Сибирский математический журнал
Июль—август, 2011. Том 52, № 4

УДК 519.233.22

ОБ АСИМПТОТИКЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДВУХШАГОВЫХ СТАТИСТИЧЕСКИХ ОЦЕНОК

Ю. Ю. Линке

Аннотация. Изучаются двухшаговые статистические оценки, допускающие определенные представления достаточно общего вида. Подобные конструкции возникают в различных статистических моделях (например, в задачах регрессии). При весьма слабых ограничениях найдены необходимые и достаточные условия слабой сходимости нормированной разности двухшаговой оценки и неизвестного параметра к произвольному распределению.

Ключевые слова: двухшаговые оценки, параметрическое оценивание, сближающиеся распределения, схема серий, регрессия.

§ 1. Введение

1.1. Пусть $X_{n1}, X_{n2}, \dots, X_{nn}$, $n = 1, 2, \dots,$ — последовательность серий независимых в каждой серии наблюдений, распределения которых (вообще говоря, различные внутри каждой серии) зависят от неизвестного параметра θ_n. Имеется целый ряд статистических задач, в которых оценка некоторого параметра θ_n строится в два этапа. Сначала, на первом шаге, находится некоторая оценка $\theta_n^* = \theta_n^*(X_{n1}, \dots, X_{nn})$, удовлетворяющая, скажем, требованию состоятельности. На втором шаге с помощью θ_n^* строится оценка θ_n^{**}, которая точнее приближает неизвестный параметр θ_n и в ряде случаев будет в известном смысле оптимальной.

Идея двухшаговой процедуры оценивания восходит к работам Р. Фишера, который дополнительно использовал один шаг в методе Ньютона для приближенного вычисления оценки максимального правдоподобия (см., например, [1, 2]). Двухшаговые процедуры оценивания применяются в различных задачах регрессионного анализа (см., например, [3–14], а также более подробную библиографию в [15–18]). Часто двухшаговые оценки трактуются как достаточно точное приближение для какой-нибудь классической оценки (например, для M-оценки), являющейся решением некоторого уравнения или точкой экстремума некоторого функционала.

Следуя работам Р. Фишера, двухшаговые оценки обычно представляют в следующем виде:

$$\theta_n^{**} = \theta_n^* + \frac{\sum W_{ni}(\theta_n^*, X_{ni})}{\sum V_{ni}(\theta_n^*, X_{ni})}, \tag{1}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 11–01–00285).

где символ $\sum$ здесь и далее используется вместо $\sum\limits_{i=1}^{n}$, а функции $\{W_{ni}(\theta_n^*, X_{ni})\}$ и $\{V_{ni}(\theta_n^*, X_{ni})\}$ подбираются так, чтобы θ_n^{**} приближала неизвестный параметр θ_n точнее, нежели оценка первого шага θ_n^*.

Исследование асимптотики поведения таких оценок существенно зависит от выбора оценки первого шага. Построение состоятельной оценки первого шага в тех или иных моделях представляет собой отдельную, вообще говоря, непростую проблему. В [3–9] было замечено, что в целом ряде регрессионных моделей, включающих различные постановки задач линейной и дробно-линейной регрессии, удается построить оценку первого шага θ_n^* параметра $\theta_n \in (-\infty, \infty)$, допускающую представление

$$\theta_n^* - \theta_n = \frac{\sum u_{ni}}{1 + \sum v_{ni}}, \quad \text{где } \mathbf{E} u_{ni} = \mathbf{E} v_{ni} = 0, \quad i = 1, \dots, n, \tag{2}$$

для некоторых преобразований $\{u_{ni} = u_{ni}(\theta_n, X_{ni})\}$ и $\{v_{ni} = v_{ni}(\theta_n, X_{ni})\}$, обеспечивающих малость дисперсий числителя и знаменателя в правой части (2).

Одна из задач настоящей работы — получить необходимые и достаточные условия сходимости вида

$$\frac{\theta_n^{**} - \theta_n}{d_n} \Longrightarrow \eta \quad \text{при } n \to \infty, \tag{3}$$

где η — случайная величина, распределение которой может быть произвольным, хотя наиболее распространенный вариант, возникающий в приложениях, когда η имеет нормальное распределение. При этом ограничимся случаем, когда оценка первого шага θ_n^* представима в виде (2). В этом случае используемый в работе подход к исследованию оценок позволяет получать основные результаты при достаточно слабых ограничениях на функции, определяющие оценку θ_n^{**}.

Отметим, что оценка θ_n^{**} из (1) представима в следующем эквивалентном виде, который здесь будет удобнее:

$$\theta_n^{**} - \theta_n = \frac{\sum U_{ni}(\theta_n^*)}{\sum V_{ni}(\theta_n^*)}, \tag{4}$$

где

$$U_{ni}(t) = W_{ni}(t, X_{ni}) + (\theta_n^* - \theta_n) V_{ni}(t, X_{ni}), \quad V_{ni}(t) = V_{ni}(t, X_{ni}). \tag{5}$$

Мы отдаем предпочтение представлению (4), поскольку в этом случае условия на функции, определяющие θ_n^{**}, имеют более компактный и удобный для понимания вид.

1.2. Поясним возникновение двухшаговых оценок, имеющих представления (2) и (4), на примере одномерного аналога одной из популярных моделей нелинейной регрессии, широко используемых в биохимии, модели Михаэлиса — Ментен. Полагаем, что наблюдения $X_{n1}, \dots, X_{nn}$ связаны с неизвестным параметром θ_n, подлежащим оцениванию, следующим соотношением:

$$X_{ni} = \frac{a_{ni}}{1 + b_{ni}\theta_n} + \varepsilon_{ni}, \quad i = 1, \dots, n, \tag{6}$$

где $\{a_{ni}\}$ и $\{b_{ni}\}$ — числовые последовательности, а ненаблюдаемые погрешности $\{\varepsilon_{ni}\}$ — независимые случайные величины с нулевыми средними.

Если коэффициенты $\{a_{ni}\}$ и $\{b_{ni}\}$ известны, то в [3] в качестве оценки параметра θ_n предложено выбрать статистику

$$\theta_n^* = \frac{\sum c_{ni}(a_{ni} - X_{ni})}{\sum c_{ni} b_{ni} X_{ni}}, \tag{7}$$

где $\{c_{ni}\}$ — некоторые константы. При достаточно широких предположениях оценка θ_n^* в отличие от других известных ранее явных оценок состоятельна и асимптотически нормальна. Но попытка оптимизации асимптотической дисперсии оценки θ_n^* по коэффициентам $\{c_{ni}\}$ показывает, что даже в классическом случае, когда дисперсии $\mathbf{D}\varepsilon_{ni}$ не зависят от i и θ_n, оптимальные $\{c_{ni}\}$ надо искать не среди констант, а среди функций, зависящих от неизвестного параметра θ_n.

С целью обойти эту трудность в [3] введены «улучшенные» оценки второго шага

$$\theta_n^{**} = \frac{\sum \gamma_{ni}(\theta_n^*)(a_{ni} - X_{ni})}{\sum \gamma_{ni}(\theta_n^*) b_{ni} X_{ni}}, \tag{8}$$

где $\{\gamma_{ni}(\cdot) = \gamma_{ni}(\cdot, a_{ni}, b_{ni})\}$ — выбираемые статистиком функции. В частности, в [3] показано, что оптимальные функции $\{\gamma_{ni}(t)\}$, минимизирующие асимптотическую дисперсию оценок θ_n^{**}, определяются соотношением

$$\gamma_{ni}^{opt}(t) = \frac{a_{ni} b_{ni}}{(1 + b_{ni} t)^3}, \quad \text{если } \mathbf{D}\varepsilon_{ni} = \sigma_n^2 > 0,\ i = 1, \ldots, n,$$

где параметр σ_n^2 может быть неизвестным.

Отметим, что для введенных в этом примере оценок (7) и (8) представления (2) и (4) имеют место при

$$u_{ni} = -\frac{c_{ni}(1 + b_{ni}\theta_n)\varepsilon_{ni}}{A_{nc}}, \quad v_{ni} = \frac{c_{ni} b_{ni} \varepsilon_{ni}}{A_{nc}}, \quad A_{nc} = \sum \frac{c_{ni} a_{ni} b_{ni}}{1 + b_{ni}\theta_n},$$
$$U_{ni}(t) = -\gamma_{ni}(t)(1 + b_{ni}\theta_n)\varepsilon_{ni}, \quad V_{ni}(t) = \gamma_{ni}(t) b_{ni} X_{ni}.$$

Но для модели Михаэлиса — Ментен двухшаговые оценки, допускающие представления (2) и (4), возникают и при других, более сложных, регрессионных предположениях, например, в различных постановках моделей с ошибками в коэффициентах. Приведем одну из таких постановок, рассмотренных в [4, 5]. Считаем, что точные значения коэффициентов $\{a_{ni}\}$ и $\{b_{ni}\}$ неизвестны, но даны дополнительные наблюдения $\{X_{ni}^a\}$ и $\{X_{ni}^b\}$, при всех n, i представимые в виде

$$X_{ni}^a = a_{ni} + \varepsilon_{ni}^a, \quad X_{ni}^b = b_{ni} + \varepsilon_{ni}^b,$$

где $\{\varepsilon_{ni}^a\}$ и $\{\varepsilon_{ni}^b\}$ — случайные ошибки. В этом случае естественно заменить в формуле (7) коэффициенты $\{a_{ni}\}$ и $\{b_{ni}\}$ наблюдениями $\{X_{ni}^a\}$ и $\{X_{ni}^b\}$ и в качестве оценки первого шага выбрать статистику

$$\theta_n^* = \frac{\sum c_{ni}\left(X_{ni}^a - X_{ni}\right)}{\sum c_{ni} X_{ni}^b X_{ni}}, \tag{9}$$

являющуюся при достаточно широких предположениях состоятельной и асимптотически нормальной. С целью уменьшения асимптотической дисперсии нужно подобрать функции $\{\tilde\gamma_{ni}(\cdot) = \tilde\gamma_{ni}(\cdot, X_{ni}^a, X_{ni}^b)\}$, $\{\lambda_{ni}(\cdot) = \lambda_{ni}(\cdot, X_{ni}^a, X_{ni}^b)\}$ и $\{\mu_{ni}(\cdot) = \mu_{ni}(\cdot, X_{ni}^b, X_{ni}^b)\}$ и, используя (9), определить оценку второго шага

$$\theta_n^{**} = \frac{\sum \tilde\gamma_{ni}(\theta_n^*)\left(X_{ni}^a - X_{ni}\right) - \sum \lambda_{ni}(\theta_n^*)}{\sum \tilde\gamma_{ni}(\theta_n^*) X_{ni}^b X_{ni} - \sum \mu_{ni}(\theta_n^*) X_{ni}}. \tag{10}$$

Класс оценок (10) введен и изучен в [4], а в [5] рассмотрен частный случай оценок θ_n^{**} при $\lambda_{ni}(\cdot) = \mu_{ni}(\cdot) = 0$. Подчеркнем, что наличие «поправочных» функций $\{\lambda_{ni}(\cdot)\}$ и $\{\mu_{ni}(\cdot)\}$ в (10) позволяет при нахождении условий асимптотической нормальности θ_n^{**} существенно ослабить предположения на точность, с которой нужно измерять коэффициенты $\{a_{ni}\}$ и $\{b_{ni}\}$.

Нетрудно проверить, что в этом примере оценки (9) и (10) также допускают представления (2) и (4) при $X_{ni} = \big(\widetilde{X}_{ni}, X^a_{ni}, X^b_{ni}\big)$ (здесь через $\widetilde{X}_{ni}$ обозначена правая часть в (6)),

$$u_{ni} = \frac{c_{ni}\varepsilon^o_{ni}}{A^o_{nc}}, \quad v_{ni} = \frac{c_{ni}\big(X^b_{ni}X_{ni} - \mathbf{E}\big(X^b_{ni}X_{ni}\big)\big)}{A^o_{nc}}, \quad A^o_{nc} = \sum c_{ni}\mathbf{E}\big(X^b_{ni}X_{ni}\big),$$

$$U_{ni}(t) = \tilde{\gamma}_{ni}(t)\varepsilon^o_{ni} - \lambda_{ni}(t) + \theta_n\mu_{ni}(t)X_{ni}, \quad V_{ni}(t) = \tilde{\gamma}_{ni}(t)X^b_{ni}X_{ni} - \mu_{ni}(t)X_{ni},$$

где $\varepsilon^o_{ni} = -(1 + b_{ni}\theta_n)\varepsilon_{ni} + \varepsilon^a_{ni} - \theta_n X_{ni}\varepsilon^b_{ni}$.

Поскольку величины X_{ni}, X^b_{ni} и ε^o_{ni} имеют достаточно сложный вид, в последнем примере при исследовании асимптотики поведения оценок θ_n^{**} суммы $\sum U_{ni}(t)$ и $\sum V_{ni}(t)$ приходится разбивать на целый ряд слагаемых (см. формулу (15)), имеющих различные асимптотики.

Отметим, что все обозначения, введенные в этом пункте, локальны и далее в работе использоваться не будут.

1.3. Имеется еще ряд задач регрессии, в которых удается найти двухшаговые оценки, допускающие представления (2), (4). Некоторые из этих задач рассмотрены в работах [3–9], посвященных оцениванию одномерного параметра в задачах линейной и дробно-линейной регрессии, в том числе и при невыполнении ряда классических предположений (дисперсии наблюдений могут зависеть от неизвестного параметра θ_n и от номера наблюдений n, не предполагается нормальным распределение наблюдений, а коэффициенты могут измеряться и со случайными ошибками).

Главная цель настоящей работы — систематизировать методику при исследовании таких задач. Это позволит существенно уменьшить объем доказательств в указанных исследованиях и даст возможность проводить их при минимальных ограничениях на функции, определяющие двухшаговые оценки.

В частности, из приводимых ниже теоремы 2 и следствия 2 можно извлечь теоремы 9 и 10 в [3], а из теоремы 2 и следствия 1 — теорему 2 в [4], теорему из [5], теорему 4 и следствие 6 из [6], теорему 3 и следствие 1 из [7], теорему 1 и следствие 1 из [8] и теорему 3 из [9].

Особо подчеркнем, что в настоящей работе удалось отказаться от ряда ограничений, существенно используемых в работах [3–9] (см. замечание 5).

Отметим, что в ряде работ по регрессионному анализу проведено, на наш взгляд, неполное исследование свойств используемых там двухшаговых оценок, что делает недостаточно обоснованными соответствующие выводы (см., например, [10]). В ряде других работ наложены более жесткие ограничения, чем в настоящей работе и в [3–9]. Например, в [12] помимо прочих ограничений оценки второго шага исследуются в предположении непрерывности производных первого и второго порядков у функций, определяющих эти оценки, а также равномерной ограниченности производных третьего порядка этих функций. Такого рода ограничения являются классическими, начиная с исследований Г. Крамера [19]. В данной работе от функций $\{U_{ni}(\cdot)\}$ и $\{V_{ni}(\cdot)\}$ из (4), определяющих оценку θ_n^{**}, требуется, по существу, лишь условие Гёльдера.

Основные результаты составляют § 2. Поскольку все утверждения § 2 получены при весьма слабых предположениях, доказательства этих результатов будут проведены в два этапа: в § 3 приведено и доказано некоторое ключевое вспомогательное утверждение (теорема 3), имеющее и самостоятельный интерес, затем в § 4 выведены все утверждения § 2.

Всюду в работе считаем, что все пределы берутся при $n \to \infty$. Для произвольной случайной величины ξ будем использовать обозначение $\|\xi\| = \left(\mathbf{E}\xi^2\right)^{1/2}$.

Пользуясь случаем выражаю глубокую признательность профессору А. И. Саханенко за постановку задачи и полезные обсуждения.

§ 2. Основные результаты

Перечислим условия, которые нам потребуются в этом параграфе.

(A_0) Пусть $l \ge l_0 \ge 1$ и $m \ge 1$ — фиксированные натуральные числа, переменные k, r, n, i могут пробегать значения $k = 1, 2, \ldots, l$, $r = 1, 2, \ldots, m$, $n = 1, 2, \ldots$, $i = 1, \ldots, n$; $I_n = [\theta_n - \kappa_n, \theta_n + \kappa_n]$ — некоторый интервал, где $\kappa_n > 0$ и $\theta_n \in (-\infty, \infty)$ — действительные числа. Пусть при всех n, k и r фиксированы числа $p_k = p_{nk} \in (0, 1]$ и $q_r = q_{nr} \in (0, 1]$, а η — случайная величина, имеющая произвольное распределение.

(A_1) При всех k, n, i заданы случайные функции $\varphi_{nki}(\cdot)$ и случайные величины $\overline{\varphi}_{nki}$ такие, что

$$|\varphi_{nki}(t) - \varphi_{nki}(\theta_n)| \le \overline{\varphi}_{nki}|t - \theta_n|^{p_k} \quad \text{при всех } t \in I_n. \tag{11}$$

Если $1 \le k \le l_0$, то дополнительно

$$|\varphi_{nki}(t_2) - \varphi_{nki}(t_1)| \le \overline{\varphi}_{nki}|t_2 - t_1|^{p_k} \quad \text{при всех } t_1, t_2 \in I_n. \tag{12}$$

При всех r, n, i заданы случайные функции $\psi_{nri}(\cdot)$ и случайные величины $\overline{\psi}_{nri}$ такие, что

$$|\psi_{nri}(t) - \psi_{nri}(\theta_n)| \le \overline{\psi}_{nri}|t - \theta_n|^{q_r} \quad \text{при всех } t \in I_n. \tag{13}$$

(A_2) При всех n, i заданы случайные величины u_{ni}, v_{ni} с нулевыми средними такие, что при каждом n случайные векторы

$$\big(u_{ni}, v_{ni}, \overline{\varphi}_{nki}, \overline{\psi}_{nri}, \varphi_{nki}(\cdot), \psi_{nri}(\cdot),\ k = 1, \ldots, l,\ r = 1, \ldots, m\big), \quad i = 1, \ldots, n,$$

независимы в совокупности и

$$d_{nu}^2/\kappa_n^2 + d_{nv}^2 \to 0 \quad \text{при } d_{nu}^2 := \sum \mathbf{D}u_{ni},\ d_{nv}^2 := \sum \mathbf{D}v_{ni}. \tag{14}$$

(A_3) Случайные величины θ_n^* и θ_n^{**} представимы в виде (2) и (4), при этом

$$U_{ni}(t) = \sum_{k=1}^{l} \varphi_{nki}(t), \quad V_{ni}(t) = \sum_{r=1}^{m} \psi_{nri}(t). \tag{15}$$

(A_4) Существуют числа $A_n \ne 0$ такие, что

$$\sum_{r=1}^{m} d_{nu}^{q_r} \sum \mathbf{E}\overline{\psi}_{nri}/A_n \to 0, \tag{16}$$

$$\sum V_{ni}(\theta_n)/A_n \xrightarrow{p} 1. \tag{17}$$

(A_5) Существуют числа $B_n \neq 0$ такие, что

$$\sum_{k=1}^{l_0} \sum \frac{\|\overline{\varphi}_{nki}\| \big(\|u_{ni}\|^{p_k} + d_{nu}^{p_k} \|v_{ni}\|^{p_k} \big)}{B_n} \to 0, \quad \sum_{k=1}^{l_0} d_{nu}^{2p_k} \sum \frac{\|\overline{\varphi}_{nki}\|^2}{B_n^2} \to 0, \tag{18}$$

$$\sum_{k=l_0+1}^{l} d_{nu}^{p_k} \sum \frac{\mathbf{E}\overline{\varphi}_{nki}}{B_n} \to 0. \tag{19}$$

Положим

$$\Delta_{ni}(t) := \sum_{k=1}^{l_0} \mathbf{E}(\varphi_{nki}(t) - \varphi_{nki}(\theta_n)). \tag{20}$$

Нам также потребуются обозначения

$$\begin{aligned} W_n &:= (\theta_n^{**} - \theta_n)/d_n \quad \text{при } d_n = B_n/A_n, \\ w_n^* &:= \sum U_{ni}(\theta_n)/B_n + \sum \Delta_{ni}(\theta_n^*)/B_n. \end{aligned} \tag{21}$$

Напомним, что семейство распределений случайных величин $\{Z_n\}$ называется *компактным*, если

$$\sup_n \mathbf{P}(|Z_n| > c) \to 0 \quad \text{при } c \to \infty.$$

Сформулируем основное утверждение работы, из которого, в частности, следует, что распределения W_n и w_n^* сближаются.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия (A_0)–(A_5) и по меньшей мере одно из семейств распределений случайных величин $\{W_n\}$ или $\{w_n^*\}$ компактно. Тогда*

$$W_n - w_n^* \xrightarrow{p} 0. \tag{22}$$

Пусть η — случайная величина, имеющая произвольное распределение. Из теоремы 1 нетрудно получить следующий результат.

Теорема 2. *Пусть выполнены предположения (A_0)–(A_5). Тогда условие*

$$w_n^* \Longrightarrow \eta \tag{23}$$

необходимо и достаточно для того, чтобы имела место сходимость

$$W_n \Longrightarrow \eta. \tag{24}$$

Замечание 1. В условиях теорем 1 и 2 при всех достаточно больших n функция $\sum \Delta_{ni}(t)$ является неслучайной функцией, определенной на I_n и обращающейся в нуль при $t = \theta_n$, а случайные величины θ_n^*, θ_n^{**} и $\sum \Delta_{ni}(\theta_n^*)$ определены с вероятностями, стремящимися к единице (см. п. 4.2).

Замечание 2. Как показано в п. 4.2, в теоремах 1 и 2 условия из (18) можно заменить следующим более простым и чуть более грубым предположением:

$$\sum_{k=1}^{l_0} d_{nu}^{2p_k} \Big(\sum \big(\mathbf{E}\overline{\varphi}_{nki}^2 \big)^{\frac{1}{2-p_k}} \Big)^{2-p_k} / B_n^2 \to 0. \tag{25}$$

В регулярных случаях можно считать, что

$$d_{nu}^2 + \frac{1}{|A_n|} + \frac{1}{B_n^2} = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Тогда условия (16) и (18) выполнены, если

$$\sup_{n,i}\bigl\{\mathbf{E}\overline{\psi}_{n1i},\dots,\mathbf{E}\overline{\psi}_{nmi},\mathbf{E}\overline{\varphi}^2_{n1i},\dots,\mathbf{E}\overline{\varphi}^2_{nl_0i}\bigr\}<\infty$$

и $p_k > 1/2$ при всех $1 \le k \le l_0$.

Замечание 3. Нетрудно понять, что верны следующие утверждения.

1. Если $\sum \Delta_{ni}(\theta_n^*)/B_n \xrightarrow{p} 0$ и

$$\sum U_{ni}(\theta_n)/B_n - \sum a_{ni}(\theta_n)/B_n \Longrightarrow \eta \tag{26}$$

при некоторых неслучайных $a_{ni}(\theta_n)$, то для справедливости (23) необходимо и достаточно условие $\sum a_{ni}(\theta_n)/B_n \to 0$.

2. Если при всех n, i и t существует $a_{nki}(t) = \mathbf{E}\varphi_{nki}(t)$, $k = 1,\dots,l$, и

$$\sum\sum_{k=1}^{l_0} a_{nki}(\theta_n^*)/B_n + \sum\sum_{k=l_0+1}^{l} a_{nki}(\theta_n)/B_n \xrightarrow{p} 0,$$

то условие (26) при $a_{ni}(\theta_n) = \mathbf{E}U_{ni}(\theta_n)$ необходимо и достаточно для сходимости (23).

При получении достаточных условий для сходимости (23) проще использовать утверждение 2, а более простые необходимые условия получаются из утверждения 1 при $a_{ni}(\theta_n) = \mathbf{E}U_{ni}(\theta_n)$. Но более тонкие необходимые и достаточные условия в терминах срезанных случайных величин можно непосредственно извлечь из утверждения теоремы 2. Отметим также, что условия (A_0)–(A_5) не влекут за собой требование безграничной малости слагаемых, определяющих w_n^* из (21).

Положим

$$d_n^*(t) = \frac{\bigl(\sum (U_{ni}^*(\theta_n^*,t))^2\bigr)^{1/2}}{\sum V_{ni}(\theta_n^*)} \quad \text{при } U_{ni}^*(z,t) = U_{ni}(z) - (t-\theta_n)V_{ni}(z). \tag{27}$$

Следствие 1. *Пусть выполнены предположения* (A_0)–(A_5), *условие* (23),

$$\sum V_{ni}^2(\theta_n)/A_n^2 \xrightarrow{p} 0, \tag{28}$$

$$\sum U_{ni}^2(\theta_n)/B_n^2 \xrightarrow{p} 1, \tag{29}$$

и пусть $B_n > 0$. *Тогда*

$$W_n^{**} := \frac{\theta_n^{**} - \theta_n}{d_n^*(\theta_n^{**})} \Longrightarrow \eta. \tag{30}$$

Следствие 2. *Пусть выполнены предположения* (A_0)–(A_5), *условия* (23), (29),

$$d_{nu}^2 \sum \frac{\|V_{ni}(\theta_n)\|^2}{B_n^2} \to 0,\ \frac{1}{B_n^2}\left(\sum_{k=l_0+1}^{l} d_{nu}^{2p_k} \sum \|\overline{\varphi}_{nki}\|^2 + d_{nu}^4 \sum_{r=1}^{m} \sum \|\overline{\psi}_{nri}\|^2\right) \to 0, \tag{31}$$

и пусть $B_n > 0$. *Тогда*

$$W_n^* := \frac{\theta_n^{**} - \theta_n}{d_n^*(\theta_n^*)} \Longrightarrow \eta. \tag{32}$$

Замечание 4. В силу (5) справедливо равенство
$$U^*_{ni}(\theta^*_n, t) = W_{ni}(\theta^*_n, X_{ni}) + (\theta^*_n - t)V_{ni}(\theta^*_n, X_{ni}). \tag{33}$$
Поэтому величины $U^*_{ni}(\theta^*_n, \theta^*_n)$, $U^*_{ni}(\theta^*_n, \theta^{**}_n)$ и как следствие $d^*_n(\theta^{**}_n)$ и $d^*_n(\theta^*_n)$ (см. определение (27)) — статистики. Таким образом, утверждения следствий 1 и 2, т. е. сходимости (30) и (32), могут быть полезными при построении доверительных интервалов и проверке гипотез, поскольку в них разность $\theta^{**}_n - \theta_n$ делится на величины, которые не содержат неизвестных параметров.

Отметим также, что следствие 1, в котором участвует статистика $d^*_n(\theta^{**}_n)$, позволяет получать асимптотическую нормальность оценки θ^{**}_n со случайной дисперсией (в случае стандартного нормального предельного распределения) при меньшем количестве ограничений. Эта идея реализуется в [4–9]. Лишь в первой работе [3] использована величина $d^*_n(\theta^*_n)$.

Замечание 5. Подчеркнем ряд преимуществ приведенных в этом параграфе утверждений по сравнению с результатами работ [3–9], в которых, напомним, изучались частные случаи оценок θ^{**}_n из (4). Во-первых, в теореме 2 и ее следствиях удалось отказаться от достаточно жесткого условия существования математического ожидания у величин $U_{ni}(t)$ при всех n, i и всех неслучайных t. Во-вторых, в приведенных утверждениях нет предположения о наличии каких-либо конкретных связей между функциями $\varphi_{nki}(\cdot)$, $k = 1, \dots, l$, и $\psi_{nri}(\cdot)$, $r = 1, \dots, m$, что существенно ограничивало область применения предшествующих результатов из работ [3–9]. В третьих, в [3–9] в качестве предельного распределения рассматривалось только стандартное нормальное распределение.

§ 3. Вспомогательная теорема

3.1. В этом параграфе приведем и докажем вспомогательное утверждение, которое, с одной стороны, играет важную роль при выводе теоремы 1, а с другой — может иметь и самостоятельный интерес. Подчеркнем, что приводимое ниже неравенство (38) является ключевым местом при выводе указанных утверждений. Именно благодаря ему удается получить асимптотическую нормальность θ^{**}_n при предположениях, в которых от соответствующих функций требуется меньше, чем существование ограниченных первых производных.

Далее для произвольной последовательности $\{a_{ni}\}$ будем использовать обозначение
$$\mathbb{S}_m(a_{n\bullet}) := \Big(\sum a^m_{ni}\Big)^{1/m} \text{ при } m > 0, \quad \mathbb{S}(a_{n\bullet}) := \mathbb{S}_2(a_{n\bullet}). \tag{34}$$

Перечислим теперь те условия из предыдущего параграфа, которые нам здесь потребуются. Считая, что всюду в этом параграфе n и $k \le l_0$ — некоторые фиксированные числа (см. (A_0)), введем следующие ограничения.

(B_1) При всех $i = 1, \dots, n$ заданы случайные функции $\varphi_{nki}(\cdot)$ и случайные величины $\overline{\varphi}_{nki}$ такие, что условие (12) выполнено при I_n из (A_0) и некотором фиксированном $p_k \in (0, 1]$ и $\|\overline{\varphi}_{nki}\| < \infty$.

(B_2) При всех $i = 1, \dots, n$ заданы случайные величины u_{ni} и v_{ni} с нулевыми средними такие, что справедливо представление (2), а случайные векторы $W_{nki} := (u_{ni}, v_{ni}, \overline{\varphi}_{nki}, \varphi_{nki}(\cdot))$, $i = 1, \dots, n$, независимы в совокупности.

Поскольку $\|\overline{\varphi}_{nki}\| < \infty$, ввиду (11) при $t \in I_n$ у случайной величины $\varphi_{nki}(t) - \varphi_{nki}(\theta_n)$ существует математическое ожидание. Значит, в этом случае корректно ввести обозначение
$$\breve{\varphi}_{nki}(t) = (\varphi_{nki}(t) - \varphi_{nki}(\theta_n)) - \mathbf{E}(\varphi_{nki}(t) - \varphi_{nki}(\theta_n)), \quad t \in I_n. \tag{35}$$

Сохраним также обозначения, введенные в (14), и положим

$$\mathbb{C}_{n,k} := \sum \|\overline{\varphi}_{nki}\|\big(\|u_{ni}\|^{p_k} + d_{nu}^{p_k}\|v_{ni}\|^{p_k}\big) + d_{nu}^{p_k}\mathbb{S}(\|\overline{\varphi}_{nk\bullet}\|). \tag{36}$$

Наряду с условиями (B_1) и (B_2), также потребуется следующее более простое ограничение.

(B_0) Случайные векторы (u_{ni}, v_{ni}), $i = 1, \dots, n$, независимы в совокупности, имеют нулевые средние, и справедливо представление (2) при некотором действительном $\theta_n \in (-\infty, \infty)$. Пусть $\kappa_n > 0$ — некоторое действительное число.

Сформулируем основное утверждение настоящего параграфа.

Теорема 3. *Пусть выполнено условие* (B_0). *В этом случае существует такая случайная величина* $\tilde{\theta}_n$, *что одновременно верны следующие неравенства:*

$$\mathbf{P}(\tilde{\theta}_n \neq \theta_n^*) \le 4d_{nu}^2/\kappa_n^2 + 4d_{nv}^2, \quad |\tilde{\theta}_n - \theta_n| \le \kappa_n, \quad \mathbf{E}|\tilde{\theta}_n - \theta_n|^{2p_k} \le 4d_{nu}^{2p_k}. \tag{37}$$

Если дополнительно справедливы условия (B_1), (B_2), *то*

$$\mathbf{E}\left|\sum \breve{\varphi}_{nki}(\tilde{\theta}_n)\right| \le 3\cdot 2^{2p_k}\mathbb{C}_{n,k} \le 3\cdot 2^{2p_k+1} d_{nu}^{p_k}\big(1 + d_{nv}^{p_k}\big)\mathbb{S}_{2/(2-p_k)}(\|\overline{\varphi}_{nk\bullet}\|). \tag{38}$$

Замечание 6. В конце параграфа, в п. 3.4, будет приведен пример функций $\{\varphi_{nki}(\cdot)\}$, удовлетворяющих всем условиям теоремы 3 и таких, что

$$0 < \mathbf{E}\Big|\sum \breve{\varphi}_{nki}(\tilde{\theta}_n)\Big| \le 3\cdot 2^{2p_k+1}\big(1 + d_{nv}^{p_k}\big)d_{nu}^{p_k}\mathbb{S}_{2/(2-p_k)}(\|\overline{\varphi}_{nki}\|)$$
$$\le 3\cdot 2^4\mathbf{E}\sum \breve{\varphi}_{nki}(\tilde{\theta}_n) < \infty. \tag{39}$$

Таким образом, неравенство (38) неулучшаемо с точностью до константы.

Остальная часть параграфа посвящена доказательствам теоремы 3 и утверждения из замечания 6. Отметим, что если дисперсии каких-то величин u_{ni} и v_{ni} не конечны, то нужно лишь доказать центральное неравенство в (38), поэтому всюду далее предполагаем конечность вторых моментов величин u_{ni} и v_{ni}, $i = 1, \dots, n$.

Положим

$$u_i = u_{ni}, \quad v_i = v_{ni}, \quad \varphi_i = \varphi_{nki}, \quad \overline{\varphi}_i = \overline{\varphi}_{nki}, \quad W_i = W_{nki}, \quad p = p_k, \quad \mathbb{C} = \mathbb{C}_{n,k}$$

и условимся далее в этом параграфе опускать у всех используемых величин дополнительные индексы k и n.

3.2. Доказательство теоремы 3 с учетом неулучшаемости (с точностью до константы), центрального неравенства (38) представляет значительную техническую трудность, поэтому предварительно докажем ряд вспомогательных лемм. Положим

$$f_u(x) = \begin{cases} x, & \text{если } |x| \le \kappa/2, \\ (\kappa/2)\operatorname{sign} x, & \text{если } |x| \ge \kappa/2, \end{cases} \quad f_v(x) = \begin{cases} 1/2, & \text{если } x \le -1/2, \\ 1 + x, & \text{если } x \ge -1/2. \end{cases} \tag{40}$$

Поскольку ввиду (2)

$$\theta^* = \theta + u/(1+v) \quad \text{при } u := \sum u_i,\ v := \sum v_i, \tag{41}$$

то «срезки» $\tilde{\theta}$ величины θ^* введем, полагая

$$\begin{gathered} \tilde{\theta} = \theta + f_u(u)/f_v(v), \quad \tilde{\theta}^{(i)} = \theta + f_u(u^{(i)})/f_v(v - v_i), \\ \tilde{\theta}^{(ij)} = \tilde{\theta}^{(ji)} = \theta + f_u(u^{(ij)})/f_v(v - v_i - v_j) \end{gathered} \tag{42}$$

при $u^{(i)} = u - u_i$ и $u^{(ij)} = u^{(ji)} = u - u_i - u_j$.

Лемма 3.1. *Справедливы первые два неравенства в* (37). *Кроме того,*

$$|\tilde\theta-\tilde\theta^{(i)}|\le\tau_i:=2|u_i|+4|u^{(i)}||v_i|,\quad |\tilde\theta^{(j)}-\tilde\theta^{(ji)}|\le\tau_{ji}:=2|u_i|+4|u^{(ji)}||v_i| \tag{43}$$

при всех i и $j\neq i$.

Доказательство. Ввиду условия (B_0) и обозначений из (14) и (41) имеем

$$\mathbf{E}u=\mathbf{E}v=0,\quad \mathbf{E}u^2=d_u^2,\quad \mathbf{E}v^2=d_v^2. \tag{44}$$

Поэтому с учетом определений (41), (42) и неравенства Чебышёва

$$\mathbf{P}(\tilde\theta\neq\theta^*)\le\mathbf{P}(|u|\ge\kappa/2)+\mathbf{P}(v\le-1/2)\le 4\frac{\mathbf{E}u^2}{\kappa^2}+\frac{\mathbf{E}v^2}{(1/2)^2}=\frac{4d_u^2}{\kappa^2+4d_v^2}.$$

Тем самым доказали первое неравенство из (37). Из определения (40) получаем, что $|f_u(u)|\le\kappa/2$ и $|f_v(v)|\ge1/2$. Следовательно, ввиду определения (42) $|\tilde\theta-\theta|=|f_u(u)|/|f_v(v)|\le\kappa$, т. е. выполнено второе неравенство из (37).

Используя определение (42), имеем

$$\tilde\theta-\tilde\theta^{(i)}=\frac{f_u(u)}{f_v(v)}-\frac{f_u(u^{(i)})}{f_v(v-v_i)}$$
$$=\frac{f_u(u)-f_u(u^{(i)})}{f_v(v)}-\frac{f_u(u^{(i)})(f_v(v-v_i)-f_v(v))}{f_v(v)f_v(v-v_i)}. \tag{45}$$

Ясно, что $|f_u(u)-f_u(u^{(i)})|\le|u_i|,\quad |f_v(v)-f_v(v-v_i)|\le|v_i|,$

$$|f_v(x)|\ge1/2,\quad |f_u(x)|\le|x|. \tag{46}$$

Подставляя эти соотношения в (45), получаем первую оценку из (43):

$$|\tilde\theta-\tilde\theta^{(i)}|\le2|u_i|+4|u^{(i)}||v_i|.$$

Для доказательства второго неравенства из (43) нужно еще раз повторить эти рассуждения, полагая $u_j=v_j=0$. $\square$

Лемма 3.2. *При всех i и $j\neq i$ справедливы соотношения*

$$\mathbf{E}|\tilde\theta^{(i)}-\theta|^{2p}\le4^pd_u^{2p},\quad \mathbf{E}\tau_i^{2p}\le\nu_i^2:=\big(2^p\|u_i\|^p+4^pd_u^p\|v_i\|^p\big)^2,\quad \mathbf{E}\tau_{ji}^{2p}\le\nu_i^2. \tag{47}$$

Кроме того, верно последнее неравенство в (37).

Доказательство. Из (42) и (46) имеем

$$|\tilde\theta-\theta|=\left|\frac{f_u(u)}{f_v(v)}\right|\le2|u|,\quad |\tilde\theta^{(i)}-\theta|=\frac{|f_u(u^{(i)})|}{|f_v(v-v_i)|}\le2|u^{(i)}|.$$

Следовательно, с учетом (44)

$$\mathbf{E}|\tilde\theta-\theta|^2\le4\mathbf{E}|u|^2=4d_u^2,\quad \mathbf{E}|\tilde\theta^{(i)}-\theta|^2\le4\mathbf{E}|u^{(i)}|^2\le4\mathbf{E}|u|^2=4d_u^2,$$

т. е. выполнены последнее неравенство в (37) и первое соотношение в (47) при $p=1$. Кроме того, в силу независимости $u^{(i)}$ и v_i, а также очевидной оценки $\|u^{(i)}\|\le\|u\|=d_u$ получаем, что

$$\|\tau_i\|=\|2|u_i|+4|u^{(i)}||v_i|\|\le2\|u_i\|+4d_u\|v_i\|. \tag{48}$$

Это соотношение доказывает второе неравенство в (47) при $p = 1$. Чтобы получить третье неравенство в (47) при $p = 1$, достаточно в (48) положить $u_j = v_j = 0$.

Тем самым мы доказали все утверждения леммы при $p = 1$. Но отсюда и из очевидного неравенства $\mathbf{E}\xi^{2p} \le (\mathbf{E}\xi^2)^p$ следует справедливость всех утверждений леммы и при $0 < p \le 1$. $\square$

Всюду далее, не ограничивая общности, можно считать, что $\varphi_i(\theta) = 0$. Действительно, пусть $\varphi_{oi}(t) = \varphi_i(t) - \varphi_i(\theta)$. Тогда $\breve{\varphi}_{oi}(t) = \breve{\varphi}_i(t)$, при этом $\varphi_{oi}(\theta) = 0$. Нам также неоднократно потребуются следующие обозначения:

$$\delta_i = \varphi_i(\tilde{\theta}) - \varphi_i(\tilde{\theta}^{(i)}), \quad \delta_{ij} = \varphi_i(\tilde{\theta}^{(i)}) - \varphi_i(\tilde{\theta}^{(ij)}). \tag{49}$$

Лемма 3.3. *При всех i и $j \ne i$ верны следующие неравенства:*

$$\mathbf{E}(\varphi_i(\tilde{\theta}^{(i)}))^2 \le 4^p d_u^{2p} \|\overline{\varphi}_i\|^2, \quad \mathbf{E}\delta_{ji}^2 \le \nu_i^2 \|\overline{\varphi}_j\|, \quad \mathbf{E}|\delta_i| \le \|\overline{\varphi}_i\| \nu_i.$$

Доказательство. Используя определения из (49) и учитывая условие (B_1), имеем

$$|\varphi_i(\tilde{\theta}^{(i)})| = |\varphi_i(\tilde{\theta}^{(i)}) - \varphi_i(\theta)| \le \overline{\varphi}_i |\tilde{\theta}^{(i)} - \theta|^p, \ |\delta_{ji}| \le \overline{\varphi}_i \tau_{ji}^p, \ |\delta_i| \le \overline{\varphi}_i |\tilde{\theta} - \tilde{\theta}^{(i)}|^p. \tag{50}$$

При выводе первого соотношения нужно учесть, что $\varphi_i(\theta) = 0$, а при выводе второго неравенства в (50) воспользоваться еще второй оценкой в (43).

Учитывая независимость величин $\tilde{\theta}^{(i)}$ и $\overline{\varphi}_i$, из первой оценки в (50) находим

$$\mathbf{E}(\varphi_i(\tilde{\theta}^{(i)}))^2 \le \mathbf{E}\big(\overline{\varphi}_i^2 |\tilde{\theta}^{(i)} - \theta|^{2p}\big) = \mathbf{E}|\tilde{\theta}^{(i)} - \theta|^{2p} \mathbf{E}\overline{\varphi}_i^2 \le 4^p d_u^{2p} \|\overline{\varphi}_i\|^2. \tag{51}$$

Выше при выводе заключительного неравенства в (51) использовалось первое утверждение леммы 3.2. Из (51) вытекает первое утверждение леммы 3.3.

Аналогично второе неравенство в (50), независимость величин τ_{ji} и $\overline{\varphi}_j$ и третья оценка в (47) влекут следующую цепочку соотношений:

$$\mathbf{E}\delta_{ji}^2 \le \mathbf{E}\big(\overline{\varphi}_j^2 \tau_{ji}^{2p}\big) = \mathbf{E}\overline{\varphi}_j^2 \cdot \mathbf{E}\tau_{ji}^{2p} \le \|\overline{\varphi}_i\|^2 \nu_i^2.$$

Из третьей оценки в (50), первого утверждения в (43) и второго утверждения леммы 3.2 получаем, что

$$\mathbf{E}|\delta_i| \le \mathbf{E}(\overline{\varphi}_i |\tilde{\theta} - \tilde{\theta}^{(i)}|^p) \le \|\overline{\varphi}_i\| \mathbf{E}(|\tilde{\theta} - \tilde{\theta}^{(i)}|^{2p})^{1/2} \le \|\overline{\varphi}_i\| \big(\mathbf{E}\tau_i^{2p}\big)^{1/2} \le \|\overline{\varphi}_i\| \nu_i. \quad \square$$

Лемма 3.4. *При всех i имеет место следующая оценка:*

$$\mathbf{E}|\tilde{\delta}_i| \le 2\nu_i \|\overline{\varphi}_i\| \quad \text{при } \tilde{\delta}_i = \breve{\varphi}_i(\tilde{\theta}) - \breve{\varphi}_i(\tilde{\theta}^{(i)}).$$

Доказательство. Определение (35) функций $\breve{\varphi}_i(\cdot)$ и определение (49) величин δ_i дают равенство $\tilde{\delta}_i = \delta_i - \mathbf{E}\delta_i$. Значит, $\mathbf{E}|\tilde{\delta}_i| \le \mathbf{E}|\delta_i| + |\mathbf{E}\delta_i| \le 2\mathbf{E}|\delta_i|$. Подставляя теперь в это неравенство последнюю оценку из леммы 3.3, получаем утверждение леммы. $\square$

3.3. Приступим непосредственно к доказательству утверждения (38) теоремы 3. Введем следующие обозначения:

$$\Delta_1 = \sum(\breve{\varphi}_i(\tilde{\theta}) - \breve{\varphi}_i(\tilde{\theta}^{(i)})) \equiv \sum \tilde{\delta}_i, \quad \Delta_2 = \sum \breve{\varphi}_i^2(\tilde{\theta}^{(i)}),$$
$$\Delta_3 = \sum \sum_{j \ne i} \breve{\varphi}_i(\tilde{\theta}^{(i)}) \breve{\varphi}_j(\tilde{\theta}^{(j)}). \tag{52}$$

Из определений (35) и (52) имеем

$$\sum \breve{\varphi}_i(\tilde{\theta}) = \Delta_1 + \sum \breve{\varphi}_i(\tilde{\theta}^{(i)}), \quad \Big(\sum \breve{\varphi}_i(\tilde{\theta}^{(i)})\Big)^2 = \Delta_2 + \Delta_3.$$

Поэтому $\mathbf{E}\big|\sum \breve{\varphi}_i(\tilde{\theta})\big| \le \mathbf{E}|\Delta_1| + \mathbf{E}(\Delta_2+\Delta_3)^{1/2} \le \mathbf{E}|\Delta_1| + (\mathbf{E}\Delta_2+\mathbf{E}\Delta_3)^{1/2}$. Значит,

$$\mathbf{E}\Big|\sum \breve{\varphi}_i(\tilde{\theta})\Big| \le \mathbf{E}|\Delta_1| + (\mathbf{E}\Delta_2)^{1/2} + |\mathbf{E}\Delta_3|^{1/2}. \tag{53}$$

Таким образом, доказательство соотношения (38) свелось к задаче получения оценок для трех слагаемых в правой части неравенства (53). При этом наиболее сложным делом является получение оценок для $|\mathbf{E}\Delta_3|$. Важную роль при этом будет играть

Лемма 3.5. *Для любых i и $j \ne i$*

$$\mathbf{E}\breve{\varphi}_i(\tilde{\theta}^{(i)})\breve{\varphi}_j(\tilde{\theta}^{(j)}) = \mathbf{E}\tilde{\delta}_{ij}\tilde{\delta}_{ji} \quad \text{при } \tilde{\delta}_{ij} = \breve{\varphi}_i(\tilde{\theta}^{(i)}) - \breve{\varphi}_i(\tilde{\theta}^{(ij)}). \tag{54}$$

Кроме того,

$$\mathbf{E}\breve{\varphi}_i^2(\tilde{\theta}^{(i)}) \le \mathbf{E}\varphi_i^2(\tilde{\theta}^{(i)}), \quad \mathbf{E}\tilde{\delta}_{ij}^2 \le \mathbf{E}\delta_{ij}^2, \quad \mathbf{E}|\tilde{\delta}_{ij}\tilde{\delta}_{ji}| \le \big(\mathbf{E}\delta_{ij}^2\mathbf{E}\delta_{ji}^2\big)^{1/2}. \tag{55}$$

Доказательство. Условимся через $\mathbf{E}_i Z$ обозначать условное математическое ожидание, взятое при условии, что при всех $j \ne i$ фиксированы значения независимых случайных векторов W_j, $j = 1, \dots, n$, определенных в условии (B_2). Нетрудно заметить, что в этом случае из определения (35) вытекает следующее равенство:

$$\breve{\varphi}_i(Z) = \varphi_i(Z) - \mathbf{E}_i\varphi_i(Z) \quad \text{при } Z = \tilde{\theta}^{(i)} \text{ и } Z = \tilde{\theta}^{(ij)}, \tag{56}$$

поскольку во всех перечисленных в (56) вариантах случайная величина Z не зависит от случайного вектора W_i, что очень существенно для справедливости (56). Таким образом, из определений (49) и равенств (56) получаем

$$0 = \mathbf{E}_i\breve{\varphi}_i(\tilde{\theta}^{(i)}) = \mathbf{E}_i\breve{\varphi}_i(\tilde{\theta}^{(ij)}) = \mathbf{E}_i\tilde{\delta}_{ij} \quad \text{и} \quad 0 = \mathbf{E}_j\breve{\varphi}_j(\tilde{\theta}^{(j)})$$

при всех i и $j \ne i$. Следовательно,

$$\begin{gathered}\mathbf{E}\breve{\varphi}_i(\tilde{\theta}^{(ij)})\breve{\varphi}_j(\tilde{\theta}^{(j)}) = \mathbf{E}\mathbf{E}_j\breve{\varphi}_i(\tilde{\theta}^{(ij)})\breve{\varphi}_j(\tilde{\theta}^{(j)}) = \mathbf{E}\breve{\varphi}_i(\tilde{\theta}^{(ij)})\mathbf{E}_j\breve{\varphi}_j(\tilde{\theta}^{(j)}) = 0,\\ \mathbf{E}\tilde{\delta}_{ij}\breve{\varphi}_j(\tilde{\theta}^{(ji)}) = \mathbf{E}\mathbf{E}_i\breve{\varphi}_j(\tilde{\theta}^{(ji)})\tilde{\delta}_{ij} = \mathbf{E}\breve{\varphi}_j(\tilde{\theta}^{(ji)})\mathbf{E}_i\tilde{\delta}_{ij} = 0.\end{gathered} \tag{57}$$

Из определения (54) величины $\tilde{\delta}_{ij}$ находим

$$\tilde{\delta}_{ij}\tilde{\delta}_{ji} = \tilde{\delta}_{ij}\breve{\varphi}_j(\tilde{\theta}^{(j)}) - \tilde{\delta}_{ij}\breve{\varphi}_j(\tilde{\theta}^{(ji)}) = \breve{\varphi}_i(\tilde{\theta}^{(i)})\breve{\varphi}_j(\tilde{\theta}^{(j)}) - \breve{\varphi}_i(\tilde{\theta}^{(ij)})\breve{\varphi}_j(\tilde{\theta}^{(j)}) - \tilde{\delta}_{ij}\breve{\varphi}_j(\tilde{\theta}^{(ji)}).$$

Если возьмем математические ожидания от обеих частей этого тождества и воспользуемся равенствами (57), то получим (54).

Докажем неравенства (55). Используя еще раз определения (35), (49) и (54), находим, что

$$\begin{gathered}\mathbf{E}\breve{\varphi}_i^2(\tilde{\theta}^{(i)}) = \mathbf{E}\mathbf{E}_i(\varphi_i(\tilde{\theta}^{(i)}) - \mathbf{E}_i\varphi_i(\tilde{\theta}^{(i)}))^2 \le \mathbf{E}\mathbf{E}_i\varphi_i^2(\tilde{\theta}^{(i)}) = \mathbf{E}\varphi_i^2(\tilde{\theta}^{(i)}),\\ \mathbf{E}\tilde{\delta}_{ij}^2 = \mathbf{E}\mathbf{E}_i(\delta_{ij} - \mathbf{E}_i\delta_{ij})^2 \le \mathbf{E}\mathbf{E}_i\delta_{ij}^2 = \mathbf{E}\delta_{ij}^2.\end{gathered} \tag{58}$$

При выводе (58) существенно использован тот факт, что дисперсия любой случайной величины не больше ее второго момента. Используя теперь вторую оценку в (58), имеем

$$\mathbf{E}|\tilde{\delta}_{ij}\tilde{\delta}_{ji}| \le \big(\mathbf{E}\tilde{\delta}_{ij}^2\big)^{1/2}\big(\mathbf{E}\tilde{\delta}_{ji}^2\big)^{1/2} \le \big(\mathbf{E}\delta_{ij}^2\mathbf{E}\delta_{ji}^2\big)^{1/2}.$$

Тем самым выведено и третье утверждение в (55). □

Упростим обозначения, полагая $\mathbb{S}_m = \mathbb{S}_m(\|\overline{\varphi}_\bullet\|)$, $\mathbb{S} = \mathbb{S}_2$, и оценим величины, определенные в (52). Ввиду лемм 3.3–3.5 получаем следующие оценки:

$$\begin{gathered}\mathbf{E}|\Delta_1| \le \sum \mathbf{E}\tilde{\delta}_i \le 2\sum \nu_i\|\overline{\varphi}_i\|, \quad \mathbf{E}\Delta_2 \le \sum \mathbf{E}\varphi_i^2(\tilde{\theta}^{(i)}) \le 2^{2q}d_u^{2q}\sum\|\overline{\varphi}_i\|^2, \\ |\mathbf{E}\Delta_3| \le \sum\sum_{j\ne i}|\mathbf{E}\breve{\varphi}_i(\tilde{\theta}^{(i)})\breve{\varphi}_j(\tilde{\theta}^{(j)})| \le \sum\sum_{j\ne i}(\|\overline{\varphi}_i\|\nu_i\|\overline{\varphi}_j\|\nu_j) \le \Big(\sum\|\overline{\varphi}_i\|\nu_i\Big)^2.\end{gathered} \tag{59}$$

При выводе третьего соотношения в (59) учтено, что в силу (54), (55) и леммы 3.3

$$|\mathbf{E}\breve{\varphi}_i(\tilde{\theta}^{(i)})\breve{\varphi}_j(\tilde{\theta}^{(j)})| = |\mathbf{E}\tilde{\delta}_{ij}\tilde{\delta}_{ji}| \le \mathbf{E}|\tilde{\delta}_{ij}\tilde{\delta}_{ji}| \le \big(\mathbf{E}\delta_{ij}^2\mathbf{E}\delta_{ji}^2\big)^{1/2} \le \|\overline{\varphi}_i\|\nu_i\|\overline{\varphi}_j\|\nu_j.$$

Теперь из (53) и (59) с учетом определений (47) и (36) находим, что

$$\mathbf{E}\Big|\sum\breve{\varphi}_i(\tilde{\theta})\Big| \le 3\sum\|\overline{\varphi}_i\|\nu_i + 2^p d_u^p\mathbb{S} \le 3\cdot 2^{2p}\mathbb{C}. \tag{60}$$

Тем самым вывели первое неравенство в (38). Чтобы получить вторую оценку в (38), воспользуемся неравенством Гёльдера:

$$\sum\|\overline{\varphi}_i\|\cdot\|u_i\|^p \le \Big(\sum\|\overline{\varphi}_i\|^{2/(2-p)}\Big)^{(2-p)/2}\Big(\sum\|u_i\|^2\Big)^{p/2} = d_u^q\mathbb{S}_{2/(2-p)},$$

$$\sum\|\overline{\varphi}_i\|\cdot\|v_i\|^p \le \Big(\sum\|\overline{\varphi}_i\|^{2/(2-p)}\Big)^{(2-p)/2}\Big(\sum\|v_i\|^2\Big)^{p/2} = d_v^q\mathbb{S}_{2/(2-p)}.$$

Эти оценки и определения (34), (36) дают неравенство

$$\mathbb{C} \le d_u^p(1+d_v^p)\mathbb{S}_{2/(2-p)} + d_u^p\mathbb{S},$$

из которого следует требуемое утверждение леммы, поскольку $\mathbb{S}\equiv\mathbb{S}_2\le\mathbb{S}_{2/(2-p)}$ ввиду монотонности по m норм $\mathbb{S}_m(\cdot)$. □

Таким образом, соотношение (38) доказано полностью. Неравенства из (37) установлены в леммах 3.1 и 3.2. Теорема 3 доказана. □

3.4. В этом пункте подробно рассмотрим один частный случай изучаемой в данном параграфе задачи, о котором уже говорилось в замечании 6 и который позволит сделать вывод о неулучшаемости утверждения (38) теоремы 3. Пусть

$$\begin{gathered}\mathbf{P}(\xi=1)=\mathbf{P}(\xi=-1)=1/2, \quad \sigma=\kappa/2, \quad 0<\kappa<1, \quad K>0, \\ u_1=\sigma\xi, \quad v_1=\sigma\xi/2, \quad \gamma_1(t)=K|t-1|^p\operatorname{sign}(t-1), \quad \varphi_1(t)=u_1\gamma_1(t).\end{gathered} \tag{61}$$

Лемма 3.6. *Пусть верны предположения* (61) *и* $u_i=v_i=0=\varphi_i(\cdot)$ *при всех* $i\ge 2$. *В этом случае при* $\theta=1$ *имеет место* (39).

Доказательство. При выполнении условий леммы из определений (41) и (14) немедленно получаем, что

$$2v=\sigma\xi=u, \quad \theta^*-\theta\equiv\theta^*-1=\sigma\xi/(1+\sigma\xi/2), \quad |\xi|=1, \quad 2d_v=\sigma=d_u. \tag{62}$$

В частности, $|v|\le|u|\le\sigma=\kappa/2<1/2$ при $0<\kappa<1$. В силу (42) это означает, что $\tilde{\theta}=\theta^*$. При $\theta=1$ из определения (35) и равенств (61) и (62) находим, что

$$\breve{\varphi}_1(\tilde{\theta})=\breve{\varphi}_1(\theta^*)=\varphi_1(\theta^*)=\sigma\xi\cdot K|\sigma\xi|^p\operatorname{sign}(\xi)/|1+\sigma\xi/2|^p=K\sigma^{1+p}/|1+\sigma\xi/2|^p.$$

Из этого соотношения и неравенства Иенсена заключаем, что

$$\mathbf{E}\sum \breve{\varphi}_i(\tilde{\theta}) = \mathbf{E}\breve{\varphi}_1(\tilde{\theta}) = \mathbf{E}\frac{K\sigma^{1+p}}{|1+\sigma\xi/2|^p} \geq \frac{K\sigma^{1+p}}{|1+\sigma\mathbf{E}\xi/2|^p} = K\sigma^{1+p}. \tag{63}$$

Пусть $t_2 - t_1 = 2h > 0$. Нетрудно понять, что в этом случае

$$\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1) = \int\limits_{t_1}^{t_2} \gamma_1'(t)\,dt = K \int\limits_{t_1}^{t_1+2h} p|t|^{p-1}\,dt$$

$$\leq K \int\limits_{-h}^{h} p|t|^{p-1}dt = 2Kh^p = 2^{1-p}K|t_2 - t_1|^p.$$

Отсюда и из (61) находим, что

$$|\varphi_1(t_2) - \varphi_1(t_1)| \leq |u_1| \cdot 2^{1-p}K|t_2 - t_1|^p = \sigma|\xi| \cdot 2^{1-p}K|t_2 - t_1|^p = 2^{1-p}K\sigma|t_2 - t_1|^p.$$

Таким образом, при $i = 1$ неравенство (12) верно с $\overline{\varphi}_1 = 2^{1-p}K\sigma$. Поскольку $\overline{\varphi}_i = \varphi_i(\cdot) = 0$ при $i \geq 2$ по предположению, из определений (34) и (36) получаем, что $\mathbb{S}_m = \|\overline{\varphi}_1\| = 2^{1-p}K\sigma$ при всех $m > 0$. Отсюда и из (62) следует, что

$$3 \cdot 2^{2p+1}\big(1 + d_v^p\big)d_u^p\mathbb{S}_{2/(2-p)} = 3 \cdot 2^{2p+1}(1 + (\sigma/2)^p)\sigma^p 2^{1-p}K\sigma < 3 \cdot 2^4 K\sigma^{1+p}, \tag{64}$$

поскольку $\sigma < 1/2$ ввиду (61).

Из (64), (63) и (68) вытекают все неравенства, требуемые в (39). $\square$

§ 4. Доказательство основных результатов

Поясним схему доказательства основных результатов. В первую очередь ниже, в п. 4.1, будет приведена лемма 4.1, которая позволяет, в частности, оценку первого шага θ_n^* заменить более просто устроенной величиной $\tilde{\theta}_n$. Затем будут сформулированы леммы 4.2–4.4, которые являются основными при выводе теоремы 1, и леммы 4.5–4.7, на которых основан вывод следствий 1 и 2. В п. 4.2 из этих лемм будут извлечены все утверждения работы, сформулированные в § 2. Доказательству основных лемм посвящен п. 4.3. Подчеркнем, что ключевая теорема 3 используется только при выводе леммы 4.2. При выводе остальных лемм используются более простые леммы 4.8, 4.9, которые сформулированы и доказаны в начале п. 4.3.

4.1. Воспользуемся результатами § 3. Нам неоднократно потребуется следующее утверждение, которое немедленно вытекает из теоремы 3.

Лемма 4.1. *Пусть выполнены условия* (A_0)–(A_3). *Тогда существует такая случайная величина* $\tilde{\theta}_n$, *что одновременно верны все соотношения из* (37). *Кроме того,*

$$\mathbf{P}(\theta_n^* \neq \tilde{\theta}_n) \to 0. \tag{65}$$

Всюду в дальнейшем через $\tilde{\theta}_n$ будем обозначать только случайную величину, участвующую в лемме 4.1. Благодаря свойствам (37) можно интерпретировать $\tilde{\theta}_n$ как некоторую срезку величины θ_n^*. В частности, лемма 4.1 позволяет использовать ограниченную величину $\tilde{\theta}_n$ вместо θ_n^* и дает возможность при изучении функций от оценки θ_n^* налагать ограничения на поведение этих функций только на отрезке I_n.

Сохраним обозначения, введенные в (34). При выводе теорем 1 и 2 и следствий 1 и 2 потребуются следующие вспомогательные утверждения, вывод которых отложим до п. 4.3.

Лемма 4.2. *Пусть выполнены условия* (A_0)–(A_4). *Тогда*

$$\tilde{\rho}_{nv} := \sum V_{ni}(\tilde{\theta}_n)/A_n - 1 \xrightarrow{p} 0.$$

Лемма 4.3. *Если выполнены условия* (A_0)–(A_3) *и условие* (18), *то*

$$\tilde{\rho}_{nu} := \sum \breve{U}_{noi}(\tilde{\theta}_n)/B_n \xrightarrow{p} 0 \quad \text{при } U_{noi}(t) = \sum_{k=1}^{l_0} \varphi_{nki}(t),$$

где операция ˘ *введена в* (35).

Лемма 4.4. *Пусть выполнены условия* (A_0)–(A_3) *и условие* (19). *Тогда*

$$\tilde{\rho}_{nou} := \sum \overline{U}_{noi}(\tilde{\theta}_n)/B_n \xrightarrow{p} 0 \quad \text{при } \overline{U}_{noi}(t) := \sum_{k=l_0+1}^{l} (\varphi_{nki}(t) - \varphi_{nki}(\theta_n)).$$

Лемма 4.5. *Пусть выполнено* (24), *справедливы условия* (A_0)–(A_3) *и условия* (16), (28). *Тогда*

$$\tilde{\rho}_{nuv} := (\mathbb{S}(U^*_{n\bullet}(\tilde{\theta}_n, \theta^{**}_n)) - \mathbb{S}(U_{n\bullet}(\tilde{\theta}_n)))/B_n \xrightarrow{p} 0.$$

Лемма 4.6. *Пусть выполнены предположения* (A_0)–(A_3) *и условие* (31). *Тогда*

$$\tilde{\rho}_{nvu} := (\mathbb{S}(U^*_{n\bullet}(\tilde{\theta}_n, \tilde{\theta}_n)) - \mathbb{S}(U_{n\bullet}(\tilde{\theta}_n)))/B_n \xrightarrow{p} 0.$$

Лемма 4.7. *Если справедливы условия* (A_0)–(A_3) *и условия* (18), (29) *и* (31), *то*

$$\tilde{\rho}_{nuu} := \mathbb{S}(U_{n\bullet}(\tilde{\theta}_n))/|B_n| - 1 \xrightarrow{p} 0.$$

4.2. Обозначим через ρ^*_{nv}, ρ^*_{nu}, ρ^*_{nou}, ρ^*_{nuv}, ρ^*_{nvu} и ρ^*_{nuu} величины, которые получатся при замене величины $\tilde{\theta}_n$ на θ^*_n в определениях (см. леммы 4.2–4.7) величин $\tilde{\rho}_{nv}$, $\tilde{\rho}_{nu}$, $\tilde{\rho}_{nou}$, $\tilde{\rho}_{nuv}$, $\tilde{\rho}_{nvu}$ и $\tilde{\rho}_{nuu}$ соответственно.

Доказательство теоремы 1. Ввиду сходимости (65) леммы 4.1

$$\mathbf{P}(\rho^*_{nv} \neq \tilde{\rho}_{nv}) \to 0, \quad \mathbf{P}(\rho^*_{nu} \neq \tilde{\rho}_{nu}) \to 0, \quad \mathbf{P}(\rho^*_{nou} \neq \tilde{\rho}_{nou}) \to 0,$$

поэтому в силу соответственно лемм 4.2–4.4

$$\rho^*_{nv} \xrightarrow{p} 0, \quad \rho^*_{nu} \xrightarrow{p} 0, \quad \rho^*_{nou} \xrightarrow{p} 0. \tag{66}$$

Для величин $U_{ni}(\theta^*_n)$, введенных в (15), справедливо равенство

$$U_{ni}(\theta^*_n) = \breve{U}_{noi}(\theta^*_n) + U_{ni}(\theta_n) + \Delta_{ni}(\theta^*_n) + \overline{U}_{noi}(\theta^*_n), \tag{67}$$

при выводе которого учтены обозначения (20), (35) и обозначения из лемм 4.3 и 4.4. Следовательно, используя (4), для величины W_n из (21) получаем представление

$$W_n \equiv \frac{\theta^{**}_n - \theta_n}{d_n} = \frac{\sum U_{ni}(\theta^*_n)/B_n}{\sum V_{ni}(\theta^*_n)/A_n} = \frac{w^*_n + \rho^*_{nu} + \rho^*_{nou}}{1 + \rho^*_{nv}}. \tag{68}$$

При выводе соотношения (68) использованы также обозначения w^*_n, ρ^*_{nu}, ρ^*_{nou} и ρ^*_{nv}, введенные в (21) и после леммы 4.7.

Из (68) нетрудно получить следующие два тождества:

$$W_n - w_n^* = \frac{\rho_{nu}^* + \rho_{nou}^* - w_n^*\rho_{nv}^*}{1+\rho_{nv}^*}, \tag{69}$$

$$W_n - w_n^* = \rho_{nu}^* + \rho_{nou}^* - W_n\rho_{nv}^*. \tag{70}$$

Если семейство распределений $\{w_n^*\}$ компактно, то сходимость $W_n - w_n^* \xrightarrow{p} 0$ следует из сходимостей (66) и тождества (69). Если же компактно семейство распределений $\{W_n\}$, то для вывода сходимости $W_n - w_n^* \xrightarrow{p} 0$ нужно с учетом (66) воспользоваться тождеством (70).

Доказательство теоремы 2. Если выполнено условие (23), т. е. $w_n^* \Rightarrow \eta$, то семейство распределений $\{w_n^*\}$ компактно и $W_n \Rightarrow \eta$ вследствие теоремы 1. Тем самым достаточность условия (23) для сходимости (24) доказана.

Если же $W_n \Rightarrow \eta$, то компактно семейство распределений $\{W_n\}$ и из теоремы 1 немедленно получаем сходимость $w_n^* \Rightarrow \eta$, т. е. установлена и необходимость условия (23) для сходимости (24). $\square$

Доказательство следствия 1. Используя (4), (30), (34) и (68), а также обозначения ρ_{nuv}^* и ρ_{nuu}^*, введенные после леммы 4.7, имеем

$$W_n^{**} \equiv \frac{\theta_n^{**} - \theta_n}{d_n^*(\theta_n^{**})} = \frac{\sum U_{ni}(\theta_n^*)/B_n}{\mathbb{S}(U_{n\bullet}^*(\theta_n^*, \theta_n^{**}))/B_n} = \frac{w_n^* + \rho_{nu}^* + \rho_{nou}^*}{1+\rho_{nuv}^* + \rho_{nuu}^*}. \tag{71}$$

Поскольку $\mathbf{P}(\rho_{nuv}^* \neq \tilde\rho_{nuv}) \to 0$ и $\mathbf{P}(\rho_{nuu}^* \neq \tilde\rho_{nuu}) \to 0$ в силу леммы 4.1, ввиду лемм 4.5 и 4.7

$$\rho_{nuv}^* \xrightarrow{p} 0 \quad \text{и} \quad \rho_{nuu}^* \xrightarrow{p} 0. \tag{72}$$

Утверждение следствия, т. е. сходимость $W_n^{**} \Rightarrow \eta$, вытекает из представления (71) и сходимостей (66) и (72), поскольку $w_n^* \Rightarrow \eta$ в силу (23). $\square$

Доказательство следствия 2. Сравнивая определения величин $d_n^*(\theta_n^{**})$ и $d_n^*(\theta_n^*)$ (см. (27)), из (71) немедленно получаем, что

$$W_n^* \equiv \frac{\theta_n^{**} - \theta_n}{d_n^*(\theta_n^*)} = \frac{\sum U_{ni}(\theta_n^*)/B_n}{\mathbb{S}(U_{n\bullet}^*(\theta_n^*, \theta_n^*))/B_n} = \frac{w_n^* + \rho_{nu}^* + \rho_{nou}^*}{1+\rho_{nvu}^* + \rho_{nuu}^*}. \tag{73}$$

Так как по лемме 4.1 $\mathbf{P}(\rho_{nvu}^* \neq \tilde\rho_{nvu}) \to 0$, то $\rho_{nvu}^* \xrightarrow{p} 0$ в силу леммы 4.6, поэтому сходимость $W_n^* \Rightarrow \eta$ следует из представления (73), сходимостей из (66), (72) и условия $w_n^* \Rightarrow \eta$. $\square$

Доказательство утверждений из замечания 1. Покажем прежде всего, что

$$1 + \sum v_{ni} \xrightarrow{p} 1 \quad \text{и} \quad \sum V_{ni}(\theta_n^*)/A_n \xrightarrow{p} 1. \tag{74}$$

Действительно, согласно условию (A_2) $\mathbf{E}\big(\sum v_{ni}\big) = 0$ и $\mathbf{D}\big(\sum v_{ni}\big) = d_{nv}^2 \to 0$, что доказывает первую сходимость в (74). Вторая сходимость в (74) немедленно следует из леммы 4.2 и соотношения в (65).

Нетрудно заметить, что если имеют место обе сходимости в (74), то знаменатели в (2) и (4) могут обращаться в нуль лишь с вероятностями, стремящимися к нулю. Таким образом, случайные величины θ_n^* и θ_n^{**} определены с вероятностями, стремящимися к единице.

При всех $t \in I_n$ и $k = 1, \dots, l_0$ имеем

$$|\mathbf{E}(\varphi_{nki}(t) - \varphi_{nki}(\theta_n))| \le \mathbf{E}|\varphi_{nki}(t) - \varphi_{nki}(\theta_n)| \le \mathbf{E}\overline{\varphi}_{nki}|t-\theta_n| < \infty. \tag{75}$$

При выводе (75) использованы условие (A_1) и конечность $\mathbf{E}\overline{\varphi}^2_{nki}$ (см. условие (18)). Из соотношения (75) и определения (20) следует, что $\Delta_{ni}(t)$ определены при всех $t \in I_n$. Чтобы получить, что величины $\sum \Delta_{ni}(\theta_n^*)$ определены с вероятностью, стремящейся к единице, нужно еще воспользоваться леммой 4.1. $\square$

Доказательство утверждений из замечания 1. Нетрудно заметить, что условия (18) и (25) можно соответственно переписать в следующем эквивалентном виде:

$$\sum_{k=1}^{l_0} \mathbb{C}_{n,k}/B_n \to 0, \quad \sum_{k=1}^{l_0} d_{nu}^{p_k} \mathbb{S}_{2/(2-p_k)}(\|\overline{\varphi}_{nk\bullet}\|)/B_n \to 0. \tag{76}$$

При выводе первого соотношения в (76) использовано определение (36), а при выводе второго учтено, что $\left(\sum \big(\mathbf{E}\overline{\varphi}^2_{nki}\big)^{1/(2-p_k)}\right)^{(2-p_k)/2} \equiv \mathbb{S}_{2/(2-p_k)}(\|\overline{\varphi}_{nk\bullet}\|)$ ввиду (34). Остается заметить, что из неравенства (38) при выполнении соответствующих условий

$$\mathbb{C}_{n,k} \le 2\big(1 + d_{nv}^{p_k}\big) d_{nu}^{p_k} \mathbb{S}_{2/(2-p_k)}(\|\overline{\varphi}_{nk\bullet}\|), \quad k = 1, \dots, l_0. \tag{77}$$

Поскольку $d_{nv} \to 0$ согласно (14), из оценок (77) следует, что второе условие в (76) влечет первую сходимость в (76). $\square$

4.3. Прежде чем перейти к доказательству лемм 4.2–4.7, рассмотрим два вспомогательных утверждения.

Лемма 4.8. *Пусть выполнено условие (A_0) и при некотором фиксированном k функции $\varphi_{nki}(\cdot)$ и случайные величины $\overline{\varphi}_{nki}$ таковы, что при всех n, i выполнено неравенство (11), справедливы условие (A_2) и представление (2). Пусть дополнительно $\beta_{nk} := d_{nu}^{\tau p_k} \sum \mathbf{E}\overline{\varphi}^\tau_{nki}/|B_n|^\tau \to 0$ при некотором неслучайном $\tau > 0$. Тогда $\rho_{nk} := \sum |\varphi_{nki}(\tilde\theta_n) - \varphi_{ni}(\theta_n)|^\tau/|B_n|^\tau \xrightarrow{p} 0$.*

Доказательство. Из леммы 4.1 и условия (11) имеем

$$|\varphi_{nki}(\tilde\theta_n) - \varphi_{nki}(\theta_n)| \le \overline{\varphi}_{nki}\bar\delta_n^{p_k} \quad \text{и} \quad \mathbf{E}\bar\delta_n^2 \le (2d_{nu})^2 \ \text{при}\ \bar\delta_n = |\tilde\theta_n - \theta_n|.$$

Эти оценки и неравенство Гёльдера при $h = 1/(2 + \tau p_k)$ дают соотношение

$$\mathbf{E}|\rho_{nk}|^{2h} \le \mathbf{E}\Big(\bar\delta_n^{2\tau h p_k}\Big(\sum \overline{\varphi}^\tau_{nki}/|B_n|^\tau\Big)^{2h}\Big) \\ \le \big(\mathbf{E}\bar\delta_n^2\big)^{\tau h p_k}\Big(\mathbf{E}\sum \overline{\varphi}^\tau_{nki}/|B_n|^\tau\Big)^{2h} \le (2\beta_{nk})^{2h} \to 0.$$

Из этой сходимости моментов вытекает требуемая сходимость по вероятности. $\square$

Лемма 4.9. *Пусть выполнено условие (A_0) и при некотором фиксированном r функции $\psi_{nri}(\cdot)$ и случайные величины $\overline{\psi}_{nri}$ таковы, что при всех n, i выполнено неравенство (13), справедливы условие (A_2) и представление (2). Пусть дополнительно $d_{nu}^{q_r}\sum \mathbf{E}\overline{\psi}_{nri}/|A_n| \to 0$. Тогда $\sum |\psi_{nri}(\tilde\theta_n) - \psi_{nri}(\theta_n)|/|A_n| \xrightarrow{p} 0$.*

Доказательство этого утверждения опускаем, поскольку оно с очевидными изменениями повторяет вывод леммы 4.8.

Доказательство леммы 4.2. Положим

$$\begin{aligned} \alpha_{nr} &:= \sum |\psi_{nri}(\tilde\theta_n) - \psi_{nri}(\theta_n)|/|A_n|, \quad r = 1, \dots, m, \\ \alpha_n &:= \sum |\widetilde V_{ni}|/|A_n| \quad \text{при } \widetilde V_{ni} := V_{ni}(\widetilde\theta_n) - V_{ni}(\theta_n). \end{aligned} \tag{78}$$

Покажем, что

$$\alpha_{nr} \xrightarrow{p} 0 \text{ при } r = 1, \dots, m \quad \text{и} \quad \alpha_n \leq \sum_{r=1}^{m} \alpha_{nr} \xrightarrow{p} 0. \tag{79}$$

Действительно, первая сходимость в (79) следует из леммы 4.9, поскольку $d_{nu}^{q_r} \sum \mathbf{E}\overline{\psi}_{nri}/|A_n| \to 0$ при всех r ввиду условия (16). Неравенство в (79) получается из определений (15) и (78), поэтому вторая сходимость в (79) немедленно вытекает из первой.

Завершает доказательство леммы следующее соотношение:

$$|\tilde{\rho}_{nv}| = \Big|\sum \widetilde{V}_{ni}/A_n + \sum V_{ni}(\theta_n)/A_n - 1\Big| \leq \alpha_n + \Big|\sum V_{ni}(\theta_n)/A_n - 1\Big| \xrightarrow{p} 0,$$

при выводе которого использованы определение из (78), условие (17) и вторая сходимость в (79). □

Доказательство леммы 4.3. По теореме 3 при $k = 1, \dots, l_0$ имеем

$$\mathbf{E}\Big|\sum \breve{\varphi}_{nki}(\tilde{\theta}_n)\Big| \leq 3 \cdot 2^{2p_k} \mathbb{C}_{n,k}, \quad k = 1, \dots, l_0.$$

Тем самым с учетом первого обозначения в (15), определения (36) и условия (18)

$$\mathbf{E}|\tilde{\rho}_{nu}| \leq \sum_{k=1}^{l_0} \mathbf{E}\Big|\sum \breve{\varphi}_{nki}(\tilde{\theta}_n)\Big|/|B_n| \leq 12 \sum_{k=1}^{l_0} \mathbb{C}_{n,k}/|B_n| \to 0,$$

что доказывает утверждение леммы. □

Доказательство леммы 4.4. Заметим, что

$$\alpha_{nok} := \sum |\varphi_{nki}(\tilde{\theta}_n) - \varphi_{nki}(\theta_n)|/|B_n| \xrightarrow{p} 0, \quad k = l_0 + 1, \dots, l. \tag{80}$$

Для вывода (80) нужно воспользоваться утверждением леммы 4.8 при $k = l_0 + 1, \dots, l$ и $\tau = 1$ и учесть, что $\beta_{nk} = d_{nu}^{p_k} \sum \mathbf{E}\overline{\varphi}_{nki}/|B_n| \to 0$ ввиду условия (19).

Из (80) немедленно следует, что $|\tilde{\rho}_{nou}| \leq \sum\limits_{k=l_0+1}^{l} \alpha_{nok} \xrightarrow{p} 0$. □

Перечислим известные свойства нормы $\mathbb{S}(a_{n\bullet})$ (см. определение (34)), которыми далее будем пользоваться, отдельно это не оговаривая:

$$\begin{gathered} \mathbb{S}(a_{n\bullet}) := \Big(\sum a_{ni}^2\Big)^{1/2} \leq \sum |a_{ni}|, \quad \sum |a_{ni}b_{ni}| \leq \mathbb{S}(a_{n\bullet}) \cdot \mathbb{S}(b_{n\bullet}), \\ \mathbb{S}(a_{n\bullet} + b_{n\bullet}) \leq \mathbb{S}(a_{n\bullet}) + \mathbb{S}(b_{n\bullet}), \quad \big|\mathbb{S}(a_{n\bullet}) - \mathbb{S}(b_{n\bullet})\big| \leq \mathbb{S}(a_{n\bullet} - b_{n\bullet}). \end{gathered} \tag{81}$$

Кроме того, неоднократно будем применять равенство $\mathbf{E}\mathbb{S}^2(a_{n\bullet}) = \sum \|a_{ni}\|^2$.

Доказательство леммы 4.5. Последовательно используя определение (27) и обозначения из (24) и (78), имеем

$$\begin{aligned} |\tilde{\rho}_{nuv}| &\leq \mathbb{S}(U_{n\bullet}^*(\tilde{\theta}_n, \theta_n^{**}) - U_{n\bullet}(\tilde{\theta}_n))/|B_n| = \mathbb{S}((\theta_n - \theta_n^{**})V_{n\bullet}(\tilde{\theta}_n))/|B_n| \\ &= |\theta_n^{**} - \theta_n|\mathbb{S}(V_{n\bullet}(\tilde{\theta}_n))/|B_n| = |W_n|\mathbb{S}(V_{n\bullet}(\tilde{\theta}_n))/|A_n| \\ &= |W_n|\mathbb{S}(V_{n\bullet}(\theta_n) + \widetilde{V}_{n\bullet})/|A_n| \\ &\leq |W_n|(\mathbb{S}(V_{n\bullet}(\theta_n))/|A_n| + \mathbb{S}(\widetilde{V}_{n\bullet})/|A_n|). \end{aligned} \tag{82}$$

Поскольку $W_n \Rightarrow \eta$ в силу (24), утверждение леммы вытекает из (82) и следующих сходимостей:

$$\mathbb{S}(V_{n\bullet}(\theta_n))/|A_n| \xrightarrow{p} 0, \quad \mathbb{S}(\widetilde{V}_{n\bullet})/|A_n| \le \alpha_n \xrightarrow{p} 0. \tag{83}$$

При выводе второго соотношения в (83) используются (78) и (79), а первая сходимость в (83) совпадает с условием (28). □

Доказательство леммы 4.6. Согласно (27) и (78) имеем

$$\begin{aligned}|\tilde\rho_{nvu}| &\le \mathbb{S}(U^*_{n\bullet}(\tilde\theta_n,\tilde\theta_n) - U_{n\bullet}(\tilde\theta_n))/|B_n| = |\tilde\theta_n - \theta_n|\mathbb{S}(V_{n\bullet}(\tilde\theta_n))/|B_n| \\ &= |\tilde\theta_n - \theta_n|\mathbb{S}(V_{n\bullet}(\theta_n) + \widetilde{V}_{n\bullet})/|B_n| \le \left(H_1 + \sum_{r=1}^m H_{2r}\right)/|B_n|,\end{aligned} \tag{84}$$

где $H_1 := |\tilde\theta_n - \theta_n| \cdot \mathbb{S}(V_{n\bullet}(\theta_n))$, $H_{2r} := |\tilde\theta_n - \theta_n|^2 \cdot \mathbb{S}(\overline{\psi}_{nr\bullet})$. При выводе (84) использованы также условие (13) и определение из (15), ввиду которых

$$|\widetilde{V}_{ni}| \equiv |V_{ni}(\tilde\theta_n) - V_{ni}(\theta_n)| \le \sum_{r=1}^m \overline{\psi}_{nri}|\tilde\theta_n - \theta_n|^{q_r} \le |\tilde\theta_n - \theta_n|\sum_{r=1}^m \overline{\psi}_{nri}.$$

Применяя неравенство Шварца и последнее соотношение в (37), получаем, что

$$\begin{aligned}\mathbf{E}H_1^{1/2} &\le (\mathbf{E}|\tilde\theta_n - \theta_n|^2)^{1/4}(\mathbf{E}\mathbb{S}^2(V_{n\bullet}(\theta_n)))^{1/4} \le \left(4d_{nu}^2 \sum \|V_{ni}(\theta_n)\|^2\right)^{1/4}, \\ \mathbf{E}H_{2r}^{1/2} &\le (\mathbf{E}|\tilde\theta_n - \theta_n|^2)^{1/2}(\mathbf{E}\mathbb{S}^2(\overline{\psi}_{nr\bullet}))^{1/4} \le \left(4d_{nu}^2\right)^{1/2}\left(\sum \|\overline{\psi}_{nri}\|^2\right)^{1/4}.\end{aligned} \tag{85}$$

Из (84), (85) и условий (31) следует, что

$$\mathbf{E}|\tilde\rho_{nvu}|^{1/2} \le \left(\mathbf{E}H_1^{1/2} + \sum_{r=1}^m \mathbf{E}H_{2r}^{1/2}\right)/|B_n|^{1/2} \to 0,$$

поэтому $\tilde\rho_{nvu} \xrightarrow{p} 0$. □

Доказательство леммы 4.7. Положим $\widetilde{U}_{ni} := U_{ni}(\tilde\theta_n) - U_{ni}(\theta_n)$. Тогда

$$|\rho_{nuu}| \le \mathbb{S}(\widetilde{U}_{n\bullet})/|B_n| + |\mathbb{S}(U_{n\bullet}(\theta_n))/|B_n| - 1|. \tag{86}$$

Поскольку второе слагаемое в (86) сходится по вероятности к нулю ввиду условия (29), остается лишь показать, что

$$\mathbb{S}(\widetilde{U}_{n\bullet})/|B_n| \xrightarrow{p} 0. \tag{87}$$

Согласно первому определению в (15)

$$\mathbb{S}(\widetilde{U}_{n\bullet})/|B_n| \le \sum_{k=1}^l \mathbb{S}(\widetilde{\varphi}_{nk\bullet})/|B_n| \quad \text{при } \widetilde{\varphi}_{nki} := \varphi_{nki}(\tilde\theta_n) - \varphi_{nki}(\theta_n). \tag{88}$$

Воспользуемся леммой 4.8 при $\tau = 2$ и $k = 1, \dots, l$. Поскольку в силу условия (18) и второго условия в (31)

$$\beta_{nk} = d_{nu}^{2p_k} \sum \mathbf{E}\overline{\varphi}^2_{nki}/B_n^2 \equiv d_{nu}^{2p_k} \sum \|\overline{\varphi}_{nki}\|^2/B_n^2 \to 0, \quad k = 1, \dots, l,$$

то $\mathbb{S}(\widetilde{\varphi}_{nk\bullet})/|B_n| \xrightarrow{p} 0$ при $k = 1, \dots, l$. Эти сходимости вместе с оценкой (88) доказывают (87). □

Таким образом, все утверждения работы полностью доказаны.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Боровков А. А.* Математическая статистика. Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1997.

2. *Закс Ш.* Теория статистических выводов. М.: Мир, 1975.

3. *Линке Ю. Ю. Саханенко А. И.* Асимптотически нормальное оценивание параметра в задаче дробно-линейной регрессии // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 1. С. 150–163.

4. *Саханенко А. И., Линке Ю. Ю.* Асимптотически оптимальное оценивание в задаче дробно-линейной регрессии со случайными ошибками в коэффициентах // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 6. С. 1371–1400.

5. *Линке Ю. Ю. Саханенко А. И.* Асимптотически нормальное оценивание параметра в задаче дробно-линейной регрессии со случайными ошибками в коэффициентах // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 3. С. 592–619.

6. *Линке Ю. Ю., Саханенко А. И.* Асимптотически оптимальное оценивание в задаче линейной регрессии при невыполнении некоторых классических предположений // Сиб. мат. журн. 2009. Т. 50, № 2. С. 380–396.

7. *Линке Ю. Ю., Саханенко А. И.* Асимптотически оптимальное оценивание в задаче линейной регрессии со случайными ошибками в коэффициентах // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 1. С. 128–145.

8. *Саханенко А. И., Линке Ю. Ю.* Улучшение оценок в задаче линейной регрессии со случайными ошибками в коэффициентах // Сиб. мат. журн. 2011. Т. 52, № 1. С. 143–160.

9. *Саханенко А. И., Линке Ю. Ю.* Состоятельное оценивание в задаче линейной регрессии со случайными ошибками в коэффициентах // Сиб. мат. журн. 2011. Т. 52, № 4. С. 890–908.

10. *Houwelingen J. C.* Use and abuse of variance models in regression // Biometrics. 1988. V. 44, N 3. P. 1073–1081.

11. *Amemiya T.* Regression analysis when the variance of the dependent variable is proportional to the squares of its expectation // J. Amer. Stat. Assoc. 1973. V. 68, N 344. P. 928–934.

12. *Jobson J. D., Fuller W. A.* Least squares estimation when the covariance matrix and parameter vector are functionally related // J. Amer. Stat. Assoc. 1980. V. 75, N 369. P. 176–181.

13. *Carroll R. J.* Robust estimation in heteroscedastic linear models // Ann. Stat. 1982. V. 10, N 2. P. 429–441.

14. *Гуревич В. А.* О взвешенных М-оценках в нелинейной регрессии // Теория вероятностей и ее применения. 1988. Т. 33, № 2. С. 421–424.

15. *Draper N. R.* Applied regression analysis bibliography update 1994–1997 // Commun. Stat., Theory Methods. 1998. V. 27, N 10. P. 2581–2623.

16. *Draper N. R.* Applied regression analysis bibliography update 1998–1999 // Commun. Stat., Theory Methods. 2000. V. 29, N 9–10. P. 2313–1341.

17. *Draper N. R.* Applied regression analysis bibliography update 2000–2001 // Commun. Stat., Theory Methods. 2002. V. 31, N 11. P. 2051–2075.

18. *Seber G. A. F., Wild C. J.* Nonlinear regression. Hoboken, HJ: John Wiley and Sons, 2003.

19. *Крамер Г.* Математические методы статистики. М.: Мир, 1976.

Статья поступила 1 октября 2010 г., окончательный вариант — 27 апреля 2011 г.

Линке Юлиана Юрьевна
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет, ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
linke@math.nsc.ru