Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2011. Том 52, № 5

УДК 517.987+519.214

КОНСТАНТЫ ОЦЕНОК СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ В ЭРГОДИЧЕСКОЙ ТЕОРЕМЕ ФОН НЕЙМАНА С НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ

Н. А. Джулай, А. Г. Качуровский

Аннотация. Оценки скорости сходимости в эргодических теоремах с необходимостью являются спектральными. Получены константы, связывающие (эквивалентные друг другу) степенную скорость сходимости в эргодической теореме фон Неймана с непрерывным временем и степенную особенность в нуле спектральной меры усредняемой функции относительно соответствующей динамической системы. Эта же скорость сходимости оценена также по скорости убывания корреляционной функции. Все результаты имеют очевидные точные аналоги для стационарных в широком смысле стохастических процессов.

Ключевые слова: эргодическая теорема фон Неймана, скорость сходимости эргодических средних, спектральная мера, корреляционные функции, стационарный в широком смысле стохастический процесс.

Пусть $(\Omega, \mathfrak{F}, \lambda)$ — пространство с вероятностной мерой, $\{T^t,\ t \in \mathbb{R}^+\}$ — полупоток на нем, т. е. такая однопараметрическая полугруппа эндоморфизмов T^t пространства Ω, что для любой измеримой функции $f(\omega)$ на Ω функция $f(T^t\omega)$ измерима на прямом произведении $\Omega \times \mathbb{R}^+$. Напомним, что *эндоморфизмом пространства* Ω называется отображение $T : \Omega \to \Omega$ такое, что для всех $A \in \mathfrak{F}$ множество $T^{-1}A$ принадлежит $\mathfrak{F}$ и $\lambda(A) = \lambda(T^{-1}A)$. *Автоморфизмом пространства* Ω называют его п. в. взаимно однозначный эндоморфизм.

Для $f \in L_1(\Omega)$, $\omega \in \Omega$ обозначим

$$A_t f(\omega) = \frac{1}{t} \int\limits_0^t f(T^\tau \omega)\, d\tau.$$

Индивидуальная эргодическая теорема Биркгофа утверждает существование п. в. предела $f^* = \lim\limits_{t\to\infty} A_t f$ и равенство $\int f\, d\lambda = \int f^*\, d\lambda$.

Через $\{U^t,\ t \in \mathbb{R}^+\}$ обозначим однопараметрическую полугруппу изометрических операторов, действующих в гильбертовом пространстве $L_2(\Omega)$ по формуле $U^t f = f \circ T^t$. Статистическая эргодическая теорема фон Неймана утверждает существование предела в $L_2(\Omega)$:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int\limits_0^t U^\tau f\, d\tau = \lim_{t\to\infty} A_t f,$$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ–8508.2010.1).

© 2011 Джулай Н. А., Качуровский А. Г.

равного f^*, причем f^* оказывается ортогональной проекцией f на подпространство неподвижных векторов полугруппы $\{U^t\}$.

Определим теперь корреляционную функцию $b_t f$ и спектральную меру σ_f вектора f относительно нашей динамической системы. В случае, когда $\{T^t,\ t \in \mathbb{R}\}$ — поток, т. е. однопараметрическая группа автоморфизмов, полагают $b_t f = (U^t f, f)$ для всех $t \in \mathbb{R}$. В силу унитарности операторов U^t для этого случая при этом всегда $b_t f = \overline{b_{-t} f}$. В общем для нас случае полупотока T^t, когда T^t — однопараметрическая полугруппа эндоморфизмов, операторы U^t при $t < 0$ могут быть не определены. Полагаем в этом случае $b_t f = (U^t f, f)$ при $t \geq 0$ и $b_t f = \overline{b_{-t} f}$ при $t < 0$. Как известно (см., например, [1, гл. 1, § 7]), в обоих случаях корректно определена (единственная) спектральная мера σ_f, т. е. такая конечная борелевская мера на прямой, что $b_t f = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\, d\sigma_f(x)$ для всех $t \in \mathbb{R}$.

Спектральная теория динамических систем изучает свойства динамических систем, которые можно выразить через свойства мер σ_f [1, гл. 1, § 7]. В этом смысле оценки скорости сходимости в эргодических теоремах с необходимостью являются спектральными. Как показывают теорема 3 в [2] (случай дискретного времени) и теорема 1 в [3] (случай времени непрерывного), степенная скорость сходимости в эргодической теореме фон Неймана эквивалентна наличию степенной, с тем же показателем степени, особенности в нуле спектральной меры усредняемой функции относительно соответствующей динамической системы. В [2, 3] обсуждался вопрос об асимптотике этих двух эквивалентных друг другу свойств, в терминах «O» и «o», без выписывания связывающих их конкретных констант. Изучение в случае дискретного времени этих и некоторых других аналогичных констант (констант оценок этой же скорости сходимости по скорости убывания корреляционных коэффициентов) было начато в [4]. В настоящей работе все эти константы выписываются для эргодической теоремы фон Неймана с непрерывным временем. Все получаемые оценки можно рассматривать как уточнения соответствующих им результатов из [3]: асимптотические соотношения заменяются неравенствами с конкретными константами.

Всюду далее $f \in L_2(\Omega)$. Заметим, что в этом случае $f - f^* \in L_2^0(\Omega)$, т. е. $f - f^* \in L_2(\Omega)$, и $\int (f - f^*)\, d\lambda = 0$. Очевидно, эргодические средние $A_t f$ и $A_t(f - f^*) = A_t f - f^*$ имеют одинаковые скорости сходимости при $t \to \infty$ (первое — к f^*, второе — к тождественному нулю). Поскольку $\mathbf{D}A_t(f - f^*) = \|A_t(f - f^*)\|_2^2 = \|A_t f - f^*\|_2^2$ как раз и измеряет L_2-норму отклонения $A_t(f - f^*)$ от предела (т. е. нуля), поведение нормы этого отклонения совпадает с рассматриваемым в [2] (для случая дискретного времени) поведением дисперсии эргодических средних. Как и в [2], это поведение полностью определяется (теорема 1 ниже) особенностью спектральной меры σ_{f-f^*} в нуле или скоростью убывания корреляционной функции $b_t(f - f^*)$ (теорема 2). Переход же от σ_f к σ_{f-f^*} осуществляется простым отбрасыванием сосредоточенной в точке 0 меры $\sigma_f(0) = \|f^*\|_2^2$ (поскольку f^* есть ортогональная проекция f на подпространство собственных векторов полугруппы $\{U^t\}$, отвечающих собственному значению 1).

Положим

$$F_t(x) = \left(\frac{\sin \frac{tx}{2}}{\frac{tx}{2}} \right)^2.$$

Как известно, для каждой $g \in L_2^0$ дисперсия $\mathbf{D}A_t g = \|A_t g\|_2^2$ может быть точно подсчитана через интеграл от $F_t(x)$ по спектральной мере σ_g или выражена через корреляционную функцию $b_t g$. Основные результаты этой работы получаются анализом асимптотик следующих формул, использовавшихся еще фон Нейманом в [5] (вывод этих формул можно найти также в [6, теорема 18.3.1]):

$$\|A_t g\|_2^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_t(x)\, d\sigma_g(x), \tag{1}$$

$$\|A_t g\|_2^2 = \frac{1}{t^2}\int\limits_{-t}^{t} (t - |\tau|) b_\tau g\, d\tau. \tag{2}$$

Заметим, что основная масса ядра $F_t(x)$ сосредоточена в малой окрестности точки 0, и чем больше t, тем более узкими можно выбирать такие окрестности. Этим и объясняется то, что асимптотика скорости сходимости определяется особенностью спектральной меры в нуле.

Доказательства лемм 1 и 2 ниже получаются как уточнения с перенесением с дискретного времени на непрерывное доказательств теоремы 3 в [2], леммы 1 и теоремы 1 в [4].

Лемма 1. *Обозначим* $S_k(t) = \sigma_{f-f^*}\big(\frac{-2\pi k}{t}, \frac{2\pi k}{t}\big]$. *Тогда для всех* $t > 0$

$$\|A_t f - f^*\|_2^2 \le \frac{\pi^2 - 1}{\pi^2} S_1(t) + \frac{1}{2\pi^2} S_2(t) + \frac{2}{\pi^2}\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)(k-2)} S_k(t).$$

Доказательство. Воспользуемся представлением (1) и очевидными неравенствами $F_t(x) \le \frac{4}{(tx)^2}$ и $F_t(x) \le 1$ для всех $x \ne 0$:

$$\|A_t f - f^*\|_2^2 = \|A_t(f - f^*)\|_2^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_t(x)\, d\sigma_{f-f^*}(x) = \int\limits_{\left(\frac{-2\pi}{t}, \frac{2\pi}{t}\right]} F_t(x)\, d\sigma_{f-f^*}(x)$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{\left(-\frac{2\pi(k+1)}{t}, -\frac{2\pi k}{t}\right] \cup \left(\frac{2\pi k}{t}, \frac{2\pi(k+1)}{t}\right]} F_t(x)\, d\sigma_{f-f^*}(x) \le \sigma_{f-f^*}\left(\frac{-2\pi}{t}, \frac{2\pi}{t}\right]$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\pi k)^2}\left(\sigma_{f-f^*}\left(\frac{-2\pi(k+1)}{t}, \frac{-2\pi k}{t}\right] + \sigma_{f-f^*}\left(\frac{2\pi k}{t}, \frac{2\pi(k+1)}{t}\right]\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\pi k)^2}(S_{k+1}(t) - S_k(t)) + S_1(t) \le \frac{1}{\pi^2}\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)}(S_{k+1}(t) - S_k(t))$$

$$+ \frac{1}{\pi^2} S_2(t) + \frac{\pi^2 - 1}{\pi^2} S_1(t) = \frac{\pi^2 - 1}{\pi^2} S_1(t) + \frac{1}{2\pi^2} S_2(t) + \frac{2}{\pi^2}\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)(k-2)} S_k(t).$$

Лемма 1 доказана. $\square$

Лемма 2. *Для всех* $t > 0$ *верно неравенство* $\sigma_{f-f^*}\big(-\frac{\pi}{t}, \frac{\pi}{t}\big] \le \frac{\pi^2}{4}\|A_t f - f^*\|_2^2$.

Доказательство. Воспользуемся представлением (1):

$$\|A_t f - f^*\|_2^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_t(x)\, d\sigma_{f-f^*}(x) \geq \int\limits_{\left(-\frac{\pi}{t}, \frac{\pi}{t}\right]} F_t(x)\, d\sigma_{f-f^*}(x)$$

$$\geq \min_{|x|\leq \frac{\pi}{t}} \left(\frac{\sin \frac{tx}{2}}{\frac{tx}{2}}\right)^2 \sigma_{f-f^*}\left(-\frac{\pi}{t}, \frac{\pi}{t}\right] = \min_{|y|\leq \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin y}{y}\right)^2 \sigma_{f-f^*}\left(-\frac{\pi}{t}, \frac{\pi}{t}\right]$$

$$= \left(\frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}}\right)^2 \sigma_{f-f^*}\left(-\frac{\pi}{t}, \frac{\pi}{t}\right] = \frac{4}{\pi^2}\sigma_{f-f^*}\left(-\frac{\pi}{t}, \frac{\pi}{t}\right].$$

Лемма 2 доказана. □

Замечание 1. Как следует из лемм 1 и 2, в обозначениях леммы 1 для всех $t > 0$

$$\frac{4}{\pi^2} S_{\frac{1}{2}}(t) \leq \|A_t f - f^*\|_2^2 \leq \frac{\pi^2 - 1}{\pi^2} S_1(t) + \frac{1}{2\pi^2} S_2(t) + \frac{2}{\pi^2} \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)(k-2)} S_k(t).$$

Похожие неравенства, в другой форме и с другими константами, использовались ранее в работах В. Ф. Гапошкина (см., например, замечание 2 после теоремы 1 в [7]).

Следующая теорема дает константы, связывающие (эквивалентные друг другу) степенную сходимость в эргодической теореме фон Неймана и степенную же особенность в нуле спектральной меры усредняемой функции относительно соответствующей динамической системы, т. е. уточняет асимптотические теорему 3 из [2] и теорему 1 из [3], перенося результаты теоремы 1 из [4] на непрерывное время.

Теорема 1. *Пусть $\alpha \in [0, 2)$. Тогда*

1. *Если спектральная мера σ_{f-f^*} имеет степенную особенность в нуле, т. е. если для некоторой положительной константы A для всех $\delta > 0$ выполняется неравенство*

$$\sigma_{f-f^*}(-\delta, \delta] \leq A\delta^\alpha,$$

то скорость сходимости эргодических средних $A_t f$ степенная с тем же показателем степени, т. е. для всех $t > 0$

$$\|A_t f - f^*\|_2^2 \leq B t^{-\alpha},$$

где $B = A(2\pi)^\alpha\bigl(1 + \frac{2^{\alpha-2} - 1 + 2C}{\pi^2}\bigr)$, $C = \begin{cases} \frac{3^{\alpha-1}}{2} + \frac{1}{2-\alpha}, & \alpha \in [0, 1); \\ 3^{\alpha-1} + \frac{\alpha-1}{2-\alpha} 2^{\alpha-2}, & \alpha \in [1, 2). \end{cases}$

2. *Если скорость сходимости эргодических средних $A_t f$ степенная, т. е. если для некоторой положительной константы B при всех $t > 0$ выполняется неравенство*

$$\|A_t f - f^*\|_2^2 \leq B t^{-\alpha},$$

то спектральная мера σ_{f-f^*} имеет степенную особенность в нуле (с тем же показателем степени), т. е. для всех $\delta > 0$

$$\sigma_{f-f^*}(-\delta, \delta] \leq A\delta^\alpha, \quad \text{где } A = \frac{\pi^{2-\alpha}}{4} B.$$

Доказательство. Так как по условию первой части теоремы $S_k(t) \le A\frac{2^\alpha \pi^\alpha}{t^\alpha}k^\alpha$, подставляя это в неравенство леммы 1, приходим к следующему неравенству:

$$\|A_t f - f^*\|_2^2 \le \frac{A\pi^{\alpha-2}2^\alpha}{t^\alpha}\left(\pi^2 - 1 + 2^{\alpha-2} + 2\sum_{k=3}^{\infty}\frac{k^\alpha}{k(k-1)(k-2)}\right).$$

Остается оценить его правую часть. Сначала рассмотрим случай $\alpha \in [0,1)$:

$$\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{k^{1-\alpha}(k-1)(k-2)} < \frac{3^{\alpha-1}}{2} + \sum_{k=4}^{\infty}\frac{1}{(k-2)^{3-\alpha}} < \frac{3^{\alpha-1}}{2} + \int_4^\infty \frac{1}{(x-3)^{3-\alpha}}\,dx = \frac{3^{\alpha-1}}{2} + \frac{1}{2-\alpha}.$$

При $\alpha = 1$, очевидно,

$$\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{(k-1)(k-2)} = \sum_{k=3}^{\infty}\left(\frac{1}{k-2} - \frac{1}{k-1}\right) = 1.$$

Наконец, при $\alpha \in (1,2)$

$$\sum_{k=3}^{\infty}\frac{k^{\alpha-1}}{(k-1)(k-2)} = \sum_{k=3}^{\infty}k^{\alpha-1}\left(\frac{1}{k-2} - \frac{1}{k-1}\right) = 3^{\alpha-1} + \sum_{k=3}^{\infty}\frac{(k+2)^{\alpha-1} - (k+1)^{\alpha-1}}{k} < 3^{\alpha-1} + \sum_{k=3}^{\infty}(\alpha-1)k^{\alpha-3} < 3^{\alpha-1} + (\alpha-1)\int_2^\infty x^{\alpha-3}\,dx = 3^{\alpha-1} + \frac{\alpha-1}{2-\alpha}2^{\alpha-2}.$$

При доказательстве использовано неравенство

$$(k+2)^{\alpha-1} - (k+1)^{\alpha-1} < (\alpha-1)k^{\alpha-2}.$$

Оно очевидно, так как функция $x^{\alpha-1}$ возрастает и вогнута при $\alpha \in (1,2)$, поэтому тангенс угла наклона касательной к графику этой функции в точке $k+1$ больше тангенса угла наклона отрезка, соединяющего точки $(k+1,(k+1)^{\alpha-1})$ и $(k+2,(k+2)^{\alpha-1})$ этого графика, и

$$(k+2)^{\alpha-1} - (k+1)^{\alpha-1} < (\alpha-1)(k+1)^{\alpha-2} < (\alpha-1)k^{\alpha-2}.$$

Теперь докажем вторую часть теоремы. Используя лемму 2 и учитывая степенную скорость убывания эргодических средних, получаем $\sigma_{f-f^*}(-\delta,\delta] \le \frac{\pi^2}{4}B\left(\frac{\pi}{\delta}\right)^{-\alpha}$, что и завершает доказательство теоремы 1. $\square$

Для исчерпывающего решения рассматриваемого в теореме 1 вопроса об эквивалентности степенной скорости сходимости и степенной особенности в нуле спектральной меры остается разобрать случай $\alpha \ge 2$.

Замечание 2. При $\alpha = 2$ утверждение теоремы 1 не имеет места: условие $\sigma_{f-f^*}[-\delta,\delta] = O(\delta^2)$ при $\delta \to 0$ не является, вообще говоря, достаточным для выполнения соотношения $\|A_t f - f^*\|_2^2 = O(t^{-2})$ при $t \to \infty$.

Доказательство. Как следует, например, из п. 2° приложения 2 в [1], для потока со счетно-кратным лебеговским спектром можно подобрать такую функцию $f \in L_2(\Omega)$, что $\sigma_{f-f^*}(-\delta,\delta] = \int_{-\delta}^{\delta} g(x)\,dx$, где $g(x) = \begin{cases} |x|, & |x| \le 1, \\ \frac{1}{|x|^2}, & |x| > 1. \end{cases}$ В этом случае, очевидно, $\sigma_{f-f^*}[-\delta,\delta] = O(\delta^2)$, однако интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} x^{-2}\sigma_{f-f^*}(x)$ расходится. Как вытекает из замечания 2 в [3], условие $\|A_t f - f^*\|_2^2 = O(t^{-2})$ не выполнено.

Замечание 3. В обозначениях теоремы 1 скорости сходимости в эргодической теореме фон Неймана с $\alpha > 2$ при $f - f^* \not\equiv 0$ не бывает.

Доказательство. Аналог этого утверждения для дискретного времени есть в [8, следствие 5]. Наше доказательство проводится согласно [8] и идет по следующей схеме. Для $T > 0$ положим

$$C_T(\sigma_{f-f^*}) = 2^T \int\limits_{|x|<\frac{\pi}{2^T}} d\sigma_{f-f^*}(x) + 2^{-T} \int\limits_{|x|\ge\frac{\pi}{2^T}} \frac{1}{x^2}\,d\sigma_{f-f^*}(x).$$

Тогда, как мы это докажем ниже, для некоторого не зависящего от T натурального k

$$\max_{t\in(2^T,2^{T+1}]} \|A_t f - f^*\|_2^2 \ge 2^{-T-k} C_T(\sigma_{f-f^*}). \tag{3}$$

Из этого неравенства, в свою очередь, выведем, что при $f - f^* \not\equiv 0$

$$\varlimsup_{t\to\infty} t^2 \|A_t f - f^*\|_2^2 \ge \varlimsup_{T\to\infty} 2^{2T} \max_{t\in(2^T,2^{T+1}]} \|A_t f - f^*\|_2^2 > 0. \tag{4}$$

Этого, очевидно, не может быть при скорости сходимости с $\alpha > 2$.

Выведем сначала (4) из (3). Из того, что $f - f^* \not\equiv 0$, следует существование $0 < a < b$ (либо $a < b < 0$) таких, что $\sigma_{f-f^*}(a,b] > 0$. Для всех $T > \log_2\left(\frac{\pi}{|a|}\right)$ из (3) имеем

$$2^{2T} \max_{t\in(2^T,2^{T+1}]} \|A_t f - f^*\|_2^2 \ge 2^{T-k} C_T(\sigma_{f-f^*}) \ge 2^{-k} \int\limits_{|x|\ge\frac{\pi}{2^T}} \frac{1}{x^2}\,d\sigma_{f-f^*}(x)$$

$$\ge 2^{-k} \int\limits_{x\in(a,b]} \frac{1}{x^2}\,d\sigma_{f-f^*}(x) \ge 2^{-k}\sigma_{f-f^*}(a,b] \min\left\{\frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2}\right\} > 0,$$

что и доказывает неравенство (4).

Остается доказать (3); для этого воспользуемся представлением (1):

$$2^T \max_{t\in(2^T,2^{T+1}]} \|A_t f - f^*\|_2^2 \ge \int\limits_{2^T}^{2^{T+1}} \|A_t f - f^*\|_2^2\,dt = \int\limits_{2^T}^{2^{T+1}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_t(x)\,d\sigma_{f-f^*}(x)\,dt$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{4}{x^2} \int\limits_{2^T}^{2^{T+1}} \frac{1}{t^2} \sin^2\left(\frac{tx}{2}\right) dt d\sigma_{f-f^*}(x) \ge \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{2^{-2T} K_T(x)}{x^2}\,d\sigma_{f-f^*}(x), \tag{5}$$

где

$$K_T(x) = \int\limits_{2^T}^{2^{T+1}} \sin^2\left(\frac{tx}{2}\right) dt = 2^{T-1} - \frac{\sin(2^{T+1}x) - \sin(2^T x)}{2x}, \quad x \ne 0.$$

Очевидно, что $K_T(x) \geq 0$. На интервале $\left(-\frac{\pi}{2^T}, \frac{\pi}{2^T}\right)$ найдем оценку снизу для $K_T(x)$:

$$K_T(x) = \int\limits_{2^T}^{2^{T+1}} \sin^2\left(\frac{tx}{2}\right) dt \geq \left(\frac{2^T x}{2}\right)^2 \int\limits_{2^T}^{2^{T+1}} \frac{\sin^2\left(\frac{tx}{2}\right)}{\left(\frac{tx}{2}\right)^2} dt$$

$$= 2^{2T-2}x^2 \int\limits_{2^T}^{2^{T+1}} \frac{\sin^2\left(\frac{tx}{2}\right)}{\left(\frac{tx}{2}\right)^2} dt = 2^{3T-1}x^2 \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\sin^2\left(2^T\tau x\right)}{\left(2^T\tau x\right)^2} d\tau$$

$$= 2^{2T-1}x \int\limits_{2^{T-1}x}^{2^T x} \frac{\sin^2 y}{y^2} dy.$$

Так как на интервале $(0, \pi)$ функция $\frac{\sin^2 y}{y^2}$ строго убывает (от 1 до 0), для некоторого натурального числа $k > 2$ при всех $\varphi \in (0, \pi)$

$$\int\limits_{\frac{\varphi}{2}}^{\varphi} \frac{\sin^2 y}{y^2} dy > \int\limits_{\frac{\varphi}{2}}^{\varphi} \frac{1}{2^{k-2}} dy.$$

Используя это неравенство, завершаем оценку $K_T(x)$ снизу на $\left(-\frac{\pi}{2^T}, \frac{\pi}{2^T}\right)$:

$$K_T(x) \geq 2^{2T-1}x \int\limits_{2^{T-1}x}^{2^T x} \frac{\sin^2 y}{y^2} dy \geq 2^{2T-1}x \int\limits_{2^{T-1}x}^{2^T x} \frac{1}{2^{k-2}} dy = 2^{3T-k}x^2.$$

Оценка снизу $K_T(x)$ при $|x| \geq \frac{\pi}{2^T}$ очевидна:

$$K_T(x) = 2^{T-1} - \frac{\sin(2^{T+1}x) - \sin(2^T x)}{2x} \geq 2^{T-1} - \frac{2}{2\frac{\pi}{2^T}} > 2^{T-2} > 2^{T-k}.$$

Учитывая обе эти нижние оценки на $K_T(x)$, из (5) получаем

$$2^T \max_{t \in (2^T, 2^{T+1}]} \|A_t f - f^*\|_2^2 \geq \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{2^{-2T} K_T(x)}{x^2} d\sigma_{f-f^*}(x)$$

$$= \int\limits_{|x| < \frac{\pi}{2^T}} \frac{2^{-2T} K_T(x)}{x^2} d\sigma_{f-f^*}(x) + \int\limits_{|x| \geq \frac{\pi}{2^T}} \frac{2^{-2T} K_T(x)}{x^2} d\sigma_{f-f^*}(x)$$

$$\geq \int\limits_{|x| < \frac{\pi}{2^T}} 2^{T-k} d\sigma_{f-f^*}(x) + \int\limits_{|x| \geq \frac{\pi}{2^T}} \frac{2^{-T-k}}{x^2} d\sigma_{f-f^*}(x)$$

$$= 2^{-k}\left(2^T \int\limits_{|x| < \frac{\pi}{2^T}} d\sigma_{f-f^*}(x) + 2^{-T} \int\limits_{|x| \geq \frac{\pi}{2^T}} \frac{1}{x^2} d\sigma_{f-f^*}(x)\right) = 2^{-k} C_T(\sigma_{f-f^*}),$$

что и доказывает неравенство (3), завершая доказательство замечания 3. □

Замечание 4. В случае абсолютной непрерывности меры σ_{f-f^*} с непрерывной в точке 0 плотностью ρ справедливо асимптотическое соотношение

$$\|A_t f - f^*\|_2^2 = \|A_t(f - f^*)\|_2^2 = \mathbf{D}A_t(f - f^*) = 2\pi\rho(0)t^{-1} + o(t^{-1}) \text{ при } t \to \infty. \quad (6)$$

Это утверждение совпадает с соотношением теоремы 18.3.1 в [6], за исключением константы перед $\rho(0)$: наша константа в (6) в 2 раза больше. Убедимся, что в [6] в этом месте действительно опечатка. Поскольку

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin\frac{tx}{2}}{\frac{tx}{2}}\right)^2 dx = \frac{2}{t}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx = \frac{2\pi}{t},$$

по представлению (1) для $g = f - f^*$

$$\|A_t f - f^*\|_2^2 - \frac{2\pi}{t}\rho(0) = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin\frac{tx}{2}}{\frac{tx}{2}}\right)^2 \rho(x)\,dx - \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin\frac{tx}{2}}{\frac{tx}{2}}\right)^2 \rho(0)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin\frac{tx}{2}}{\frac{tx}{2}}\right)^2 (\rho(x) - \rho(0))\,dx,$$

и дальнейшее доказательство в точности следует доказательству теоремы 18.2.1 в [6].

Как очевидное следствие теоремы 1 получаем следующий аналог утверждения замечания 4, уточняющий асимптотические теорему 4 из [2] и теорему 2 из [3], перенося на непрерывное время оценку замечания 3 из [4].

Замечание 5. Если мера σ_{f-f^*} абсолютно непрерывна с плотностью $\rho \in L_\infty(\mathbb{R})$, то $\|A_t f - f^*\|_2^2 \le 4\pi\bigl(1 + \frac{3}{2\pi^2}\bigr)\|\rho\|_\infty t^{-1}$ для любого $t > 0$.

Действительно, в этом случае $\sigma_{f-f^*}(-\delta,\delta] = \int_{-\delta}^{\delta}\rho(x)\,dx \le 2\delta\|\rho\|_\infty$ для любого $\delta > 0$, и неравенство замечания немедленно следует из теоремы 1.

Следующая лемма уточняет теорему 3 из [9] и теорему 18.3.1 из [6], уточняя и перенося с дискретного времени на непрерывное утверждения леммы 3 из [4].

Лемма 3. *Справедливы следующие утверждения.*

1. $\|A_t f - f^*\|_2^2 \le \frac{2}{t}\int_0^t |b_\tau(f - f^*)|\,d\tau$ *для любого* $t > 0$.

2. *Если* $b_\tau(f - f^*) \in L_p([-t,t])$ *для некоторых* $p \in [1,+\infty]$ *и* $t > 0$, *то*

$$\|A_t f - f^*\|_2^2 \le 2\|b_\tau(f - f^*)\|_p t^{-\frac{1}{p}}.$$

3. *Если* $b_\tau(f-f^*) \in L_1(\mathbb{R})$, *то мера* σ_{f-f^*} *абсолютно непрерывна с непрерывной (неотрицательной) плотностью* ρ; *при этом* $\rho(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} b_\tau(f - f^*)e^{-ix\tau}\,d\tau$ *для всех* $x \in \mathbb{R}$ *и, следовательно,* $\int_{-\infty}^{+\infty} b_\tau(f-f^*)\,d\tau = 2\pi\rho(0)$. *Справедливо асимптотическое соотношение* (6), *причем для всех* $t > 0$

$$\|A_t f - f^*\|_2^2 - 2\pi\rho(0)t^{-1} = -\frac{1}{t^2}\int_{|\tau|<t}|\tau| b_\tau(f - f^*)\,d\tau - \frac{1}{t}\int_{|\tau|\ge t} b_\tau(f - f^*)\,d\tau.$$

4. *Если, более того,* $\tau b_\tau(f - f^*) \in L_1(\mathbb{R})$, *то плотность* ρ *меры* σ_{f-f^*} *непрерывно дифференцируема; при этом* $\rho'(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\tau b_\tau(f - f^*)e^{i\tau x}\,d\tau$ *для всех*

$x \in \mathbb{R}$ и тем самым $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\tau| b_\tau(f-f^*)\,d\tau = 2\pi(\rho')^c(0)$, *где* $(\rho')^c(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\tau| b_\tau(f-f^*)e^{i\tau x}\,d\tau$ — *сопряженная функция к* $\rho'(x)$ (*см.* [10, *гл.* VIII; 11, Т. 2, § 12.8]). *Верно асимптотическое соотношение*

$$\|A_t f - f^*\|_2^2 = 2\pi\rho(0)t^{-1} - 2\pi(\rho')^c(0)t^{-2} + o(t^{-2}) \quad \textit{при } t \to \infty,$$

причем для всех $t > 0$

$$\|A_t f - f^*\|_2^2 - 2\pi\rho(0)t^{-1} + 2\pi(\rho')^c(0)t^{-2} = \frac{1}{t^2}\int\limits_{|\tau|\ge t} (|\tau| - t) b_\tau(f-f^*)\,d\tau.$$

Доказательство. Воспользуемся представлением (2) для $g = f - f^*$.

Доказательство п. 1. Учитывая, что $b_{-\tau}(f-f^*) = \overline{b_\tau(f-f^*)}$, из цепочки соотношений

$$\|A_t f - f^*\|_2^2 = \|A_t(f-f^*)\|_2^2 \le \frac{1}{t^2}\int\limits_{-t}^{t} (t-|\tau|)|b_\tau(f-f^*)|\,d\tau$$
$$\le \frac{1}{t}\int\limits_{-t}^{t} |b_\tau(f-f^*)|\,d\tau = \frac{2}{t}\int\limits_{0}^{t} |b_\tau(f-f^*)|\,d\tau$$

получаем неравенство п. 1.

Доказательство п. 2. По неравенству п. 1 и неравенству Гёльдера

$$\|A_t f - f^*\|_2^2 \le \frac{2}{t}\int\limits_{0}^{t} |b_\tau(f-f^*)| d\tau \le \frac{2}{t}\|b_\tau(f-f^*)\|_p t^{1-\frac{1}{p}},$$

что дает нам неравенство п. 2.

Доказательство п. 3. Из абсолютной интегрируемости функции $b_\tau(f - f^*)$ следует, что ее преобразование Фурье $\rho(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} b_\tau(f-f^*)e^{-ix\tau}\,d\tau$ является непрерывной функцией (см., например, [12, гл. 7, § 1, предложение 1]). Эта функция и будет плотностью меры σ_{f-f^*}, поскольку ее преобразование Фурье совпадает с корреляционной функцией меры σ_{f-f^*}, а спектральная мера однозначно определяется своей корреляционной функцией ([13, гл. II, § 12, теорема 2]). Рассмотрев значение плотности в точке 0, получим равенство

$$2\pi\rho(0) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} b_\tau(f-f^*)\,d\tau.$$

Из этого равенства и представления (2) вытекает следующая цепочка соотношений, завершающая доказательство этого пункта леммы:

$$\|A_t f - f^*\|_2^2 - 2\pi\rho(0)t^{-1} = \frac{1}{t^2}\int\limits_{-t}^{t} (t-|\tau|) b_\tau(f-f^*)\,d\tau - \frac{1}{t}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} b_\tau(f-f^*)\,d\tau$$
$$= \frac{1}{t}\int\limits_{-t}^{t} b_\tau(f-f^*)\,d\tau - \frac{1}{t^2}\int\limits_{-t}^{t} |\tau| b_\tau(f-f^*)\,d\tau - \frac{1}{t}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} b_\tau(f-f^*)\,d\tau$$
$$= -\frac{1}{t}\int\limits_{|\tau|\ge t} b_\tau(f-f^*)\,d\tau - \frac{1}{t^2}\int\limits_{|\tau|<t} |\tau| b_\tau(f-f^*)\,d\tau.$$

Доказательство п. 4. Из абсолютной интегрируемости функции $\tau b_\tau(f - f^*)$ следует, что плотность $\rho(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} b_\tau(f - f^*)e^{i\tau x}\,d\tau$ непрерывно дифференцируема на $\mathbb{R}$ и $\rho'(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} i\tau b_\tau(f - f^*)e^{i\tau x}\,d\tau$ (см., например, [12, гл. 7, § 1, предложение 3]). Аналогично сопряженная к ρ' функция $(\rho')^c(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\tau| b_\tau(f - f^*)e^{i\tau x}\,d\tau$ также корректно определена на $\mathbb{R}$ (и непрерывна). Рассмотрев ее значение в точке 0, получаем равенство $2\pi(\rho')^c(0) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\tau| b_\tau(f - f^*)\,d\tau$. Поэтому по п. 3

$$\|A_t f - f^*\|_2^2 - 2\pi\rho(0)t^{-1} + 2\pi(\rho')^c(0)t^{-2} = -\frac{1}{t}\int\limits_{|\tau|\geq t} b_\tau(f - f^*)\,d\tau$$

$$-\frac{1}{t^2}\int\limits_{|\tau|<t} |\tau| b_\tau(f - f^*)\,d\tau + \frac{1}{t^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\tau| b_\tau(f - f^*)\,d\tau = \frac{1}{t^2}\int\limits_{|\tau|\geq t} (|\tau| - t) b_\tau(f - f^*)\,d\tau.$$

Доказательство леммы 3 завершено. $\square$

Замечание 6. В замечании 3 после теоремы 3 в [6] выписано также интегральное соотношение $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\tau| b_\tau(f - f^*)\,d\tau = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho(x)+\rho(-x)-2\rho(0)}{x^2}\,dx$ (в условиях и обозначениях п. 4 леммы 3). Из этого представления следует, в частности, что оба коэффициента ($2\pi\rho(0)$ и $2\pi(\rho')^c(0)$) в асимптотическом соотношении п. 4 леммы 3 обращаются в нуль одновременно тогда и только тогда, когда $\rho \equiv 0$, т. е. когда $f - f^* \equiv 0$ п. в. (и сходимости $\|A_t f - f^*\|_2^2$ со скоростью $o(t^{-2})$ при $t \to \infty$ даже в условиях п. 4 леммы 3 не бывает, ср. с замечанием 3 выше).

Как показывает теорема 1, степенная скорость сходимости в эргодической теореме фон Неймана полностью определяется поведением спектральной меры σ_{f-f^*}, а значит, поведением ее корреляционной функции. Следующая теорема уточняет асимптотические теорему 6 из [2] и теорему 3 из [3], уточняя и перенося соотношения теоремы 2 из [4] с дискретного времени на непрерывное.

Теорема 2. *Пусть корреляционная функция со степенной скоростью стремится к нулю при $\tau \to \infty$, т. е. для некоторой положительной константы C при всех $\tau > 0$ выполнено неравенство $|b_\tau(f - f^*)| \leq C\tau^{-\gamma}$. Тогда*

1. *Если $0 \leq \gamma < 1$, то для всех $t > 0$*

$$\|A_t f - f^*\|_2^2 \leq \frac{2C}{1-\gamma}t^{-\gamma}.$$

2. *Если $\gamma = 1$, то для всех $t > 1$*

$$\|A_t f - f^*\|_2^2 \leq 2(\|f - f^*\|_2^2 + C\ln t)t^{-1}.$$

Если $\gamma > 1$, то мера σ_{f-f^*} абсолютно непрерывна с непрерывной плотностью ρ; при этом $\rho(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} b_\tau(f - f^*)e^{-i\tau x}d\tau$ для всех $x \in \mathbb{R}$ и, следовательно,

$2\pi\rho(0) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} b_\tau(f-f^*)\,d\tau \le 2\|f-f^*\|_2^2 + \frac{2C}{\gamma-1}$. *Справедливо асимптотическое соотношение* (6). *При этом*

3. *Если* $1<\gamma<2$, *то для всех* $t>0$

$$\bigl|\|A_tf-f^*\|_2^2 - 2\pi\rho(0)t^{-1}\bigr| \le \frac{2C}{(\gamma-1)(2-\gamma)}t^{-\gamma}.$$

4. *Если* $\gamma=2$, *то для всех* $t>1$

$$\bigl|\|A_tf-f^*\|_2^2 - 2\pi\rho(0)t^{-1}\bigr| \le 2(\|f-f^*\|_2^2 + C\ln t + C)t^{-2}.$$

5. *Если* $\gamma>2$, *то плотность* ρ *меры* σ_{f-f^*} *непрерывно дифференцируема; при этом сопряженная к ее производной функция* $(\rho')^c(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\tau|b_\tau(f-f^*)e^{i\tau x}\,d\tau$ *корректно определена (и непрерывна) на* $\mathbb{R}$. *Следовательно,* $2\pi(\rho')^c(0) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\tau|b_\tau(f-f^*)\,d\tau$, *и*

$$|2\pi(\rho')^c(0)| \le 2C\int\limits_0^\infty \tau^{1-\gamma}\,d\tau \le 2\|f-f^*\|_2^2 + \frac{2C}{\gamma-2}.$$

Справедливо асимптотическое соотношение

$$\|A_tf-f^*\|_2^2 = 2\pi\rho(0)t^{-1} - 2\pi(\rho')^c(0)t^{-2} + o(t^{-2}) \quad \textit{при } t\to\infty,$$

причем для всех $t>0$

$$\bigl|\|A_tf-f^*\|_2^2 - 2\pi\rho(0)t^{-1} + 2\pi(\rho')^c(0)t^{-2}\bigr| \le \frac{2C}{\gamma-2}t^{-\gamma}.$$

6. *Если корреляционная функция убывает экспоненциально, т. е.* $|b_\tau(f-f^*)| \le Ae^{-B\tau}$ *для некоторых положительных констант* A *и* B *при всех* $\tau>0$ (*в этом случае плотность* ρ *допускает аналитическое продолжение с действительной оси в полосу на плоскости комплексного переменного, см., например,* [12, *гл.* 7, § 1, *упражнение* 3]), *то*

$$2\pi\rho(0) \le \frac{2A}{B}, \quad |2\pi(\rho')^c(0)| \le \frac{2A}{B^2},$$

и для всех $t>0$

$$\bigl|\|A_tf-f^*\|_2^2 - 2\pi\rho(0)t^{-1} + 2\pi(\rho')^c(0)t^{-2}\bigr| \le \frac{2A}{B}\left(1+\frac{1}{Bt}\right)\frac{e^{-Bt}}{t}.$$

Доказательство. Конкретизируем оценки леммы 3 для рассматриваемых скоростей убывания корреляционной функции.

Доказательство пп. 1, 2. Утверждения пп. 1, 2 теоремы сразу следуют из п. 1 леммы 3. Действительно, если $0\le\gamma<1$, то

$$\|A_tf-f^*\|_2^2 \le \frac{2}{t}\int\limits_0^t |b_\tau(f-f^*)|\,d\tau \le \frac{2}{t}\int\limits_0^t C\tau^{-\gamma}\,d\tau \le \frac{2C}{1-\gamma}t^{-\gamma},$$

что и дает неравенство п. 1 теоремы. Аналогично при $\gamma = 1$ для $t > 1$

$$\|A_t f - f^*\|_2^2 \le \frac{2}{t}\int_0^1 |b_\tau(f - f^*)|\,d\tau + \frac{2}{t}\int_1^t |b_\tau(f - f^*)|\,d\tau$$

$$\le \frac{2}{t}\|f - f^*\|_2^2 + \frac{2}{t}\int_1^t \frac{C}{\tau}\,d\tau \le \frac{2}{t}\|f - f^*\|_2^2 + \frac{2C\ln t}{t},$$

что и требовалось доказать в п. 2.

Для оценки величины $2\pi\rho(0)$ при $\gamma > 1$ заметим, что в этом случае $b_\tau(f - f^*) \in L_1(\mathbb{R})$ и мы находимся в условиях п. 3 леммы 3. Следовательно,

$$2\pi\rho(0) = \int_{|\tau|\le 1} b_\tau(f - f^*)\,d\tau + \int_{|\tau|>1} b_\tau(f - f^*)\,d\tau$$

$$\le 2\int_0^1 |b_\tau(f - f^*)|\,d\tau + 2\int_1^\infty |b_\tau(f - f^*)|\,d\tau \le 2\|f - f^*\|_2^2 + \frac{2C}{\gamma - 1}.$$

Доказательство п. 3. При таких γ мы находимся в условиях п. 3 леммы 3, поэтому

$$|\|A_t f - f^*\|_2^2 - 2\pi\rho(0)t^{-1}| = \left|\frac{1}{t^2}\int_{|\tau|<t} |\tau| b_\tau(f - f^*)\,d\tau + \frac{1}{t}\int_{|\tau|\ge t} b_\tau(f - f^*)\,d\tau\right|$$

$$\le \frac{2}{t^2}\int_0^t C\tau^{1-\gamma}\,d\tau + \frac{2}{t}\int_t^\infty C\tau^{-\gamma}\,d\tau = 2C\left(\frac{1}{\gamma - 1} + \frac{1}{2 - \gamma}\right)t^{-\gamma}.$$

Доказательство п. 4. Действуем аналогично предыдущему п. 3:

$$|\|A_t f - f^*\|_2^2 - 2\pi\rho(0)t^{-1}| = \left|\frac{1}{t^2}\int_{|\tau|<t} |\tau| b_\tau(f - f^*)\,d\tau + \frac{1}{t}\int_{|\tau|\ge t} b_\tau(f - f^*)\,d\tau\right|$$

$$= \left|\frac{1}{t^2}\int_{|\tau|\le 1} |\tau| b_\tau(f - f^*)\,d\tau + \frac{1}{t^2}\int_{1<|\tau|<t} |\tau| b_\tau(f - f^*)\,d\tau + \frac{1}{t}\int_{|\tau|\ge t} b_\tau(f - f^*)\,d\tau\right|$$

$$\le \frac{2}{t^2}\|f - f^*\|_2^2 + \frac{2C}{t^2}\int_{1<\tau<t} \tau^{-1}d\tau + \frac{2C}{t}\int_{\tau\ge t} \tau^{-2}d\tau = \frac{2}{t^2}\big(\|f - f^*\|_2^2 + C\ln t + C\big).$$

Доказательство п. 5. Так как при $\gamma > 2$ функция $|\tau| b_\tau(f - f^*)$ абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$, функция $(\rho')^c(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\tau| b_\tau(f - f^*) e^{i\tau x}\,d\tau$ корректно определена и непрерывна (см., например, [12, гл. 7, § 1, предложение 1]). Рассмотрев ее значение в точке 0, получаем соотношения

$$|2\pi(\rho')^c(0)| = \left|\int_{|\tau|\le 1} |\tau| b_\tau(f - f^*)\,d\tau + \int_{|\tau|>1} |\tau| b_\tau(f - f^*)\,d\tau\right|$$

$$\le 2\int_0^1 |b_\tau(f - f^*)|d\tau + 2\int_1^\infty \tau|b_\tau(f - f^*)|d\tau \le 2\|f - f^*\|_2^2 + \frac{2C}{\gamma - 2}.$$

Согласно п. 4 леммы 3

$$\left|\|A_t f - f^*\|_2^2 - 2\pi\rho(0)t^{-1} + 2\pi(\rho')^c(0)t^{-2}\right| = \left|\frac{1}{t^2}\int\limits_{|\tau|\ge t}(|\tau|-t)b_\tau(f-f^*)\,d\tau\right|$$

$$\le \frac{2C}{t^2}\int\limits_t^\infty \tau^{1-\gamma}\,d\tau = \frac{2C}{\gamma-2}t^{-\gamma}.$$

Доказательство п. 6. В случае экспоненциального убывания $|b_\tau(f-f^*)|$

$$2\pi\rho(0) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} b_\tau(f-f^*)\,d\tau \le 2\int\limits_0^\infty |b_\tau(f-f^*)|\,d\tau \le 2\int\limits_0^\infty Ae^{-B\tau}d\tau = \frac{2A}{B},$$

$$|2\pi(\rho')^c(0)| = \left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\tau|b_\tau(f-f^*)\,d\tau\right| \le 2\int\limits_0^\infty \tau|b_\tau(f-f^*)|\,d\tau$$

$$\le 2\int\limits_0^\infty \tau Ae^{-B\tau}\,d\tau = 2A\left(\frac{-\tau e^{-B\tau}}{B}\bigg|_0^\infty + \frac{1}{B}\int\limits_0^\infty e^{-B\tau}\,d\tau\right) = \frac{2A}{B^2},$$

и по п. 4 леммы 3

$$\left|\|A_t f - f^*\|_2^2 - 2\pi\rho(0)t^{-1} + 2\pi(\rho')^c(0)t^{-2}\right| = \left|\frac{1}{t^2}\int\limits_{|\tau|\ge t}(|\tau|-t)b_\tau(f-f^*)\,d\tau\right|$$

$$\le \frac{2A}{t^2}\int\limits_t^\infty \tau e^{-B\tau}\,d\tau = \frac{2A}{B}\left(1+\frac{1}{Bt}\right)\frac{e^{-Bt}}{t}.$$

Теорема 2 доказана. □

Заметим в заключение, что все результаты этой работы имеют очевидные точные аналоги для стационарных в широком смысле процессов, доказывающиеся дословно так же.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В.* Эргодическая теория. М.: Наука, 1980.
2. *Качуровский А. Г.* Скорости сходимости в эргодических теоремах // Успехи мат. наук. 1996. Т. 51, № 4. С. 73–124.
3. *Качуровский А. Г., Решетенко А. В.* О скорости сходимости в эргодической теореме фон Неймана с непрерывным временем // Мат. сб. 2010. Т. 201, № 4. С. 25–32.
4. *Качуровский А. Г., Седалищев В. В.* О константах оценок скорости сходимости в эргодической теореме фон Неймана // Мат. заметки. 2010. Т. 87, № 5. С. 756–763.
5. *Neumann, J. von.* Proof of the quasi-ergodic hypothesis // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1932. V. 18, N 1. P. 70–82.
6. *Ибрагимов И. А., Линник Ю. В.* Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука, 1965.
7. *Гапошкин В. Ф.* Оценки средних для почти всех реализаций стационарных процессов // Сиб. мат. журн. 1979. Т. 20, № 5. С. 978–989.
8. *Гапошкин В. Ф.* Сходимость рядов, связанных со стационарными последовательностями // Изв. АН СССР. Сер. Математика. 1975. Т. 39, № 6. С. 1366–1392.
9. *Леонов В. П.* О дисперсии временных средних стационарного случайного процесса // Теория вероятностей и ее применения. 1961. Т. 6, № 1. С. 93–101.

10. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961.
11. *Эдвардс Р.* Ряды Фурье в современном изложении. М.: Мир, 1985. Т. 1, 2.
12. *Хелемский А. Я.* Лекции по функциональному анализу. М.: МЦНМО, 2004.
13. *Ширяев А. Н.* Вероятность. М.: Наука, 1989.

Статья поступила 12 июля 2010 г.

Качуровский Александр Григорьевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
agk@math.nsc.ru

Джулай Николай Александрович
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
kolya-j@yandex.ru