгебр Ли (см. [12]).

Теорема 2.1. *Пусть $\mathfrak{g}$ — комплексная n-мерная естественно градуированная квази-филиформная алгебра Ли. Тогда существует базис $\{x_0, x_1, \dots, x_{n-2}, y\}$ алгебры $\mathfrak{g}$ такой, что умножение в алгебре имеет следующий вид:*

$L(n, r)$ *($n \ge 5$, $3 \le r \le 2\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor - 1$, r нечетно):*

$$\begin{cases} [x_0, x_i] = x_{i+1}, & 1 \le i \le n-3, \\ [x_i, x_{r-i}] = (-1)^{i-1} y, & 1 \le i \le \frac{r-1}{2}; \end{cases}$$

$Q(n, r)$ *($n \ge 7$, n нечетно, $3 \le r \le n - 4$, r нечетно):*

$$\begin{cases} [x_0, x_i] = x_{i+1}, & 1 \le i \le n-3, \\ [x_i, x_{r-i}] = (-1)^{i-1} y, & 1 \le i \le \frac{r-1}{2}, \\ [x_i, x_{n-2-i}] = (-1)^{i-1} x_{n-2}, & 1 \le i \le \frac{n-3}{2}; \end{cases}$$

$\mathfrak{t}(n, n-3)$ $(n \geq 6$, *n четно*):

$$\begin{cases} [x_0, x_i] = x_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3, \\ [x_{n-1}, x_1] = \frac{(n-4)}{2} x_{n-2}, & \\ [x_i, x_{n-3-i}] = (-1)^{i-1}(x_{n-3} + x_{n-1}), & 1 \leq i \leq \frac{n-4}{2}, \\ [x_i, x_{n-2-i}] = (-1)^{i-1} \frac{(n-2-2i)}{2} x_{n-2}, & 1 \leq i \leq \frac{n-4}{2}; \end{cases}$$

$\mathfrak{t}(n, n-4)$ $(n \geq 7$, *n нечетно*):

$$\begin{cases} [x_0, x_i] = x_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3, \\ [x_{n-1}, x_i] = \frac{(n-5)}{2} x_{n-4+i}, & 1 \leq i \leq 2, \\ [x_i, x_{n-4-i}] = (-1)^{i-1}(x_{n-4} + x_{n-1}), & 1 \leq i \leq \frac{n-5}{2}, \\ [x_i, x_{n-3-i}] = (-1)^{i-1} \frac{(n-3-2i)}{2} x_{n-3}, & 1 \leq i \leq \frac{n-5}{2}, \\ [x_i, x_{n-2-i}] = (-1)^{i}(i-1) \frac{(n-3-i)}{2} x_{n-2}, & 2 \leq i \leq \frac{n-3}{2}; \end{cases}$$

$$\mathscr{E}(7,3)\colon \quad \begin{cases} [x_0, x_i] = x_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq 3, \\ [y, x_i] = x_{i+3}, \quad 1 \leq i \leq 2, \\ [x_1, x_2] = x_3 + y, \\ [x_1, x_i] = x_{i+1}, \quad 3 \leq i \leq 4; \end{cases}$$

$$\mathscr{E}^1(9,5)\colon \quad \begin{cases} [x_0, x_i] = x_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq 5, \\ [y, x_i] = 2x_{i+5}, \quad 1 \leq i \leq 2, \\ [x_1, x_4] = x_5 + y, \ [x_1, x_5] = 2x_6, \ [x_1, x_6] = 3x_7, \\ [x_2, x_3] = -x_5 - y, \ [x_2, x_4] = -x_6, \ [x_2, x_5] = -x_7; \end{cases}$$

$$\mathscr{E}^2(9,5)\colon \quad \begin{cases} [x_0, x_i] = x_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq 5, \\ [y, x_i] = 2x_{i+5}, \quad 1 \leq i \leq 2, \\ [x_1, x_4] = x_5 + y, \ [x_1, x_5] = 2x_6, \ [x_1, x_6] = x_7, \ [x_2, x_3] = -x_5 - y, \\ [x_2, x_4] = -x_6, \ [x_2, x_5] = x_7, \ [x_3, x_4] = -2x_7; \end{cases}$$

$L_{n-1} \oplus \mathbb{C}$ $(n \geq 4)$:

$$[x_0, x_i] = x_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq n-3;$$

$Q_{n-1} \oplus \mathbb{C}$ $(n \geq 7$, *n нечетно*):

$$\begin{cases} [x_0, x_i] = x_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3, \\ [x_i, x_{n-2-i}] = (-1)^{i-1} x_{n-2}, & 1 \leq i \leq \frac{n-3}{2}. \end{cases}$$

Пусть $\mathscr{L}$ — n-мерная $(n \geq 6)$ естественно градуированная квази-филиформная нелиева алгебра Лейбница с характеристической последовательностью $(n-2, 1, 1)$ или $(n-2, 2)$. Первый случай (2-филиформный) изучался в [13], а второй — в [11]. В настоящей работе продолжим это изучение, т. е. будем рассматривать алгебры Лейбница такие, что $C(\mathscr{L}) = (n-2, 2)$.

Из определения характеристической последовательности следует существование базисного элемента $e_1 \in \mathscr{L} \setminus \mathscr{L}^2$ такого, что оператор правого умножения R_{e_1} в жордановой форме имеет одну из следующих форм, где J_i — жорданова клетка порядка i (заметим, что $J_1 = \{0\}$ имеет порядок один):

$$\left(\begin{array}{c|c} J_{n-2} & 0 \\ \hline 0 & J_2 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{c|c} J_2 & 0 \\ \hline 0 & J_{n-2} \end{array}\right).$$

Квази-филиформная алгебра Лейбница называется *алгеброй первого типа*, если оператор R_{e_1} подобен первой матрице, и *алгеброй второго типа* во втором случае.

В следующих теоремах соберем результаты, полученные в [14].

Теорема 2.2. *Пусть $\mathfrak{A}$ — естественно градуированная алгебра Лейбница первого типа. Тогда она изоморфна некоторой алгебре из следующих попарно неизоморфных семейств:*

$$\mathfrak{A}^{1,\lambda}\colon \quad \begin{cases} [y_i, y_1] = y_{i+1}, \quad 1 \le i \le n-3, \\ [y_{n-1}, y_1] = y_n, \quad [y_1, y_{n-1}] = \lambda y_n; \end{cases}$$

$$\mathfrak{A}^{2,\lambda}\colon \quad \begin{cases} [y_i, y_1] = y_{i+1}, \quad 1 \le i \le n-3, \\ [y_{n-1}, y_1] = y_n, \\ [y_1, y_{n-1}] = \lambda y_n, \quad \lambda \in \{0, 1\}, \\ [y_{n-1}, y_{n-1}] = y_n; \end{cases}$$

$$\mathfrak{A}^{3,\lambda}\colon \quad \begin{cases} [y_i, y_1] = y_{i+1}, \quad 1 \le i \le n-3, \\ [y_{n-1}, y_1] = y_n + y_2, \\ [y_1, y_{n-1}] = \lambda y_n, \quad \lambda \in \{-1, 0, 1\}; \end{cases}$$

$$\mathfrak{A}^{4,\lambda}\colon \quad \begin{cases} [y_i, y_1] = y_{i+1}, \quad 1 \le i \le n-3, \\ [y_{n-1}, y_1] = y_n + y_2, \\ [y_{n-1}, y_{n-1}] = \lambda y_n, \quad \lambda \ne 0; \end{cases}$$

$$\mathfrak{A}^{5,\lambda,\mu}\colon \quad \begin{cases} [y_i, y_1] = y_{i+1}, \quad 1 \le i \le n-3, \\ [y_{n-1}, y_1] = y_n + y_2, \\ [y_1, y_{n-1}] = \lambda y_n, \quad (\lambda, \mu) = (1, 1) \text{ или } (2, 4), \\ [y_{n-1}, y_{n-1}] = \mu y_n; \end{cases}$$

$$\mathfrak{A}^{6}\colon \quad \begin{cases} [y_i, y_1] = y_{i+1}, \quad 1 \le i \le n-3, \\ [y_{n-1}, y_1] = y_n, \quad [y_1, y_{n-1}] = -y_n, \\ [y_{n-1}, y_{n-1}] = y_2, \quad [y_{n-1}, y_n] = y_3. \end{cases}$$

Теорема 2.3. *Пусть $\mathfrak{A}$ — естественно градуированная алгебра Лейбница второго типа. Тогда она изоморфна некоторой алгебре из следующих попарно неизоморфных семейств:*

n четно

$$\mathfrak{A}^{1}\colon \quad \begin{cases} [y_1, y_1] = y_2, \\ [y_i, y_1] = y_{i+1}, \quad 3 \le i \le n-1, \\ [y_1, y_i] = -y_{i+1}, \quad 3 \le i \le n-1; \end{cases}$$

$$\mathfrak{A}^{2}\colon \quad \begin{cases} [y_1, y_1] = y_2, \\ [y_i, y_1] = y_{i+1}, \quad 3 \le i \le n-1, \\ [y_1, y_3] = y_2 - y_4, \\ [y_1, y_j] = -y_{j+1}, \quad 4 \le j \le n-1; \end{cases}$$

$$\mathfrak{A}^{3}\colon \quad \begin{cases} [y_1, y_1] = y_2, \\ [y_i, y_1] = y_{i+1}, \quad 3 \le i \le n-1, \\ [y_3, y_3] = y_2, \\ [y_1, y_i] = -y_{i+1}, \quad 3 \le i \le n-1; \end{cases}$$

$$\mathfrak{A}^{4}\colon \quad \begin{cases} [y_1, y_1] = y_2, \\ [y_i, y_1] = y_{i+1}, \quad 3 \le i \le n-1, \\ [y_1, y_3] = 2y_2 - y_4, \quad [y_3, y_3] = y_2, \\ [y_1, y_j] = -y_{j+1}, \quad 4 \le j \le n-1; \end{cases}$$

n нечетно, $\mathfrak{A}^1, \mathfrak{A}^2, \mathfrak{A}^3, \mathfrak{A}^4$

$$\mathfrak{A}^5\colon \quad \begin{cases} [y_1, y_1] = y_2, \\ [y_i, y_1] = y_{i+1}, \quad 3 \le i \le n-1, \\ [y_1, y_i] = -y_{i+1}, \quad 4 \le i \le n-1, \\ [y_i, y_{n+2-i}] = (-1)^i y_n, \quad 3 \le i \le n-1; \end{cases}$$

$$\mathfrak{A}^{6,\lambda}\colon \quad \begin{cases} [y_1, y_1] = y_2, \\ [y_i, y_1] = y_{i+1}, \quad 3 \le i \le n-1, \\ [y_1, y_3] = \lambda y_2 - y_4, \quad \lambda \in \{1, 2\}, \\ [y_1, y_j] = -y_{j+1}, \quad 4 \le j \le n-1, \\ [y_i, y_{n+2-i}] = (-1)^i y_n, \quad 3 \le i \le n-1; \end{cases}$$

$$\mathfrak{A}^{7,\lambda}\colon \quad \begin{cases} [y_1, y_1] = y_2, \\ [y_i, y_1] = y_{i+1}, \quad 3 \le i \le n-1, \\ [y_3, y_3] = \lambda y_2, \quad \lambda \ne 0, \\ [y_1, y_i] = -y_{i+1}, \quad 3 \le i \le n-1, \\ [y_i, y_{n+2-i}] = (-1)^i y_n, \quad 3 \le i \le n-1; \end{cases}$$

$$\mathfrak{A}^{8,\lambda,\mu}\colon \quad \begin{cases} [y_1, y_1] = y_2, \\ [y_i, y_1] = y_{i+1}, \quad 3 \le i \le n-1, \\ [y_1, y_3] = \lambda y_2 - y_4, \quad [y_3, y_3] = \mu y_2, \\ [y_1, y_j] = -y_{j+1}, \quad 4 \le j \le n-1, \\ [y_i, y_{n+2-i}] = (-1)^i y_n, \quad 3 \le i \le n-1, \\ \qquad \textit{при } (\lambda, \mu) = (-2, 1), (2, 1) \textit{ или } (4, 2). \end{cases}$$

Изучение алгебр Лейбница максимальной длины можно упростить, следуя рассуждениям из доказательств теорем 2.2 и 2.3 (см. [14]). Следующее утверждение описывает структуру естественно градуированной n-мерной алгебры Лейбница.

Утверждение 2.1. *Пусть $\mathscr{L}$ — естественно градуированная квази-филиформная алгебра Лейбница. Тогда $\mathscr{L}$ изоморфна некоторой алгебре из следующих попарно не изоморфных семейств:*

$$NG1\colon \quad \begin{cases} [e_1, e_1] = e_2, \\ [e_i, e_1] = e_{i+1}, \quad 3 \le i \le n-1, \\ [e_1, e_3] = \lambda e_2 - e_4, \\ [e_3, e_3] = \mu e_2, \quad \lambda,\ \mu \in \mathbb{C}, \\ [e_1, e_i] = -e_{i+1}, \quad 4 \le i \le n-1; \end{cases}$$

$$NG2\colon \quad \begin{cases} [e_1, e_1] = e_2, \\ [e_i, e_1] = e_{i+1}, \quad 3 \le i \le n-1, \\ [e_1, e_3] = \lambda e_2 - e_4, \\ [e_3, e_3] = \mu e_2, \quad \lambda,\ \mu \in \mathbb{C}, \\ [e_1, e_i] = -e_{i+1}, \quad 4 \le i \le n-1, \\ [e_i, e_{n+2-i}] = (-1)^i e_n, \quad 3 \le i \le n-1; \end{cases}$$

$$NG3:\quad \begin{cases} [e_i,e_1]=e_{i+1}, \quad 1\le i\le n-3,\\ [e_{n-1},e_1]=e_n+\alpha e_2,\ [e_1,e_{n-1}]=\beta e_n,\\ [e_{n-1},e_{n-1}]=\gamma e_n, \quad \alpha,\ \beta,\ \gamma\in\mathbb{C}; \end{cases}$$

$$NG4:\quad \begin{cases} [e_i,e_1]=e_{i+1}, \quad 1\le i\le n-3,\\ [e_{n-1},e_1]=e_n,\ [e_1,e_{n-1}]=-e_n,\\ [e_{n-1},e_{n-1}]=e_2,\ [e_{n-1},e_n]=e_3, \end{cases}$$

где $NG1$ и $NG2$ соответствуют алгебрам второго типа, а $NG3$ и $NG4$ — алгебрам первого типа.

3. Квази-филиформные алгебры Лейбница максимальной длины

Пусть $\mathscr{L}$ — n-мерная ($n\ge 6$) квази-филиформная нелиева алгебра Лейбница с характеристической последовательностью $(n-2,2)$. В утверждении 3.1 описана структура таких алгебр на основе ранее полученного результата.

Утверждение 3.1. *Пусть $\mathscr{L}$ — n-мерная квази-филиформная алгебра Лейбница. Тогда $\mathscr{L}$ изоморфна некоторой алгебре из следующих попарно не изоморфных семейств:*

$$\widetilde{NG1}:\quad \begin{cases} [e_1,e_1]=e_2,\\ [e_i,e_1]=e_{i+1}, \quad 3\le i\le n-1,\\ [e_1,e_3]=\lambda e_2-e_4+\mu_n e_n, \quad [e_3,e_3]=\mu e_2+\gamma_n e_n,\\ [e_1,e_i]=-e_{i+1}+\gamma_{i,n}e_n, \quad 4\le i\le n-1,\\ [e_i,e_j]=(*)e_{i+j-1}+(*)e_{i+j}+\dots+(*)e_n,\\ \qquad \forall (i,j)\ne(1,1),(1,3),(3,3),(3,1),(i,1),(1,i),\\ [e_2,e_i]=z_ie_n, \quad i\ne 2,n; \end{cases}$$

$$\widetilde{NG2}:\quad \begin{cases} [e_1,e_1]=e_2+\alpha_n e_n,\\ [e_i,e_1]=e_{i+1}, \quad 3\le i\le n-1,\\ [e_1,e_3]=\lambda e_2-e_4+(*)e_n, \quad [e_3,e_3]=\mu e_2+(*)e_n,\\ [e_1,e_i]=-e_{i+1}+(*)e_n, \quad 4\le i\le n-1,\\ [e_i,e_{n+2-i}]=(-1)^n e_n, \quad 3\le i\le n-1,\\ [e_i,e_j]=(*)e_{i+j-1}+\dots+(*)e_n,\\ \qquad \forall (i,j)\ne(1,1),(1,3),(3,3),(3,1),(k,n+2-k),\\ \qquad\qquad 3\le k\le n-1; \end{cases}$$

$$\widetilde{NG3}:\quad \begin{cases} [e_i,e_1]=e_{i+1}+(*)e_{i+2}+\dots+(*)e_{n-2}, \quad 1\le i\le n-3,\\ [e_{n-1},e_1]=e_n+\alpha e_2+(*)e_3+\dots+(*)e_{n-2},\\ [e_1,e_{n-1}]=\beta e_n+(*)e_3+\dots+(*)e_{n-2},\\ [e_{n-1},e_{n-1}]=\gamma e_n+(*)e_3+\dots+(*)e_{n-2},\\ [e_i,e_{n-1}]=(*)e_{i+2}+\dots+(*)e_{n-2}, \quad 2\le i\le n-3,\\ [e_n,e_{n-1}]=(*)e_4+\dots+(*)e_{n-2}; \end{cases}$$

$$\widetilde{NG}4\colon\quad \begin{cases} [e_i,e_1]=e_{i+1}+(*)e_{i+2}+\dots+(*)e_{n-2}, \quad 1\le i\le n-3,\\ [e_{n-1},e_1]=e_n+(*)e_3+\dots+(*)e_{n-2},\\ [e_1,e_{n-1}]=-e_n+(*)e_3+\dots+(*)e_{n-2},\\ [e_{n-1},e_{n-1}]=e_2+(*)e_3+\dots+(*)e_{n-2},\\ [e_{n-1},e_n]=e_3+(*)e_4+\dots+(*)e_{n-2},\\ [e_i,e_j]=(*)e_{i+j+1}+\dots+(*)e_n, \quad 2\le i,j\le n-2,\\ [e_i,e_{n-1}]=(*)e_{i+2}+\dots+(*)e_{n-2}, \quad 2\le i\le n-2,\\ [e_n,e_{n-1}]=(*)e_4+\dots+(*)e_{n-2},\\ [e_j,e_n]=(*)e_5+\dots+(*)e_{n-2}, \quad j=2,5,\\ [e_i,e_n]=(*)e_{i+3}+\dots+(*)e_{n-2}, \quad i=1\wedge 3\le i\le n-2,\\ [e_n,e_n]=(*)e_5+\dots+(*)e_{n-2}, \end{cases}$$

где $(*)$ обозначают соответствующие коэффициенты при базисных элементах.

Доказательство. Данные семейства получаются из структуры естественно градуированных квази-филиформных алгебр Лейбница (см. утверждение 2.1) при рассмотрении их естественных градуировок. □

Поскольку изучение квази-филиформных алгебр Ли максимальной длины проведено в [1], ограничимся нелиевыми алгебрами Лейбница. Более того, классификация 2-филиформных алгебр Лейбница максимальной длины дана в [11]. Таким образом, следующие результаты завершают изучение алгебр Лейбница максимальной длины и нильиндекса $n-2$, где n — размерность $\mathscr{L}$ и $n\ge 6$.

Теорема 3.1. *Пусть $\mathscr{L}$ — n-мерная квази-филиформная нелиева алгебра Лейбница максимальной длины и первого типа. Тогда $\mathscr{L}$ изоморфна некоторой алгебре из следующих попарно не изоморфных семейств:*

$$M^{1,\delta}\colon\quad \begin{cases} [y_1,y_1]=y_n, \quad [y_{n-1},y_1]=y_2,\\ [y_i,y_1]=y_{i+1}, \quad 2\le i\le n-3,\\ [y_{n-1},y_{n-1}]=\delta y_4, \quad \delta\in\{0,1\},\\ [y_i,y_{n-1}]=\delta y_{3+i}, \quad 2\le i\le n-5; \end{cases}$$

$$M^{2,\lambda}\colon\quad \begin{cases} [y_i,y_1]=y_{i+1}, \quad 1\le i\le n-3,\\ [y_{n-1},y_1]=y_n,\\ [y_1,y_{n-1}]=\lambda y_n, \quad \lambda\in\mathbb{C}. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $\langle e_1,e_2,\dots,e_n\rangle$ — базис из утверждения 3.1. Рассмотрим следующие случаи.

Случай 1. Пусть $e_n\notin R(\mathscr{L})$. Тогда получаем семейство $\widetilde{NG}4$, где $\{e_2,e_3,\dots,e_{n-2}\}\subseteq R(\widetilde{NG}4)$. Для изучения длины алгебр из семейства $\widetilde{NG}4$ возьмем

$$x_s=e_1+\sum_{i=2}^{n}a_ie_i; \quad x_t=e_{n-1}+\sum_{k=1;k\ne n-1}^{n}b_ke_k, \text{ где } a_{n-1}b_1\ne 1,$$

а

$$[x_s,x_s]=\big(1+a_{n-1}^2\big)e_2+(*)e_3+\dots+(*)e_n, \quad [x_t,x_t]=\big(1+b_1^2\big)e_2+(*)e_3+\dots+(*)e_n,$$

$$[x_t,x_s]=(b_1+a_{n-1})e_2+(*)e_3+\dots+(*)e_{n-1}+(1-a_{n-1}b_1)e_n,$$

$$[x_s,x_t]=(b_1+a_{n-1})e_2+(*)e_3+\dots+(*)e_{n-1}+(a_{n-1}b_1-1)e_n.$$

Получаем два подслучая.

Подслучай 1.1. Пусть $1 + a_{n-1}^2 \neq 0$. Рассмотрим

$$\underbrace{[[x_s, x_s], x_s], \dots, x_s]}_{i \text{ раз}} = \bigl(1 + a_{n-1}^2\bigr) e_i + (*) e_{i+1} + \dots + (*) e_n.$$

Определим новый базис $\{y_1, \dots, y_n\}$:

$$y_1 = x_s, \quad y_i = [y_{i-1}, x_s] \quad \text{при} \quad 2 \le i \le n-2, \quad y_{n-1} = x_t, \quad y_n = [x_s, x_t],$$

который дает градуировку максимальной длины $V_{k_s} \oplus V_{2k_s} \oplus \dots \oplus V_{(n-2)k_s} \oplus V_{k_t} \oplus V_{k_s+k_t}$. Для произведений базисных элементов справедливы следующие формулы:

$$[y_i, y_1] = y_{i+1}, \; 1 \le i \le n-3, \quad [y_1, y_{n-1}] = y_n.$$

Кроме того,

$$y_n \notin R(\widetilde{NG4}), \; [y_1, y_{n-1}] + [y_{n-1}, y_1] \in R(\widetilde{NG4}) \text{ и } \; [y_{n-1}, y_1] = A y_n,$$

откуда $A = -1$. Проверим остальные произведения.

Рассматривая

$$\begin{cases} [y_{n-1}, y_1] = [x_t, x_s] = (b_1 + a_{n-1}) e_2 + (*) e_3 + \dots + (*) e_{n-1} + (1 - b_1 a_{n-1}) e_n, \\ [y_1, y_{n-1}] = [x_s, x_t] = (b_1 + a_{n-1}) e_2 + (*) e_3 + \dots + (*) e_{n-1} + (b_1 a_{n-1} - 1) e_n, \\ [y_{n-1}, y_1] = -[y_1, y_{n-1}], \end{cases}$$

получаем $b_1 = -a_{n-1}$.

Из $a_{n-1} = -b_1$ и $a_{n-1} b_1 \neq 1$ имеем $a_{n-1}^2 \neq -1$, поэтому

$$[y_{n-1}, y_n] = -\bigl(a_{n-1}^2 + 1\bigr) e_3 + (*) e_4 + \dots + (*) e_n.$$

Следовательно, $[y_{n-1}, y_n] = B y_3$, где $B \neq 0$. Тогда

$$[y_{n-1}, y_n] = B y_3, \; B \neq 0, \quad [y_{n-1}, y_n] \subseteq V_{2k_t + k_s}, \quad y_3 \subseteq V_{3k_s}.$$

Таким образом, доказано равенство $k_s = k_t$, что противоречит предположению о максимальности длины.

Подслучай 1.2. Пусть $1 + a_{n-1}^2 = 0$. Из условий

$$\begin{cases} [x_t, x_s] = (b_1 + a_{n-1}) e_2 + (*) e_3 + \dots + (*) e_{n-1} + (1 - b_1 a_{n-1}) e_n = A y_n \neq 0, \\ [x_s, x_t] = (b_1 + a_{n-1}) e_2 + (*) e_3 + \dots + (*) e_{n-1} + (b_1 a_{n-1} - 1) e_n = y_n \neq 0, \\ [x_t, x_s] + [x_s, x_t] \in R(\widetilde{NG4}) \end{cases}$$

и свойства максимальности длины получаем $(A+1) y_n = 0$, т. е. $A = -1$, откуда $b_1 = -a_{n-1}$ и $a_{n-1} b_1 \neq 1$, что влечет $a_{n-1}^2 \neq -1$. Последнее противоречит предположению $1 + a_{n-1}^2 = 0$.

Таким образом, $\widetilde{NG4}$ не является алгеброй максимальной длины.

Случай 2. Пусть $e_n \in R(\mathscr{L})$. Тогда имеем семейство $\widetilde{NG3}$, где $\{e_2, e_3, \dots, e_{n-2}, e_n\} \subseteq R(\widetilde{NG3})$.

Выбирая предыдущий базис, получаем произведения

$$\begin{cases} [x_s, x_s] = (1 + a_{n-1}\alpha) e_2 + (*) e_3 + \dots + (*) e_{n-2} + \bigl(a_{n-1}\beta + a_{n-1} + a_{n-1}^2 \gamma\bigr) e_n, \\ [x_t, x_t] = \bigl(b_1^2 + b_1 \alpha\bigr) e_2 + (*) e_3 + \dots + (*) e_{n-2} + (b_1 + b_1 \beta + \gamma) e_n, \\ [x_t, x_s] = (b_1 + \alpha) e_2 + (*) e_3 + \dots + (*) e_{n-2} + (1 + b_1 a_{n-1} \beta + a_{n-1} \gamma) e_n, \\ [x_s, x_t] = (b_1 + a_{n-1} b_1 \alpha) e_2 + (*) e_3 + \dots + (*) e_{n-2} + (b_1 a_{n-1} + \beta + a_{n-1} \gamma) e_n, \\ \underbrace{[[x_s, x_s], x_s] \dots, x_s]}_{i \text{ раз}} = (1 + a_{n-1}\alpha) e_i + (*) e_{i+1} + \dots + (*) e_{n-2}. \end{cases} \tag{1}$$

Подслучай 2.1. Пусть $1 + a_{n-1}\alpha = 0$.

Если $b_1(b_1 + \alpha) \neq 0$, то аналогично предыдущим случаям доказываем, что алгебра не допускает градуировки максимальной длины. Следовательно, будем предполагать, что $b_1(b_1 + \alpha) = 0$.

Заметим, что в действительности если $b_1 + \alpha = 0$, то $1 + a_{n-1}\alpha = 0$, поэтому $a_{n-1}b_1 = 1$, что невозможно. Следовательно, $b_1 = 0$. В этом случае получаем

$$\begin{aligned}
[x_s, x_s] &= (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-2} + \bigl(a_{n-1}\beta + a_{n-1} + a_{n-1}^2\gamma\bigr)e_n,\\
[x_t, x_t] &= (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-2} + \gamma e_n,\\
[x_t, x_s] &= \alpha e_2 + (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-2} + (1 + a_{n-1}\gamma)e_n,\\
[x_s, x_t] &= (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-2} + (\beta + a_{n-1}\gamma)e_n,\\
[[[x_t, \underbrace{x_s], x_s], \ldots, x_s]}_{(i-1)\text{ раз}} &= \alpha e_i + (*)e_{i+1} + \cdots + (*)e_{n-2}, \quad 3 \leq i \leq n-2.
\end{aligned}$$

Поскольку $[x_s, x_t] = D[x_t, x_s]$, имеем $D\alpha = 0$, и из $\alpha \neq 0$ следует $D = 0$. Таким образом, $\beta + a_{n-1}\gamma = 0$ и $[y_1, y_{n-1}] = 0$.

Положим $y_1 = x_s$, $y_2 = [x_t, x_s]$, $y_{n-1} = x_t$, $y_i = [y_{i-1}, y_1]$ при $3 \leq i \leq n-2$, а $y_n = [y_1, y_1]$. Этот базис дает следующую градуировку максимальной длины:

$$V_{k_s} \oplus V_{k_t+k_s} \oplus V_{k_t+2k_s} \oplus \cdots \oplus V_{k_t+(n-3)k_s} \oplus V_{k_t} \oplus V_{2k_s}.$$

Имеем

$$[y_{n-1}, y_{n-1}] = [x_t, x_t] = (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-2} + \gamma e_n = Ay_m,$$

где $m \notin \{1, 2, n-1\}$. С другой стороны, $[y_{n-1}, y_{n-1}] \in V_{2k_t}$. Следовательно, $2k_t \in \{2k_s, k_t + (m-1)k_s\}$ при $3 \leq m \leq n-2$. Если $2k_t = 2k_s$, то это противоречит определению максимальной длины. Поскольку $y_m = \alpha e_m + (*)e_{m+1} + \cdots + (*)e_{n-2}$ при $3 \leq m \leq n-2$, то $\gamma = 0$. Тогда из $\beta + a_{n-1}\gamma = 0$ получаем $\beta = 0$.

Случаи $m = 3$ и $5 \leq m \leq n-3$ невозможны из-за связности градуировки максимальной длины. Таким образом, рассмотрим случаи $m = 4$ и $m = n-2$.

Пусть $m = n-2$ и $n > 6$. В этом случае невозможно найти связную градуировку максимальной длины. Если $n = 6$, то $m = 4$.

Пусть $m = 4$. Имеем $[y_{n-1}, y_{n-1}] = \delta y_4$. Используя тождество Лейбница, получаем $[y_i, y_{n-1}] = \delta y_{i+1}$ при $2 \leq i \leq n-5$ и далее выводим $[y_n, y_{n-1}] = 0$.

Чтобы построить таблицу умножения алгебры, достаточно вычислить $[y_n, y_1]$, поскольку $\{y_2, y_3, \ldots, y_{n-2}, y_n\} \subseteq R(\mathscr{L})$ и $y_{n-2} \in \mathrm{Cent}(\mathscr{L})$. По построению

$$[y_n, y_1] = (1 + a_{n-1}\alpha)e_3 + (*)e_4 + \cdots + (*)e_{n-2}.$$

Так как $1 + a_{n-1}\alpha \neq 0$, то $[y_n, y_1] = By_3$. Следовательно, из-за свойств градуировки $k_t = k_s$, что противоречит определению максимальной длины. Таким образом, $[y_n, y_1] = 0$.

Заметим, что если $\delta \neq 0$, то мы можем считать $\delta = 1$, используя простую замену базиса. Следовательно, приходим к алгебре $M^{1,\delta}$ при $\delta = 0$ или $\delta = 1$. Алгебры $M^{1,0}$ и $M^{1,1}$ не изоморфны, так как $\dim(R(M^{1,0})) \neq \dim(R(M^{1,1}))$.

Чтобы разобраться с максимальностью длины, достаточно рассмотреть градуировку $V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_n$, где $V_1 = \langle y_1 \rangle$, $V_2 = \langle y_n \rangle$, $V_3 = \langle y_{n-1} \rangle$ и $V_i = \langle y_{i-2} \rangle$ при $4 \leq i \leq n$.

Подслучай 2.2. Пусть $1 + a_{n-1}\alpha \neq 0$.

Используя умножение из (1), можно выделить следующие случаи.

1. $b_1 + b_1\beta + \gamma \neq 0 \wedge \det \begin{pmatrix} 1 + a_{n-1}\alpha & a_{n-1}\beta + a_{n-1} + a_{n-1}^2\gamma \\ b_1^2 + b_1\alpha & b_1 + b_1\beta + \gamma \end{pmatrix} \neq 0.$

Поскольку определитель ненулевой, то $[x_s, x_s]$ и $[x_t, x_t]$ линейно независимы. Определим новый базис: $y_1 = x_s$, $y_i = [y_{i-1}, y_1]$ при $2 \leq i \leq n-2$, $y_{n-1} = x_t$ и $y_n = [x_t, x_t]$. Рассмотрим следующую градуировку: $V_{k_s} \oplus V_{2k_s} \oplus \dots \oplus V_{(n-2)k_s} \oplus V_{k_t} \oplus V_{2k_t}$. Если $[x_t, x_s] \neq 0$, то $[x_t, x_s] \in V_{k_t+k_s}$ и $k_t + k_s \notin \{k_s, k_t, 2k_s, 2k_t\}$. Это влечет $[x_t, x_s] = Ay_m$ при $A \neq 0$ и $3 \leq m \leq n-2 \Rightarrow k_t = (m-1)k_s$. Если $k_s > 0$, то $2k_s \leq k_t \leq (n-2)k_s$; противоречие. Таким образом, $[x_t, x_s] = 0$, откуда $b_1 + \alpha = 0$ и $1 + a_{n-1}b_1\beta + a_{n-1}\gamma = 0$. Аналогично для $[x_s, x_t]$ имеем $b_1 + a_{n-1}b_1\alpha = 0$ и $a_{n-1}b_1 + \beta + a_{n-1}\gamma = 0$.

Далее, $b_1 = \alpha = 0$, $\beta = 1$, $a_{n-1}\gamma \neq 0$. Мы знаем, что $\{y_2, \dots, y_{n-2}, y_n\} \subseteq R(\widetilde{NG}3)$ и известны произведения $[y_i, y_1] = y_{i+1}$ при $1 \leq i \leq n-3$ и $[y_{n-1}, y_{n-1}] = y_n$. Используя свойства градуировки, получаем $[y_{n-1}, y_1]$, $[y_1, y_{n-1}]$ и $[y_n, y_{n-1}]$ и выводим, что в данном случае не существует алгебр Лейбница максимальной длины.

2. $a_{n-1}b_1 + \beta + a_{n-1}\gamma \neq 0 \wedge \det \begin{pmatrix} 1 + a_{n-1}\alpha & a_{n-1}\beta + a_{n-1} + a_{n-1}^2\gamma \\ b_1(1 + a_{n-1}\alpha) & b_1a_{n-1} + \beta + a_{n-1}\gamma \end{pmatrix} \neq 0.$

В этом случае можно выбрать следующий базис $\{y_1, \dots, y_n\}$: $y_1 = x_s$, $y_i = [y_{i-1}, y_1]$ при $2 \leq i \leq n-2$, $y_{n-1} = x_t$ и $y_n = [y_1, y_{n-1}]$, который дает градуировку максимальной длины: $V_{k_s} \oplus V_{2k_s} \oplus \dots \oplus V_{(n-2)k_s} \oplus V_{k_t} \oplus V_{k_t+k_s}$.

Поскольку определитель ненулевой, имеем $\beta + a_{n-1}\gamma \neq 0$. Следовательно, $\{e_2, \dots, e_{n-2}, e_n\} \subseteq R(\mathscr{L})$ и $e_{n-2} \in \mathrm{Cent}(\mathscr{L})$, откуда $\{y_2, \dots, y_{n-2}, y_n\} \subseteq R(\mathscr{L})$ и $y_{n-2} \in \mathrm{Cent}(\mathscr{L})$. Определим R_{y_1} и $R_{y_{n-1}}$.

Если $[y_n, y_1] \neq 0$, то $[y_n, y_1] \in V_{2k_s+k_t}$. Следовательно, $2k_s + k_t \notin \{2k_s, k_t, k_t + k_s, 3k_s\}$, поскольку $k_s \neq 0 \neq k_t$ и $k_s \neq k_t$. Более того, очевидно, что $2k_s + k_t \neq k_s$, так как в противном случае $k_t = -k_s$, а это влечет $[y_n, y_1] = Ay_1$ при $A \neq 0$, что противоречиво, поскольку $[y_n, y_1] \in L_3$ и $y_1 \in L_1$. С другой стороны, можно предполагать, что $2k_s + k_t \neq mk_s$ при $4 \leq m \leq n-2$ (в противном случае получим противоречие с максимальностью длины). В результате заключаем, что $[y_n, y_1] = 0$.

Аналогичное изучение случая $[y_i, y_{n-1}]$ при $2 \leq i \leq n-3$ позволяет доказать, что $[y_i, y_{n-1}] = 0$ при $2 \leq i \leq n-3$, $[y_n, y_{n-1}] = 0$, $[y_{n-1}, y_{n-1}] = 0$, а потому $b_1(b_1 + \alpha) = b_1 + b_1\beta + \gamma = 0$. Более того,

$$[y_1, y_{n-1}] = B[y_{n-1}, y_1], \quad [y_1, y_{n-1}] = b_1(b_1 + a_{n-1}b_1\alpha)e_2 + (*)e_3 + \dots + (*)e_n,$$
$$[y_{n-1}, y_1] = (b_1 + \alpha)e_2 + (*)e_3 + \dots + (*)e_n.$$

Последнее влечет $b_1 = 0, \gamma = 0$ и $B = \beta \neq 0$. Таким образом, $\alpha = 0$.

В итоге найдено семейство, определяемое следующим образом:

$$[y_i, y_1] = y_{i+1},\ 1 \leq i \leq n-3, \quad [y_{n-1}, y_1] = By_n,\ B \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad [y_1, y_{n-1}] = y_n.$$

Полагая $y_n' = By_n$, приходим к семейству $M^{2,\lambda}$ при $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Чтобы получить максимальную длину, достаточно рассмотреть следующую градуировку:

$$\mathscr{L} = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_n, \quad \text{где } V_i = \langle y_i \rangle,\ 1 \leq i \leq n.$$

3. $1 + a_{n-1}b_1\beta + a_{n-1}\gamma \neq 0 \wedge \det \begin{pmatrix} 1 + a_{n-1}\alpha & a_{n-1}\beta + a_{n-1} + a_{n-1}^2\gamma \\ b_1 + \alpha & 1 + b_1a_{n-1}\beta + a_{n-1}\gamma \end{pmatrix} \neq 0.$

Следуя рассуждениям из предыдущего случая, приходим к семейству максимальной длины $M^{2,\lambda}$ при $\lambda \in \mathbb{C} \setminus 0$.

Заметим, что $M^{1,0}$ и $M^{2,\lambda}$ при $\lambda \neq 0$ неизоморфны, так как $\dim(R(M^{1,0})) \neq \dim(R(M^{2,\lambda}))$. Аналогично $M^{1,0} \ncong M^{2,0}$, что можно доказать, используя замену базиса, а $M^{1,1} \ncong M^{2,\lambda}$ при $\lambda \in \mathbb{C}$, потому что $\dim(\mathscr{I}(M^{1,1})) \neq \dim(\mathscr{I}(M^{2,\lambda}))$. $\square$

Теорема 3.2. *Пусть $\mathscr{L}$ — n-мерная квази-филиформная нелиева алгебра Лейбница максимальной длины и второго типа. Тогда $\mathscr{L}$ изоморфна некоторой алгебре из семейства*

$$M^{3,\alpha}\colon\quad \begin{cases} [y_1, y_1] = y_2, & \\ [y_i, y_1] = y_{i+1}, & 3 \le i \le n-1, \\ [y_1, y_i] = -y_{i+1}, & 3 \le i \le n-1, \\ [y_3, y_3] = \alpha y_6, & \alpha = 0,\ \textit{если}\ n > 6,\ \ \alpha \in \{0, 1\},\ \textit{если}\ n = 6. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ — базис, использованный в утверждении 3.1. В этом случае $e_4 \notin R(\mathscr{L})$.

Рассмотрим два случая.

Случай 1. Пусть n четно.

В этом случае имеем алгебру $\widetilde{NG1}$ и собираемся изучить ее длину. Аналогично предыдущей теореме если $n \neq 6$, то получаем $M^{3,0}$ (которая имеет максимальную длину), а если $n = 6$, то семейство максимальной длины $M^{3,\alpha}$ при $\alpha \in \mathbb{C}$.

Случай 2. Пусть n нечетно.

Аналогично предыдущему, когда мы изучаем длину $\widetilde{NG2}$, можем доказать, что любая алгебра максимальной длины не лежит в данном семействе. $\square$

Остается доказать, что если рассмотрим расширение естественно градуированных квази-филиформных алгебр Ли, то также получим алгебры Ли (см. теорему 3.4), а изучение таких алгебр максимальной длины может быть найдено в [1]. Следующая теорема и ее следствия будут использоваться при доказательстве теоремы 3.4.

Теорема 3.3. *Пусть $\mathscr{L}$ — n-мерная алгебра Лейбница и $\{y_0, y_1, \dots, y_{n-1}\}$ — ее базис. Пусть $\{y_0, y_1, \dots, y_s\}$ — порождающие $\mathscr{L}$. Если $[y_i, y_j] = -[y_j, y_i]$ для всех $y_j \in \mathscr{L}$ и $0 \le i \le s$, то $\mathscr{L}$ является алгеброй Ли.*

Доказательство. Достаточно доказать, что оставшиеся произведения также антикоммутативны. Таким образом, надо показать, что $[y_i, y_m] = -[y_m, y_i]$, где $i, m \in \{s+1, \dots, n-1\}$. Рассмотрим два шага.

Шаг 1. Если $y_m = [y_{i_0}, y_{j_0}]$, где $i_0, j_0 \in \{0, 1, \dots, s\}$, то из тождества Лейбница и условия теоремы имеем $[y_i, y_m] = -[y_m, y_i]$ при $0 \le i \le n-1$.

Шаг 2. Если $y_m = [y_p, y_{i_0}]$ при $i_0 \in \{0, 1, \dots, s\}$ и $p \in \{s+1, \dots, n-1\}$, то из тождества Лейбница, условия теоремы и предыдущего шага имеем $[y_i, y_m] = -[y_m, y_i]$ при $0 \le i \le n-1$.

Заметим, что y_i — произвольный элемент из $\mathscr{L}$. $\square$

Для облегчения доказательства теоремы 3.4 понадобятся два следствия.

Следствие 3.1. *Пусть $\mathscr{L}$ — n-мерная алгебра Лейбница и $\mathscr{B} = \{y_0, y_1, \dots, y_{n-1}\}$ — ее базис. Пусть $\{y_0, y_1, \dots, y_s\}$ — порождающие $\mathscr{L}$. Если $\mathscr{B}$ удовлетворяет следующим условиям:*

(i) $[y_i, y_j] = -[y_j, y_i]$ *для любых* $i, j \in \{0, 1, \dots, s\}$,

(ii) $y_i = [y_{i_0}, y_{i-1}]$, $s+1 \le i \le n-1$,

(iii) $[y_i, y_{i_0}] = -[y_{i_0}, y_i]$, $1 \le i_0 \le s$, $s+1 \le i \le n-1$,

то $\mathscr{L}$ является алгеброй Ли.

Доказательство. Доказательство равенств $[y_i, y_m] = -[y_m, y_i]$ при $s+1 \le i \le n-1$ получается непосредственно из предыдущей теоремы. $\square$

Следствие 3.2. *Пусть $\mathscr{L}$ — n-мерная алгебра Лейбница и $\{y_0, y_1, \dots, y_{n-1}\}$ — ее базис. Пусть $\{y_0, y_1\}$ — порождающие $\mathscr{L}$. Если справедливы следующие условия:*

(i) $[y_i, y_j] = -[y_j, y_i]$ *для любых* $i, j \in \{0, 1\}$,

(ii) $\begin{cases} y_i = [y_0, y_{i-1}], & 2 \le i \le n-1, \\ y_{n-1} = [y_1, y_p], & 2 \le p \le n-2, \end{cases}$

(iii) $\begin{cases} [y_i, y_0] = -[y_0, y_i], & 2 \le i \le n-1, \\ [y_{n-1}, y_1] = -[y_1, y_{n-1}], \end{cases}$

то $\mathscr{L}$ является алгеброй Ли.

Доказательство. Достаточно рассмотреть нижеследующие произведения.

Проверим $[y_1, y_i] = -[y_i, y_1]$ при $2 \le i \le n-2$. Так как $2 \le i \le n-2$, можно записать $y_i = [y_0, y_{i-1}]$. Используя тождество Лейбница и условия следствия, имеем $[y_1, y_i] = -[y_i, y_1]$.

Проверим $[y_j, y_i] = -[y_i, y_j]$ при $2 \le i, j \le n-2$. Достаточно применить следствие 3.1. $\square$

Докажем, что невозможно получить нелиеву алгебру Лейбница максимальной длины из расширения естественно градуированных квази-филиформных алгебр Ли, используя естественную градуировку.

Теорема 3.4. *Любая квази-филиформная алгебра Лейбница, полученная естественным расширением градуировки с естественно градуированной квази-филиформной алгебры Ли, является алгеброй Ли.*

Доказательство. Поскольку все введенные выше алгебры квази-филиформны, выполнено $[x_0, x_i] = x_{i+1}$, где $1 \le i \le n-3$. Рассматривая естественное расширение градуировки, можно выбрать новый базис с порождающими

$$x_s = x_0 + \sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i; \quad x_t = x_1 + \sum_{j=0, j\neq 1}^{n-1} b_j x_j; \quad x_u = x_{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} c_k x_k$$

и получить следующие произведения:

$$[x_s, x_s] = (*)x_3 + \dots + (*)x_{n-1}, \quad [x_t, x_t] = (*)x_3 + \dots + (*)x_{n-1},$$
$$[x_u, x_u] = (*)x_3 + \dots + (*)x_{n-1}.$$

Более того, мы будем работать только с произведениями $[x_s, x_t]$, $[x_s, x_u]$ и $[x_t, x_u]$, так как $[x_i, x_j] = -[x_j, x_i]$ для любых $x_i, x_j \in L_1$.

В расширениях естественно градуированных квази-филиформных алгебр Ли всегда справедливо

$$[x_0, x_i] = x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \dots + (*)x_{n-1}, \quad [x_i, x_0] = -x_{i+1} + (\diamond)x_{i+2} + \dots + (\diamond)x_{n-1}.$$

Тогда если рассмотрим произведения

$$[\underbrace{[x_s, \dots, [x_s, [x_s,}_{i \text{ раз}} x_t]]] = (1 - a_1 b_0)x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \dots + x_{n-1}$$

или

$$[\underbrace{[x_s, \dots, [x_s, [x_s,}_{i\text{-раз}} x_u]]] = (c_1 - c_0 a_1)x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \dots + (*)x_{n-1},$$

или

$$[\underbrace{[x_s, \dots, [x_s,}_{(i-1)\text{-раз}} [x_u, x_t]]] = (c_0 - c_1 b_0)x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \dots + (*)x_{n-1}$$

при $2 \le i \le n-4$, то может быть построен следующий базис:

$$b_1 = \{y_0 = x_s,\ y_1 = x_t,\ y_i = [y_0, y_{i-1}],\ 2 \le i \le n-3,\ y_{n-2} = ?,\ y_{n-1} = ?\}$$

или если существуют три порождающих, то

$$b_2 = \{y_0 = x_s,\ y_1 = x_u,\ y_{n-1} = x_t,\ y_i = [y_0, y_{i-1}] \text{ при } \ 2 \le i \le n-3,\ y_{n-2} = ?\}.$$

Из определений и свойства $[x_i, x_j] = -[x_j, x_i]$ при $x_i,\ x_j \in L_1$ вытекает $[y_i, y_0] = -[y_0, y_i] = -y_{i+1}$ при $2 \le i \le n-3$. Следовательно, достаточно выбрать y_{n-2} и y_{n-1} (если y_{n-1} не является порождающим) и доказать соответствующее следствие в каждом случае.

Изучим две основные алгебры, которые позволят изучить остальные.

Алгебра $\widetilde{L}_{n-1} \oplus \mathbb{C}$. (Аналогично для $\widetilde{\mathrm{Q}}_{n-1} \oplus \mathbb{C}$.)

Если рассмотрим естественную градуировку $L_1 = \langle x_0, x_1, x_{n-1}\rangle$ и $L_i = \langle x_i\rangle$ при $2 \le i \le n-2$, то расширение L_{n-1} определяется при помощи

$$\begin{cases} [x_0, x_i] = x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \dots + (*)x_{n-2}, \\ [x_i, x_0] = -x_{i+1} + (\diamond)x_{i+2} + \dots + (\diamond)x_{n-2}, \\ [x_i, x_j] = (*)x_{i+j+1} + \dots + (*)x_{n-2}, \quad (i,j) \ne (0,j), (i,0). \end{cases}$$

Можно рассмотреть три следующих случая, используя изучение максимальной длины.

Случай 1. Пусть $1 - a_1 b_0 \ne 0$.

Выберем базис b_1 таким, что $y_{n-2} = [y_0, y_{n-3}]$, $y_{n-1} = x_u$, а его градуировка максимальной длины следующая: $V_{k_s} \oplus V_{k_t} \oplus V_{k_t+k_s} \oplus V_{k_t+2k_s} \oplus \dots \oplus V_{k_t+(n-3)k_s} \oplus V_{k_u}$.

Используя следствие 3.1 и рассуждая, как в доказательстве теоремы 3.1, можем заключить, что наша алгебра является алгеброй Ли.

Случай 2. Пусть $c_0 a_1 - c_1 \ne 0$, $1 - a_1 b_0 = 0$.

Выберем базис b_2 таким, что $y_{n-2} = [y_0, y_{n-3}]$. Чтобы доказать, что наша алгебра является алгеброй Ли, достаточно показать выполнение условий следствия 3.1. Это можно получить такими же рассуждениями, как и в предыдущем случае.

Случай 3. Пусть $c_0 - c_1 b_0 \ne 0$, $c_0 a_1 - c_1 = 1 - a_1 b_0 = 0$.

Данный случай невозможен.

Алгебра $\widetilde{\mathfrak{t}}_{(n,n-3)}$. (Аналогично для $\widetilde{\mathfrak{t}}_{(n,n-4)}$.)

Естественная градуировка $\mathfrak{t}_{(n,n-4)}$ образуется подмножествами $L_1 = \langle x_0, x_1\rangle$, $L_i = \langle x_i\rangle$ при $2 \le i \le n-4$, $L_{n-3} = \langle x_{n-3}, x_{n-1}\rangle$ и $L_{n-2} = \langle x_{n-2}\rangle$. Ее естественное расширение определяется следующими произведениями:

$$\begin{cases} [x_0, x_i] = x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \dots + (*)x_{n-1}, \quad 1 \le i \le n-5, \\ [x_0, x_{n-4}] = x_{n-3} + (*)x_{n-2}, \quad [x_0, x_{n-3}] = x_{n-2}, \\ [x_i, x_0] = -x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \dots + (*)x_{n-1}, \quad 1 \le i \le n-5, \\ [x_{n-4}, x_0] = -x_{n-3} + (*)x_{n-2}, \quad [x_{n-3}, x_0] = -x_{n-2}, \\ [x_{n-1}, x_1] = \frac{n-4}{2} x_{n-2}, \quad [x_1, x_{n-1}] = -\frac{n-4}{2} x_{n-2}, \\ [x_i, x_{n-3-i}] = (-1)^{i-1}(x_{n-3} + x_{n-1}) + (*)x_{n-2}, \quad 1 \le i \le \frac{n-4}{2}, \\ [x_{n-3-i}, x_i] = (-1)^{i}(x_{n-3} + x_{n-1}) + (*)x_{n-2}, \quad 1 \le i \le \frac{n-4}{2}, \\ [x_i, x_{n-2-i}] = (-1)^{i-1} \frac{n-2-2i}{2} x_{n-2}, \quad 1 \le i \le \frac{n-4}{2}, \\ [x_{n-2-i}, x_i] = (-1)^{i} \frac{n-2-2i}{2} x_{n-2}, \quad 1 \le i \le \frac{n-4}{2}, \\ [x_i, x_j] = (*)x_{i+j+1} + \dots + (*)x_{n-2} \quad \text{в оставшихся случаях.} \end{cases}$$

Рассмотрим базис b_1. Из независимости порождающих базиса следует, что $1 - a_1 b_0 \neq 0$.

Нам нужно выбрать y_{n-3}, y_{n-2} и y_{n-1} и проверить выполнение условий следствия 3.1. Можем рассмотреть два случая выбора этих векторов.

Случай 1. Если $1 + \frac{n-2}{2} a_1 \neq 0$, то $y_{n-2} = [y_0, y_{n-3}]$ и $y_{n-1} = [y_1, y_{n-4}]$ могут быть построены.

Случай 2. Если $1 + a_1 \frac{n-2}{2} = 0$, то $y_{n-1} = [y_1, y_{n-4}]$ и $y_{n-2} = [y_0, y_{n-1}]$ могут быть построены.

Мы можем использовать рассуждения из предыдущего случая, чтобы проверить условия следствия 3.1, показав тем самым, что наша алгебра является алгеброй Ли. $\square$

4. 4-Мерные и 5-мерные квази-филиформные алгебры Лейбница максимальной длины

Квази-филиформные алгебры Лейбница максимальной длины классифицированы при размерности $n \geq 6$. В данном параграфе получим аналогичный результат при $n = 4$ и $n = 5$. Мы следуем тому же методу, что и в общем случае.

Теорема 4.1. *Пусть $\mathscr{L}$ — 4-мерная алгебра Лейбница максимальной длины. Тогда $\mathscr{L}$ изоморфна некоторой алгебре из следующих попарно не изоморфных семейств:*

$$N^{1,\alpha}\colon \quad \begin{cases} [y_1, y_1] = y_2, \\ [y_3, y_1] = y_4, \\ [y_1, y_3] = \alpha y_4, \quad \alpha \in \mathbb{C}; \end{cases} \qquad N^2\colon \quad \begin{cases} [y_1, y_1] = y_2, \\ [y_1, y_3] = y_4. \end{cases}$$

Теорема 4.2. *Пусть $\mathscr{L}$ — 5-мерная алгебра Лейбница максимальной длины. Тогда $\mathscr{L}$ изоморфна некоторой алгебре из следующих попарно не изоморфных семейств:*

$$M^{1,0}\colon \quad \begin{cases} [y_1, y_1] = y_5, \\ [y_4, y_1] = y_2, \\ [y_2, y_1] = y_3; \end{cases} \quad M^{2,\lambda}\colon \quad \begin{cases} [y_i, y_1] = y_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq 2, \\ [y_4, y_1] = y_5, \\ [y_1, y_4] = \lambda y_5, \quad \lambda \in \mathbb{C}; \end{cases}$$

$$M^{3,0}\colon \quad \begin{cases} [y_1, y_1] = y_2, \\ [y_i, y_1] = y_{i+1}, \quad 3 \leq i \leq 4, \\ [y_1, y_i] = -y_{i+1}, \quad 3 \leq i \leq 4. \end{cases}$$

Отметим, что предыдущие теоремы завершают изучение алгебр Лейбница максимальной длины и ниль-индекса до $n - 2$ при $n \geq 4$.

Благодарности. Авторы искренне благодарны рецензенту за его полезные предложения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gómez J. R., Jiménez-Merchán A., Reyes J.* Quasi-filiform Lie algebras of maximum length // Linear Algebra Appl. 2001. V. 335. P. 119–135.
2. *Loday J.-L.* Cyclic homology. Berlin: Springer-Verl., 1992. (Grundl. Math. Wiss.; V. 301).
3. *Loday J.-L.* Une version non commutative des algébres de Lie: les algébres de Leibniz // Ens. Math. 1993. V. 39. P. 269–293.

4. *Dzhumadil'daev A. S.* Cohomologies of colour Leibniz algebras: pre-simplicial approach // Lie Theory and its Applications in Physics. III (Clausthal, 1999). River Edge, NJ: World Sci. Publ., 2000. P. 124–136.

5. *Dzhumadil'daev A. S., Davydov A. A.* Factor-complex for Leibniz cohomology // Comm. Algebra. 2001. V. 29, N 9. P. 4197–4210. (Special issue dedicated to Alexei Ivanovich Kostrikin)

6. Фейгин Б. Л., Фукс Д. Б., Когомологии групп и алгебр Ли // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления М.: ВИНИТИ, 1988. Т. 21. С. 121-209. (Итоги науки и техники).

7. *Vergne M.* Cohomologie des algèbres de Lie nilpotentes. Application'a l'étude de la varieté des algèbres de Lie nilpotentes // Bull. Soc. Math. France. 1970. V. 98. P. 81–116.

8. *Camacho L. M., Gómez J. R., Navarro R. M.* Algebra of derivations of Lie algebras // Linear Algebra Appl. 2001. V. 332–334. P. 371–380.

9. *Gómez J. R., Jiménez-Merchán A., Reyes J.* Filiform Lie algebras of maximum length // Extracta Math. 2001. V. 16, N 3. P. 405–421.

10. *Аюпов Ш. А., Омиров Б. А.* О некоторых классах нильпотентных алгебр Лейбница // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 1. С. 18–29.

11. *Cabezas J. M., Camacho L. M., Rodríguez I. M.* On filiform and 2-filiform Leibniz algebras of maximum length // J. Lie Theory. 2008. V. 18. P. 335–350.

12. *Gómez J. R., Jiménez-Merchán A.* Naturally graded quasi-filiform Lie algebras // J. Algebra. 2002. V. 256. P. 211–228.

13. *Camacho L. M., Gómez J. R., González A. J., Omirov B. A.* Naturally graded 2-filiform Leibniz algebras // Comm. Algebra. 2010. V. 38, N 10. P. 3671–3685.

14. *Camacho L. M., Gómez J. R., González A. J., Omirov B. A.* Naturally graded quasi-filiform Leibniz algebras // J. Symbolic Comput. 2009. V. 44. P. 527–539.

Статья поступила 25 ноября 2009 г., окончательный вариант — 4 марта 2011 г.

Luisa M. Camacho (Камачо Луиза),
Elisa M. Cañete (Каньете Элиза),
José R. Gómez (Гомес Хосе)
Dpto. Matemática Aplicada I. Universidad de Sevilla,
Avda. Reina Mercedes, s/n. 41012 Sevilla (Spain)
`lcamacho@us.es, elisacamol@us.es, jrgomez@us.es`

Омиров Бахром
Институт математики и информационных технологий АН Узбекистана,
ул. Ф. Ходжаева, 29, Ташкент 100125, Узбекистан
`omirovb@mail.ru`