Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2011. Том 52, № 5

УДК 512.623.4

СЕПАРАНТЫ НЕКОТОРЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

Ю. Л. Ершов

Аннотация. Явно выписаны сепаранты многочленов, рассмотренных в предыдущей работе автора [1]. Это позволило уточнить заключение основной теоремы работы [1].

Ключевые слова: гензелево нормированное поле, сепаранта многочлена.

Все необходимые определения, связанные с нормированными полями, можно найти в [2, гл. 1].

Пусть $\mathbb{F} = \langle F, R\rangle$ — нормированное поле, $v_R : F \to \Gamma_R \cup \{\omega\}$ — соответствующее нормирование, F_R — поле вычетов нормирования v_R и Γ_R — группа нормирования v_R. Пусть $\widetilde{F}$ — алгебраическое замыкание поля F и $\widetilde{R}$ — кольцо нормирования поля $\widetilde{F}$ такое, что $\widetilde{R} \cap F = R$ (т. е. $\widetilde{\mathbb{F}} = \langle \widetilde{F}, \widetilde{R}\rangle \geq \mathbb{F}$). Тогда $F_R \leq F_{\widetilde{R}}$, $\Gamma_R \leq \Gamma_{\widetilde{R}}$ и соответствующее нормирование $v_{\widetilde{R}} : \widetilde{F} \to \Gamma_{\widetilde{R}} \cup \{\omega\}$ продолжает v_R ($v_{\widetilde{R}} \upharpoonright F = v_R$). Предположим для дальнейшего, что $\mathbb{F}$ и $\widetilde{\mathbb{F}}$ фиксированы, а через v будем обозначать любое из нормирований v_R или $v_{\widetilde{R}}$. Степень многочлена $f \in F[x]$ будем обозначать через δf.

Приведем, следуя [3, 4], определения некоторых констант, связанных с многочленом над нормированным полем.

Пусть $f \in F[x]$ — унитарный многочлен над F, $\alpha \in \widetilde{F}$ — корень многочлена f. Полагаем

$$\varkappa_{f,\alpha} \rightleftharpoons \begin{cases} \omega, \quad \text{если } f'(\alpha) = 0 \ (f' - \text{производная многочлена } f); \\ \max\{v(\alpha - \alpha') \mid \alpha' \in \widetilde{F},\ f(\alpha') = 0,\ \alpha' \neq \alpha\}, \quad \text{если } f'(\alpha) \neq 0, \end{cases}$$

$$\varkappa_f \rightleftharpoons \max\{\varkappa_{f,\alpha} \mid \alpha \in \widetilde{F} :\ f(\alpha) = 0\}$$

(константу $\varkappa_f$ называют *константой Краснера*);

$$\sigma_{f,\alpha} \rightleftharpoons \varkappa_{f,\alpha} + vf'(\alpha), \quad \sigma_f \rightleftharpoons \max\{\sigma_{f,\alpha} \mid \alpha \in \widetilde{F} : f(\alpha) = 0\}$$

(константа σ_f введена в работе Бринка [5] и названа там *сепарантом* f);

$$\Delta_f \rightleftharpoons \max\{vf'(\alpha) \mid \alpha \in \widetilde{F},\ f(\alpha) = 0\}; \quad \varepsilon_f \rightleftharpoons \varkappa_f + \Delta_f.$$

Замечание. Если $\mathbb{F}$ — гензелево нормированное поле, а $f \in F[x]$ неприводим над F, то $\sigma_f = \sigma_{f,\alpha}$ для любого корня многочлена f, в частности, $\sigma_f = \varepsilon_f$.

Это легко следует из того, что в случае гензелевости поля $\mathbb{F}$ элементы из $\widetilde{F}$, сопряженные над F, имеют одинаковую норму.

Справедлива (см. [4]) следующая

Теорема 1. *Пусть $\mathbb{F}$ — гензелево нормированное поле, $f \in F[x]$ — унитарный многочлен без кратных корней. Если $a \in \widetilde{F}$ такой, что $vf(a) > \sigma_f$, то существует корень $\alpha \in \widetilde{F}$ многочлена f такой, что $v(a - \alpha) = vf(a) - vf'(\alpha) > \sigma_f - vf'(\alpha) = \varkappa_f$ (и тогда по лемме Краснера $\alpha \in F(a)$).*

Сложность применения этой теоремы состоит в том, что неясно, как вычислять сепарант σ_f многочлена f.

В настоящей статье указан случай, когда можно вычислять сепарант явно. В качестве следствия получим новое доказательство теоремы из работы автора [1].

Пусть $\mathbb{F}$ — нормированное поле, нормирование $v = v_R$ может быть расширено до нормирования $v_x : F(x) \to \Gamma_R \cup \{\omega\}$ поля рациональных функций $F(x)$ от одной переменной x так, что $v_x(h) = \min\{v(a_i) \mid i \leq n\}$ для многочлена

$$h = \sum_{i \leq h} a_i x^i \in F[x]$$

(нормирование $v_x : F(x) \to \Gamma_R \cup \{\omega\}$ называется *гауссовым расширением* нормирования v).

Пусть $g \in R[x]$ — унитарный многочлен такой, что его образ $\bar{g}$ в $F_R[x]$ является неприводимым сепарабельным многочленом. Пусть $e > 1$ — натуральное число, не делящееся на характеристику поля вычетов. Пусть $A_i \in R[x]$ — многочлены, для которых $\delta A_i < \delta g$, $i < e$, и пусть $f \rightleftharpoons g^e + \sum\limits_{i<e} A_i g^i$.

Предположим, что выполнено следующее условие:

$$v_x A_0 > 0, \quad e v_x A_i > (e - i) v_x(A_0),$$

т. е. $v_x A_i > \frac{e-i}{e} v_x A_0$ для $0 < i < e$.

Основным результатом настоящей статьи является вычисление сепаранта многочлена f при выполнении сформулированных выше условий и условия неприводимости f.

Теорема 2. *Если f неприводим, то его сепарант σ_f равен $v_x A_0$.*

Степень n многочлена f равна $e \cdot \delta g$. Пусть $\theta_0, \dots, \theta_{e-1}, \theta_e, \dots, \theta_{n-1}$ — все корни многочлена f (в алгебраическом замыкании $\widetilde{F}$ поля F), занумерованные так, что $\bar{\theta}_0 = \bar{\theta}_1 = \dots = \bar{\theta}_{e-1}$ и $\bar{\theta}_0 \neq \bar{\theta}_i$ для $i \geq e$. Пусть $\alpha_0 \rightleftharpoons \bar{\theta}_0, \dots, \alpha_{\delta g-1} \in \widetilde{F}_R$ — последовательность всех корней многочлена $\bar{g}$; полагаем $\lambda \rightleftharpoons v_x A_0$.

Лемма 1. $vf'(\theta_0) = \frac{e-1}{e}\lambda$.

Доказательство. Имеем

$$f' = e g' g^{e-1} + \sum_{i<e} (i A_i g' g^{i-1} + A_i' g^i).$$

По замечанию 1 в [2] $\lambda = v_x A_0 = v A_0(\theta_0)$, и тогда по лемме 1 из [2] $vg(\theta_0) = \frac{1}{e}\lambda$. Следовательно, $v(e g' g^{e-1}) = \frac{e-1}{e}\lambda$, поскольку $\overline{g'(\theta_0)} = \bar{g}'(\alpha_0) \neq 0$ и $vg'(\theta_0) = 0$.

Далее,

$$v(i A_i g' g^{i-1}) = v(i) + v(A_i) + (i-1) vg > \frac{e-i}{e}\lambda + \frac{i-1}{e}\lambda = \frac{e-1}{e}\lambda,$$

$$v(A_i' g^i) > \frac{e-i}{e}\lambda + \frac{i}{e}\lambda = \lambda > \frac{e-1}{e}\lambda$$

(здесь мы воспользовались полезным замечанием, что $v_x h' \geq v_x h$ для любого многочлена $h \in F[x]$). Отсюда получаем, что

$$vf' = v\Big(eg'g^{e-1} + \sum_{i<e}(iA_i g' g^{i-1} + A_i' g^i)\Big) = v(eg'g^{e-1}) = \frac{e-1}{e}\lambda. \quad \square$$

Лемма 2. *$v(\theta_0 - \theta_i) = \frac{1}{e}\lambda$ для $0 < i < e$, $v(\theta_0 - \theta_i) = 0$ для $e \leq i$.*

Доказательство. Пусть $0 < i < e$. Рассмотрим разность $g(\theta_0) - g(\theta_i)$. Пусть

$$g(x) = x^n + \sum_{i<n} a_i x^i,$$

тогда

$$g(x) - g(y) = x^n - y^n + \sum_{0<i<m} a_i(x^i - y^i) = (x-y)h(x,y)$$

для подходящего многочлена $h \in R[x,y]$. Нетрудно проверить, что $h(x,x) = f'(x)$. Тогда $\overline{h(\theta_0,\theta_i)} = \bar{g}'(\bar{\theta}_0) = \bar{g}'(\alpha_0)$, так как $\bar{\theta}_0 = \bar{\theta}_i = \alpha_0$; $\bar{g}'(\alpha_0) \neq 0$, так как $\bar{\theta}_0 = \bar{\theta}_i = \alpha_0$; $\bar{g}'(\alpha_0) \neq 0$, так как $\bar{g}$ сепарабелен; следовательно, $vh(\theta_0,\theta_i) = 0$ и $v(g(\theta_0) - g(\theta_i) = v(\theta_0 - \theta_i)$. Поскольку $vg(\theta_0) = v(\theta_i) = \frac{1}{e}\lambda$, то $v(\theta_0 - \theta_i) \geq \frac{1}{e}\lambda$. Имеем

$$f'(\theta_0) = \prod_{0<i<e}(\theta_0 - \theta_i) \cdot \prod_{i \geq e}(\theta_0 - \theta_i);$$

$v(\theta_0 - \theta_i) = 0$ для $i > e$, так как $\bar{\theta}_0 \neq \bar{\theta}_i$ и $\overline{\theta_0 - \theta_i} \neq 0$. Тогда

$$vf'(\theta_0) = \sum_{0<i<e} v(\theta_0 - \theta_i) \geq \frac{e-1}{e}\lambda,$$

и если $v(\theta_0 - \theta_i) > \frac{1}{e}\lambda$ хотя бы для одного i, $0 < i < e$, то $vf'(\theta_0) > \frac{e-1}{e}\lambda$. Но по лемме 1 $vf'(\theta_0) = \frac{e-1}{e}\lambda$, следовательно, $v(\theta_0 - \theta_i) = \frac{1}{e}\lambda$ для всех $0 < i < e$. Как уже было отмечено, $v(\theta_0 - \theta_i) = 0$ для $i \geq e$. Лемма доказана. $\square$

Из леммы 2 сразу следует, что $\varkappa_{f,\theta_0} = \frac{1}{e}\lambda$. Из леммы 1 теперь вытекает, что

$$\sigma_{f,\theta_0} = vf'(\theta_0) + \varkappa_{f,\theta_0} = \frac{e-1}{e}\lambda + \frac{1}{e}\lambda = \lambda.$$

Как отмечено выше, для гензелева нормированного поля $\mathbb{F}$ и неприводимого многочлена $f \in R[x]$ имеем $\sigma_f = \sigma_{f,\theta_0}$ для любого корня θ_0 многочлена f. Теорема доказана.

Покажем теперь, что уточненная теорема (к сожалению, в формулировке этой теоремы пропущено условие $v_{k'}g(\alpha) > 0$) из работы [1] является следствием только что доказанной теоремы.

Пусть $g \in R[x]$ — унитарный многочлен такой, что $\bar{g} \in F_R[x]$ неприводим и сепарабелен над F_R. Пусть $f \in R[x]$ — унитарный многочлен такой, что его g-разложение

$$f = \sum_{i \leq k} A_i g^i, \quad A_i \in R[x],\ \delta A_i < \delta g,$$

удовлетворяет следующему условию:

существует натуральное e ($0 < e \leq k$) такое, что $v_x A_e = 0$, $v_x A_0 > 0$ и $v_x A_i > \frac{e-i}{e} v_x A_0$ для $0 < i < e$.

Из этого условия следует, что $\bar{g}^e \mid \bar{f}$, но $\overline{g^{e+1}} \nmid \bar{f}$. Если $\mathbb{F}$ — гензелево нормированное поле, то f имеет разложение $f = f_0 f_1$ такое, что f_0, f_1 унитарны $\bar{f_0} = \bar{g}^e$, $\bar{g} \nmid \bar{f_1}$ и $\delta f_0 = e\delta g$. Пусть

$$f_0 = g^e + \sum_{i<e} B_i g^i$$

— g-разложение f_0.

Предложение 1. *Имеют место следующие соотношения:*

$$v_x B_0 = v_x A_0, \quad v_x B_i > \frac{e-i}{e} v_x B_0 \text{ для } 0 < i < e.$$

Действительно, пусть $f_1 = \sum\limits_{j \le m} C_j g^j$ — g-разложение многочлена f_1. Так как $\bar{g} \nmid \bar{f_1}$, то $\bar{C_0} \neq 0$ и $v_x C_0 = 0$. Имеем $A_0 = B_0 C_0$; следовательно, $v_x A_0 = v_x B_0 + v_x C_0 = v_x B_0$. Далее будем использовать индукцию по $0 < i_0 \le e$. Предположим, что для всех $0 < i < i_0$ выполнено $v_x B_i > \frac{e-i}{e} v_x B_0$. Имеем

$$A_{i_0} = B_{i_0} C_0 + \sum_{i<i_0} B_i C_{i_0-i}, \quad B_{i_0} C_0 = A_{i_0} - \sum_{i<i_0} B_i C_{i_0-i},$$

$$v_x(B_{i_0}) = v_x(B_{i_0} C_0) = v_x\Big(A_{i_0} - \sum_{i<i_0} B_i C_{i_0-i}\Big),$$

$$v_x A_{i_0} > \frac{e-i_0}{e} v_x A_0 = \frac{e-i_0}{e} v_x B_0, \quad v_x(B_i C_{i_0-i}) \ge v_x(B_i) > \frac{e-i}{e} v_x B_0$$

(по индукционному предположению и $v_x(C_{i_0-i}) \ge 0$). Тогда

$$v_x(B_i C_{i_0-i}) > \frac{e-i}{e} v_x B_0 > \frac{e-i_0}{e} v_x(B_0)$$

и, следовательно,

$$v_x B_{i_0} \ge \sup\{v_x A_{i_0},\ v_x(B_i C_{i_0-i})\} > \frac{e-i_0}{e} v_x(B_0). \quad \square$$

Следствие 1. *Если e не делится на характеристику поля F_R и многочлен f_0 неприводим над F, то сепарант σ многочлена f_0 равен $v_x B_0 = v_x A$.*

Следствие 2. *В условиях следствия* 1 *если в гензелевом расширении $\mathbb{F}' \ge \mathbb{F}$ существует элемент α такой, что $v_{R'} g(\alpha) > 0$, $v_{R'} f(\alpha) > v_x A_0$, то многочлен f_0 имеет в F' корень α_0 такой, что*

$$v_{R'}(\alpha - \alpha_0) = v_R f(\alpha) - v_{R'} f_0'(\alpha) \quad (> \varkappa_{f_0} = \frac{1}{e} v_x A_0).$$

Действительно, из условий $v_{R'} g'(\alpha) > 0$, $\bar{g} \nmid \bar{f}$, следует, что $\overline{f_0(\alpha)} \neq 0$, тогда $v_{R'} f'(\alpha) = 0$ и

$$v_{R'} f_0(\alpha) = v_{R'} f_0(\alpha) = v_R f(\alpha) > v_{R'}(A_0) = \sigma_{f_0}$$

по теореме 2. $\square$

Замечание. Если $v_x A_0$ удовлетворяет условиям (+) из работы [1], то многочлен f_0 неприводим [1, следствие 3].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ершов Ю. Л.* Об одной статье Р. Брауна // Сиб. мат. журн. 2011. Т. 101, № 2. С. 292–296.
2. *Ершов Ю. Л.* Кратно нормированные поля. Новосибирск: Науч. кн., 2000.
3. *Ершов Ю. Л.* Расширения Любина — Тейта (элементарный подход) // Изв. РАН. Сер. мат. 2007. Т. 71, № 6. С. 3–26.
4. *Ершов Ю. Л.* Теоремы о непрерывности корней многочленов в нормированных полях // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 6. С. 1258–1264.
5. *Brink D.* New light on Hensel's lemma // Expos. Math. 2006. V. 24, N 4. P. 292–306.

Статья поступила 23 июня 2011 г.

Ершов Юрий Леонидович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
ershov@math.nsc.ru