Сибирский математический журнал
Июль—август, 2011. Том 52, № 4

УДК 519.2

ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ СИЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Ф. Гётце, А. Ю. Зайцев

Аннотация. Получены бесконечномерные следствия результатов недавно опубликованной работы авторов [1]. Показано, что из конечномерных результатов можно вывести содержательные оценки точности сильной гауссовской аппроксимации сумм независимых одинаково распределенных гильбертовозначных случайных векторов, имеющих конечные степенные моменты. Установлено, что точность аппроксимации существенно зависит от скорости убывания последовательности собственных чисел ковариационного оператора слагаемых.

Ключевые слова: бесконечномерный принцип инвариантности, сильная аппроксимация, суммы независимых случайных векторов, оценки точности аппроксимации.

1. Введение

Цель статьи — исследовать, какие бесконечномерные следствия вытекают из результатов недавно опубликованной работы авторов [1] (см. теоремы 2 и 3). Мы покажем, что из конечномерной теоремы 3 можно вывести содержательные оценки точности сильной гауссовской аппроксимации сумм независимых одинаково распределенных гильбертовозначных случайных векторов ξ_j, имеющих конечные моменты $\mathbf{E}\|\xi_j\|^\gamma$, $\gamma > 2$. Будет продемонстрировано, что точность аппроксимации существенно зависит от скорости убывания последовательности собственных чисел ковариационного оператора слагаемых.

Введем обозначения, которые будут использоваться ниже. Распределение случайного вектора ξ будет обозначаться через $\mathscr{L}(\xi)$, соответствующий ковариационный оператор — через $\operatorname{cov}\xi$. В дальнейшем $\log^* b = \max\{1, \log b\}$ при $b > 0$. Будем писать $A \ll_t B$, если существует такая зависящая только от t положительная величина $c(t)$, что $A \le c(t)B$. Будем также писать $A \asymp_t B$, если $A \ll_t B \ll_t A$. Отсутствие нижнего индекса означает, разумеется, что соответствующие постоянные являются абсолютными.

Будем рассматривать следующую хорошо известную проблему. Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n$ — независимые случайные векторы с нулевыми математическими ожиданиями и конечными моментами второго порядка. Требуется построить на одном вероятностном пространстве независимые случайные векторы $X_1, \dots, X_n$ и

Работа обоих авторов выполнена при финансовой поддержке РФФИ–ННИО (код проекта 09–01–91331) и SFB 701 Билефельдского университета. Работа второго автора выполнена также при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 10–01–00242), Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ–4472.2010.1), а также Программы фундаментальных исследований РАН «Современные проблемы теоретической математики».

независимые гауссовские случайные векторы $Y_1, \dots, Y_n$ таким образом, чтобы

$$\mathscr{L}(X_j) = \mathscr{L}(\xi_j), \quad \mathbf{E}Y_j = 0, \quad \operatorname{cov} Y_j = \operatorname{cov} X_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

и величина

$$\Delta_n(X, Y) = \max_{1 \le s \le n} \left\| \sum_{j=1}^{s} X_j - \sum_{j=1}^{s} Y_j \right\| \tag{1}$$

была по возможности мала с достаточно большой вероятностью. Именно к этой задаче сводится оценивание точности сильной аппроксимации в принципе инвариантности. Мы опускаем подробную историю вопроса, отсылая читателя к работам [2, 3].

Для краткости будем вместо выписывания перечисленных выше свойств векторов $X_1, \dots, X_n$ и $Y_1, \dots, Y_n$ просто говорить, что *существует построение*, обладающее дополнительными свойствами, явно указываемыми в тексте. Как правило, будем рассматривать случай, когда векторы $\xi_1, \dots, \xi_n$ одинаково распределены с некоторым случайным вектором Z и в условиях теорем будет упоминаться только этот вектор.

В этой статье будут получены бесконечномерные аналоги следующего результата А. И. Саханенко [4] в случае независимых одинаково распределенных слагаемых.

Теорема 1. *Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ — независимые случайные величины с $\mathbf{E}\xi_j = 0$, $j = 1, \dots, n$. Пусть $\gamma > 2$ и*

$$L_\gamma = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}|\xi_j|^\gamma < \infty.$$

Тогда существует такое построение, что

$$\mathbf{E}(\Delta_n(X, Y))^\gamma \ll_\gamma L_\gamma. \tag{2}$$

Следует отметить, что в [4] можно найти более общие результаты. Там отмечается, что из неравенства (2) следует известное неравенство Розенталя ([5, 6], см. лемму 1 ниже). После естественной нормировки видим, что неравенство (2) эквивалентно неравенству

$$\mathbf{E}(\Delta_n(X, Y)/\sigma)^\gamma \ll_\gamma L_\gamma/\sigma^\gamma,$$

где $\sigma^2 = \mathbf{D}\left(\sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j\right)$. Ясно, что L_γ/σ^γ, $2 < \gamma \le 3$, представляет собой известную дробь Ляпунова, фигурирующую в неравенствах Ляпунова и Эссеена для равномерного расстояния в центральной предельной теореме.

В настоящей работе будут доказаны теоремы 4 и 5, являющиеся достаточно элементарными следствиями теорем 2 и 3, доказанных авторами в работах [1, 2]. В работе [2] рассматриваем случай независимых, вообще говоря, неодинаково распределенных слагаемых. Теорема 2 показывает, что следует из результатов работы [2] в частном случае, когда слагаемые одинаково распределены, и представляет собой многомерный вариант теоремы 1 для одинаково распределенных слагаемых.

Будем обозначать через $\mathbf{H}$ вещественное сепарабельное гильбертово пространство, состоящее из всевозможных вещественных последовательностей $x = (x_1, x_2, \dots)$, для которых $\|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots < \infty$. Будем также обозначать

$$\|x\|_\infty = \max_j |x_j|, \quad x^{(d)} = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbf{R}^d$$

и
$$x^{[d]} = (0, 0, \dots, 0, x_d, x_{d+1}, \dots) \in \mathbf{H}.$$

В формулировках результатов будет участвовать случайный вектор $Z = (Z_1, Z_2, \dots)$, принимающий значения в $\mathbf{H}$ или $\mathbf{R}^d$. Независимые копии вектора Z требуется построить на одном вероятностном пространстве с последовательностью независимых гауссовских случайных векторов. Не нарушая общности, будем предполагать, что координаты вектора Z некоррелированы, причем

$$\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2 \geq \dots \geq \sigma_m^2 \geq \dots, \quad \text{где } \sigma_m^2 = \mathbf{E}Z_m^2, \ m = 1, 2, \dots. \tag{3}$$

Обозначим

$$\mathbb{D} = \operatorname{cov} Z, \quad \mathbb{D}_d = \operatorname{cov} Z^{(d)}, \quad B_d^2 = \sum_{m=d+1}^{\infty} \sigma_m^2 = \mathbf{E}\|Z^{[d]}\|^2. \tag{4}$$

В частности,
$$B_0^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_m^2 = \mathbf{E}\|Z\|^2. \tag{5}$$

Кроме того, в формулировках будет присутствовать параметр ψ, удовлетворяющий неравенству
$$21/2 < \psi \leq 11. \tag{6}$$
В дальнейшем многие константы будут зависеть от ψ. Чтобы избавиться от этого усложнения, можно, например, взять $\psi = 11$.

Теорема 2. *Предположим, что ψ удовлетворяет неравенству* (6), *а Z — $\mathbf{R}^d$-значный случайный вектор с $\sigma_d^2 > 0$, $\mathbf{E}Z = 0$ и $\mathbf{E}\|Z\|^\gamma < \infty$ при некотором $\gamma \geq 2$. Тогда существует такое построение, что*

$$\mathbf{E}(\Delta_n(X, Y))^\gamma \ll_{\gamma,\psi} A(\sigma_1/\sigma_d)^\gamma n \mathbf{E}\|Z\|^\gamma \quad \textit{при всех } n, \tag{7}$$

где
$$A = A(\gamma, \psi, d) = \max\{d^{\psi\gamma}, d^{\frac{\gamma(\gamma+2)}{4}} (\log^* d)^{\frac{\gamma(\gamma+1)}{2}}\}. \tag{8}$$

Нам потребуется несколько иная формулировка конечномерного результата. Следующее утверждение доказано в работе [1] в процессе доказательства теоремы 2.

Теорема 3. *Предположим, что ψ удовлетворяет неравенству* (6), *а Z — $\mathbf{R}^d$-значный случайный вектор с $\sigma_d^2 > 0$, $\mathbf{E}Z = 0$ и $\mathbf{E}\|Z\|^\gamma < \infty$ при некотором $\gamma \geq 2$. Существует такая зависящая только от γ положительная величина $C(\gamma)$, что если при некотором фиксированном натуральном n*

$$C(\gamma) d^{\gamma/2} (\log^* d)^{\gamma+1} (\mathbf{E}\|\mathbb{D}^{-1/2} Z\|^\gamma)^{2/\gamma} \leq n^{1-2/\gamma}, \tag{9}$$

то существует такое построение, что

$$\mathbf{E}(\Delta_n(\mathbb{D}^{-1/2} X, \mathbb{D}^{-1/2} Y))^\gamma \ll_{\gamma,\psi} d^{\psi\gamma} n \mathbf{E}\|\mathbb{D}^{-1/2} Z\|^\gamma. \tag{10}$$

Замечание 1. В работе [1] в формулировках теорем 2 и 3 при $d^{\psi\gamma}$ присутствует дополнительный логарифмический множитель $(\log^* d)^{2\gamma}$. От него можно легко избавиться, учитывая, что для констант в неравенствах (7) и (10) допускается зависимость от ψ, удовлетворяющего неравенству (6).

Замечание 2. Если условие (9) не выполнено, то оценка в теореме 2 получается не за счет удачной аппроксимации, а за счет того, что мы оцениваем величины $\mathbf{E}\max\limits_{1\le s\le n}\Big\|\sum\limits_{j=1}^{s}X_j\Big\|^\gamma$ и $\mathbf{E}\max\limits_{1\le s\le n}\Big\|\sum\limits_{j=1}^{s}Y_j\Big\|^\gamma$ сверху с помощью леммы 1 и неравенства (25). Так что наличие в формулировке теоремы 3 условия (9) не приводит к потере информации о близости распределений по сравнению с теоремой 2.

Основными результатами настоящей работы являются следующие теоремы 4 и 5.

Теорема 4. *Предположим, что ψ удовлетворяет неравенству* (6), *а Z — $\mathbf{H}$-значный случайный вектор с $\mathbf{E}Z=0$ и $\mathbf{E}\|Z\|^\gamma<\infty$ при некотором $\gamma>2$. Пусть d и n — фиксированные натуральные числа. Если выполняется неравенство*

$$C(\gamma)d^{\gamma/2}(\log^* d)^{\gamma+1}\big(\mathbf{E}\big\|\mathbb{D}_d^{-1/2}Z^{(d)}\big\|^\gamma\big)^{2/\gamma}\le n^{1-2/\gamma}, \tag{11}$$

где величина $C(\gamma)$ определена в теореме 3, *то существует такое построение, что*

$$\mathbf{E}(\Delta_n(X,Y))^\gamma\ll_{\gamma,\psi} d^{\psi\gamma}n\sigma_1^\gamma\mathbf{E}\big\|\mathbb{D}_d^{-1/2}Z^{(d)}\big\|^\gamma+n\mathbf{E}\|Z^{[d]}\|^\gamma+\big(nB_d^2\big)^{\gamma/2}. \tag{12}$$

Теорема 5. *Предположим, что ψ удовлетворяет неравенству* (6), *а Z — $\mathbf{H}$-значный случайный вектор с $\mathbf{E}Z=0$ и $\mathbf{E}\|Z\|^\gamma<\infty$ при некотором $\gamma>2$. Пусть d и n — фиксированные натуральные числа. Если выполняется неравенство*

$$C(\gamma)d^{\gamma/2}(\log^* d)^{\gamma+1}(\mathbf{E}\|Z\|^\gamma)^{2/\gamma}\le n^{1-2/\gamma}\sigma_d^2, \tag{13}$$

где величина $C(\gamma)$ определена в теореме 3, *то существует такое построение, что*

$$\mathbf{E}(\Delta_n(X,Y))^\gamma\ll_{\gamma,\psi} d^{\psi\gamma}(\sigma_1/\sigma_d)^\gamma n\mathbf{E}\|Z\|^\gamma+\big(nB_d^2\big)^{\gamma/2}. \tag{14}$$

Теоремы 4 и 5 дают возможность получать содержательные бесконечномерные оценки за счет подходящего выбора размерности d, при котором слагаемые в правых частях неравенств (12) или (14) имеют примерно одинаковый порядок по n. Теорема 5 является элементарным следствием теоремы 4 и неравенства

$$\mathbf{E}\big\|\mathbb{D}_d^{-1/2}Z^{(d)}\big\|^\gamma\le\sigma_d^{-\gamma}\mathbf{E}\|Z^{(d)}\|^\gamma\le\sigma_d^{-\gamma}\mathbf{E}\|Z\|^\gamma. \tag{15}$$

Теорема 4, вообще говоря, точнее теоремы 5. Для многих распределений с регулярным поведением моментов справедливо соотношение

$$K=\sup_{1\le d<\infty}d^{-\gamma/2}\mathbf{E}\big\|\mathbb{D}_d^{-1/2}Z^{(d)}\big\|^\gamma<\infty, \tag{16}$$

что может дать существенное уточнение порядка оценок. Например, если вектор Z имеет независимые координаты Z_m, то в силу леммы 2 разд. 2

$$\mathbf{E}\big\|\mathbb{D}_d^{-1/2}Z^{(d)}\big\|^\gamma=\mathbf{E}\left(\sum_{m=1}^{d}\frac{Z_m^2}{\sigma_m^2}\right)^{\gamma/2}\ll_\gamma d^{\gamma/2}+\sum_{m=1}^{d}\sigma_m^{-\gamma}\mathbf{E}|Z_m|^\gamma. \tag{17}$$

Следовательно, $K<\infty$, если последовательность моментов $\sigma_m^{-\gamma}\mathbf{E}|Z_m|^\gamma$ ограничена или растет не быстрее, чем $O(m^{(\gamma-2)/2})$. Заметим, что в силу неравенства Ляпунова $\mathbf{E}\big\|\mathbb{D}_d^{-1/2}Z^{(d)}\big\|^\gamma\ge d^{\gamma/2}$.

С другой стороны, в общем случае применение неравенства (15) может не приводить к потере точности оценки, а формулировка теоремы 5 проще формулировки теоремы 4. В ней участвуют только момент $\mathbf{E}\|Z\|^\gamma$ и собственные числа ковариационного оператора $\mathbb{D}$ вектора Z. Возможна промежуточная ситуация, когда неравенство (16) не выполняется, но утверждение теоремы 4 все еще сильнее утверждения теоремы 5.

Доказательство теорем 4 и 5 основано на методе конечномерной аппроксимации, родственном методу, применяемому при оценивании точности аппроксимации в центральной предельной теореме в бесконечномерных пространствах (см., например, обзор [7]).

Применяя неравенство Чебышёва, видим, что в условиях теоремы 2

$$\mathbf{P}\{\Delta_n(X,Y) \geq x\} \ll_{\gamma,d} (\sigma_1/\sigma_d)^\gamma n\mathbf{E}\|Z\|^\gamma/x^\gamma \tag{18}$$

для всех $x > 0$ и всех $n = 1, 2, \ldots$. Ясно, что утверждение теоремы 2 сильнее, чем (18). Построение, для которого (18) справедливо при $d = 1$ при фиксированных n и $x = O(\sqrt{n}\log n)$ с константами, зависящими только от γ и $\mathscr{L}(Z)$, предложено Комлошем, Майором и Тушнади (КМТ) [8], см. также работы А. А. Боровкова [9] и Майора [10] в случае $2 < \gamma \leq 3$. Затем А. И. Саханенко [4] доказал теорему 1, которая обеспечивает справедливость (18) для всех x на одном и том же вероятностном пространстве. Айнмаль [11] получил многомерный вариант результата КМТ без ограничений на значения аргумента x.

Ранее оценки точности сильной аппроксимации в бесконечномерных пространствах были получены, например, в работах [12–15]. Наиболее близок к тематике данной статьи следующий бесконечномерный результат А. И. Саханенко [15].

Теорема 6. *Предположим, что Z — $\mathbf{H}$-значный случайный вектор с $\mathbf{E}Z = 0$ и $\mathbf{E}\|Z\|^\gamma < \infty$ при некотором γ, $2 \leq \gamma \leq 3$. Тогда для любого фиксированного $x > 0$ существует такое построение, что*

$$\mathbf{P}\big\{\Delta_n^\infty(X,Y) \geq x\big\} \ll n\mathbf{E}\|Z\|^\gamma/x^\gamma \quad \text{при всех } n, \tag{19}$$

где

$$\Delta_n^\infty(X,Y) = \max_{1\leq s\leq n}\left\|\sum_{j=1}^s X_j - \sum_{j=1}^s Y_j\right\|_\infty. \tag{20}$$

Теорема 6 сформулирована при фиксированном x. Это означает, что вероятностное пространство зависит от этого x. Кроме того, в формулировке теоремы 6 вместо $\Delta_n(X,Y)$ фигурирует величина $\Delta_n^\infty(X,Y)$, которая, вообще говоря, существенно меньше, чем $\Delta_n(X,Y)$. С другой стороны, неравенство (19) выглядит почти так же, как неравенство (18) при $2 \leq \gamma \leq 3$. Следует также отметить, что А. И. Саханенко [15] получил существенно более общие результаты по сравнению с теоремой 6. Они доказаны для разнораспределенных зависимых слагаемых, образующих, например, бесконечномерные мартингалы.

Следующая теорема дает оценку снизу в условиях теорем 4 и 5.

Теорема 7. *Пусть положительные числа σ_m^2, $m = 1, 2, \ldots$, удовлетворяют соотношениям*

$$\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2 \geq \cdots \geq \sigma_m^2 \geq \ldots, \quad \sum_{m=1}^\infty \sigma_m^2 < \infty. \tag{21}$$

Пусть n — фиксированное натуральное число и $\lambda > 0$, причем $\sigma_1^2 \le \lambda^2$. Обозначим

$$k = \min\{m : n\sigma_m^2 < \lambda^2\} - 1. \tag{22}$$

Тогда существует такой случайный вектор $Z = (Z_1, Z_2, \dots)$, принимающий значения в пространстве $\mathbf{H}$ и удовлетворяющий (3)–(5), что $\mathbf{E}\|Z\|^\gamma < \infty$ при всех $\gamma \ge 0$ и для любого построения справедлива оценка снизу

$$\mathbf{E}(\Delta_n(X,Y))^\gamma \gg_\gamma \mathbf{E}(\Delta_n(X^{(k)},Y^{(k)}))^\gamma + \bigl(nB_k^2\bigr)^{\gamma/2}. \tag{23}$$

При этом первое слагаемое в правой части неравенства (23) считается равным нулю, если $k = 0$.

Замечание 3. Оценивание снизу величины $\mathbf{E}(\Delta_n(X^{(k)},Y^{(k)}))^\gamma$ представляет собой отдельную задачу. Впрочем, для вектора Z из доказательства теоремы 7 справедлива грубая оценка $\mathbf{E}(\Delta_n(X^{(k)},Y^{(k)}))^\gamma \gg_\gamma (\lambda^2 k)^{\gamma/2}$, основанная на решетчатости распределения этого вектора.

Наличие в правой части оценки снизу (23) величины $\bigl(nB_k^2\bigr)^{\gamma/2}$ свидетельствует об естественности появления слагаемого $\bigl(nB_d^2\bigr)^{\gamma/2}$ в оценках сверху (12) и (14). Это отчетливо проявляется при сравнении неравенства (23) с промежуточным неравенством (30).

В разд. 3 будут рассмотрены примеры 1–4, показывающие, в частности, что для многих распределений теорема 5 дает оценки, которые лучше по порядку, чем оценка теоремы 7. Кроме того, в примере 5 будет показано, что если последовательность собственных чисел σ_m^2 убывает медленно, то теоремы 4 и 5 дают правильные по порядку оценки.

Теоремы 3–5 сформулированы при фиксированном n, а оценка в теореме 2 справедлива при всех n одновременно на одном и том же вероятностном пространстве. Первоначально в работе [1] она была доказана при фиксированном n. Чтобы получить построение, дающее результат для всех n, достаточно использовать независимые построения с фиксированными $n \asymp 2^m$, $m = 1, 2, \dots$, и воспользоваться леммой 2. То же самое будет справедливо и для порядка зависимости от n оценок, выписанных при рассмотрении примеров 1–5. Действуя аналогичным образом, не составляет труда перенести оценки, полученные на вероятностных пространствах, зависящих от n, на вероятностное пространство, на котором оценки соответствующего порядка будут верны для всех n.

2. Доказательства

Нам потребуются следующие леммы.

Лемма 1. *Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n$ — независимые случайные векторы, которые имеют нулевые средние и принимают значения в $\mathbf{H}$. Тогда*

$$\mathbf{E}\Bigl\|\sum_{j=1}^n \xi_j\Bigr\|^\gamma \ll_\gamma \sum_{j=1}^n \mathbf{E}\|\xi_j\|^\gamma + \Bigl(\sum_{j=1}^n \mathbf{E}\|\xi_j\|^2\Bigr)^{\gamma/2} \quad \text{при } \gamma \ge 2. \tag{24}$$

Этот многомерный вариант неравенства Розенталя легко следует из одного результата де Акоста [16]. В случае одинаково распределенных слагаемых второе слагаемое в правой части (24) растет быстрее, чем первое при $n \to \infty$. Теоремы 1 и 2 показывают, что в конечномерной ситуации этот рост соответствует росту сумм гауссовских аппроксимирующих векторов. Следующая ниже лемма 2 содержится в работе Розенталя [5] (см. также [17]).

Лемма 2. *Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n$ — независимые случайные величины, принимающие неотрицательные значения с вероятностью единица. Тогда*

$$\mathbf{E}\left(\sum_{j=1}^{n} \xi_j\right)^{\gamma} \ll_{\gamma} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}\xi_j^{\gamma} + \left(\sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}\xi_j\right)^{\gamma} \quad \text{при } \gamma \geq 1.$$

Следующая лемма 3 доказана в [18]. Она представляет собой частный случай теоремы 1.1.5 из [19].

Лемма 3. *Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n$ — независимые одинаково распределенные случайные векторы, принимающие значения в $\mathbf{H}$. Тогда*

$$\mathbf{P}\left\{\max_{1\leq s\leq n}\left\|\sum_{j=1}^{s} \xi_j\right\| > x\right\} \leq 9\mathbf{P}\left\{\left\|\sum_{j=1}^{n} \xi_j\right\| > \frac{x}{30}\right\} \quad \text{для всех } x \geq 0.$$

Вместе с хорошо известным равенством

$$\mathbf{E}|\eta|^{\gamma} = \gamma \int_{0}^{\infty} x^{\gamma-1}\mathbf{P}\{|\eta| > x\}\, dx, \quad \gamma > 0,$$

справедливым для любых случайных величин η, лемма 3 позволяет оценивать моменты

$$\mathbf{E}\max_{1\leq s\leq n}\left\|\sum_{j=1}^{s} \xi_j\right\|^{\gamma} \ll_{\gamma} \mathbf{E}\left\|\sum_{j=1}^{n} \xi_j\right\|^{\gamma}, \quad \gamma > 0, \tag{25}$$

в случае независимых одинаково распределенных векторов $\xi_1, \dots, \xi_n$.

Доказательство теоремы 4. Нетрудно понять, что для любого построения

$$\mathbf{E}(\Delta_n(X,Y))^{\gamma} \ll_{\gamma} \mathbf{E}(\Delta_n(X^{(d)},Y^{(d)}))^{\gamma} + \mathbf{E}\max_{1\leq s\leq n}\left\|\sum_{j=1}^{s} X_j^{[d]}\right\|^{\gamma} + \mathbf{E}\max_{1\leq s\leq n}\left\|\sum_{j=1}^{s} Y_j^{[d]}\right\|^{\gamma}. \tag{26}$$

Используя (25) и (26), получаем, что

$$\mathbf{E}(\Delta_n(X,Y))^{\gamma} \ll_{\gamma} \mathbf{E}(\Delta_n(X^{(d)},Y^{(d)}))^{\gamma} + \mathbf{E}\left\|\sum_{j=1}^{n} X_j^{[d]}\right\|^{\gamma} + \mathbf{E}\left\|\sum_{j=1}^{n} Y_j^{[d]}\right\|^{\gamma}. \tag{27}$$

Согласно лемме 1 и в силу $\mathscr{L}(X_j) = \mathscr{L}(Z)$, $\operatorname{cov} Y_j = \operatorname{cov} X_j = \operatorname{cov} Z$ справедливы неравенства

$$\mathbf{E}\left\|\sum_{j=1}^{n} X_j^{[d]}\right\|^{\gamma} \ll_{\gamma} n\mathbf{E}\|Z^{[d]}\|^{\gamma} + (n\mathbf{E}\|Z^{[d]}\|^2)^{\gamma/2}, \tag{28}$$

$$\mathbf{E}\left\|\sum_{j=1}^{n} Y_j^{[d]}\right\|^{\gamma} \ll_{\gamma} (n\mathbf{E}\|Z^{[d]}\|^2)^{\gamma/2}. \tag{29}$$

Из (27)–(29) следует, что

$$\mathbf{E}(\Delta_n(X,Y))^{\gamma} \ll_{\gamma} \mathbf{E}(\Delta_n(X^{(d)},Y^{(d)}))^{\gamma} + n\mathbf{E}\|Z^{[d]}\|^{\gamma} + \left(nB_d^2\right)^{\gamma/2}. \tag{30}$$

Из условия (11) вытекает, что d-мерный вектор $Z^{(d)}$ удовлетворяет условию (9) теоремы 3. Применяя эту теорему, видим, что из (10) и известной леммы Беркеша — Филиппа [20] следует существование такого построения, что

$$\mathbf{E}(\Delta_n(X^{(d)},Y^{(d)}))^\gamma \ll_{\gamma,\psi} d^{\psi\gamma} n\sigma_1^\gamma \mathbf{E}\big\|\mathbb{D}_d^{-1/2}Z^{(d)}\big\|^\gamma. \tag{31}$$

Используя (30) и (31), получаем утверждение теоремы 4.

Доказательство теоремы 7. В качестве Z_m (координат вектора Z) возьмем независимые случайные величины, принимающие значения $-\lambda$, 0 и λ с вероятностями

$$\mathbf{P}\{Z_m=\pm\lambda\}=\sigma_m^2/2\lambda^2, \quad \mathbf{P}\{Z_m=0\}=1-\sigma_m^2/\lambda^2, \quad m=1,2,\dots. \tag{32}$$

С помощью леммы 2 нетрудно показать, что $\mathbf{E}\|Z\|^\gamma<\infty$ при всех $\gamma\ge 0$. Предположим, что построены последовательность независимых случайных векторов $X_1,\dots,X_n$ и соответствующая последовательность независимых гауссовских случайных векторов $Y_1,\dots,Y_n$ таким образом, что $\mathscr{L}(X_j)=\mathscr{L}(Z)$, $\mathbf{E}Y_j=0$, $\operatorname{cov}Y_j=\operatorname{cov}X_j$, $j=1,\dots,n$.

Тогда координаты векторов X_j ($\{X_{jm},\ j=1,2,\dots,n,\ m=1,2,\dots\}$) являются независимыми в совокупности случайными величинами с распределениями $\mathscr{L}(Z_m)$, а координаты векторов Y_j ($\{Y_{jm},\ j=1,2,\dots,n,\ m=1,2,\dots\}$) являются независимыми в совокупности гауссовскими случайными величинами с нулевыми средними и дисперсиями σ_m^2. Положим

$$S_{nm}=\sum_{j=1}^n X_{jm}, \quad T_{nm}=\sum_{j=1}^n Y_{jm}, \quad m=1,2,\dots. \tag{33}$$

Ясно, что $\mathbf{D}S_{nm}=\mathbf{D}T_{nm}=n\sigma_m^2$, $m=1,2,\dots$, и

$$\Delta_n(X,Y)\ge\max\{\Delta_n(X^{(k)},Y^{(k)}),\Delta_n(X^{[k]},Y^{[k]})\}. \tag{34}$$

Очевидно, что

$$\Delta_n(X^{[k]},Y^{[k]})\ge\left\|\sum_{j=1}^n X_j^{[k]}-\sum_{j=1}^n Y_j^{[k]}\right\|, \tag{35}$$

причем

$$\left\|\sum_{j=1}^n X_j^{[k]}-\sum_{j=1}^n Y_j^{[k]}\right\|^2=\sum_{m=k+1}^\infty |S_{nm}-T_{nm}|^2. \tag{36}$$

Если $m>k$, то

$$|S_{nm}-T_{nm}|\ge\eta_{nm}, \quad \text{где } \eta_{nm}=|T_{nm}|\mathbf{1}\{|T_{nm}|\le\lambda/2\}, \tag{37}$$

поскольку величины S_{nm} принимают только значения кратные λ. Положим

$$U_{nk}=\sum_{m=k+1}^\infty \eta_{nm}^2. \tag{38}$$

При фиксированном n множество $\{\eta_{nm}\}$ представляет собой набор независимых в совокупности случайных величин. Согласно (22), (33) и (37) при $m>k$

$$\mathbf{E}\big(\eta_{nm}^2\big)\asymp n\sigma_m^2 \quad \text{и} \quad \mathbf{D}\big(\eta_{nm}^2\big)\asymp n^2\sigma_m^4. \tag{39}$$

Обозначим $a = \mathbf{E}U_{nk}$ и $b = \mathbf{D}U_{nk}$. Заметим, что в силу соотношений (22), (37)–(39)

$$a = \sum_{m=k+1}^{\infty} \mathbf{E}\big(\eta_{nm}^2\big) \asymp nB_k^2 \quad \text{и} \quad b = \sum_{m=k+1}^{\infty} \mathbf{D}\big(\eta_{nm}^2\big) \ll a^2, \tag{40}$$

где величина B_k^2 определена формулой (4). Согласно неравенству (7.5) из [21, с. 180]

$$\mathbf{P}\big\{U_{nk} - a < -t\big\} \le \frac{b}{b+t^2} = 1 - \frac{t^2}{b+t^2} \quad \text{при всех } t \ge 0. \tag{41}$$

Применяя (41) при $t = a/2$ и соотношения (40), нетрудно показать, что

$$\mathbf{P}\big\{U_{nk} \ge a/2\big\} \gg 1. \tag{42}$$

Поэтому, пользуясь соотношениями (37), (38) и (42), получим, что

$$\mathbf{P}\left\{\sum_{m=k+1}^{\infty} |S_{nm} - T_{nm}|^2 \ge a/2\right\} \gg 1. \tag{43}$$

Из (35), (36) и (43) вытекает, что

$$\mathbf{P}\{(\Delta_n(X^{[k]}, Y^{[k]}))^2 \ge a/2\} \gg 1 \tag{44}$$

и тем самым

$$\mathbf{E}\big(\Delta_n(X^{[k]}, Y^{[k]})\big)^\gamma \gg_\gamma a^{\gamma/2} \asymp_\gamma \big(nB_k^2\big)^{\gamma/2}. \tag{45}$$

Из (34) и (45) следует справедливость оценки снизу (23).

3. Примеры

В примерах 1–5 мы сравним оценки, которые дает теорема 4 при выполнении условия (16), с оценками, вытекающими из теоремы 5 для конкретных последовательностей собственных чисел ковариационного оператора вектора Z.

Пример 1. Пусть $\sigma_m^2 = \exp\{-\alpha m^\beta\}$, $m = 1, 2, \ldots$, где $\alpha, \beta > 0$. Будем считать, что n настолько велико, что

$$d = \max\big\{m : n^{2/\gamma}(\log^* n)^{2\psi/\beta}/\sigma_m^2 < n\sigma_m^2\big\} \ge 1. \tag{46}$$

Ясно, что тогда

$$d \asymp_{\alpha,\beta} (\log^* n)^{1/\beta}, \tag{47}$$

$$\sigma_{d+1}^4 \le n^{-1+2/\gamma}(\log^* n)^{2\psi/\beta} \le \sigma_d^4. \tag{48}$$

Тем самым при достаточно большом n правая часть неравенства (14) оценивается сверху следующим образом:

$$d^{\psi\gamma}(\sigma_1/\sigma_d)^\gamma n\mathbf{E}\|Z\|^\gamma + n^{\gamma/2}B_d^\gamma \ll_{\alpha,\beta,\gamma} n^{(2+\gamma)/4}(\log^* n)^{\psi\gamma/2\beta}\mathbf{E}\|Z\|^\gamma. \tag{49}$$

Пользуясь соотношениями (47) и (48), нетрудно также проверить, что при достаточно большом n выполняется условие (13) и, следовательно, справедливо утверждение теоремы 5 с оценкой

$$\mathbf{E}(\Delta_n(X, Y))^\gamma \ll_{\alpha,\beta,\gamma,\psi} n^{(2+\gamma)/4}(\log^* n)^{\psi\gamma/2\beta}\mathbf{E}\|Z\|^\gamma. \tag{50}$$

Правая часть неравенства (50) растет медленнее, чем $n^{\gamma/2}$ (порядок тривиальной оценки, вытекающей из леммы 1 и неравенства (25)). Поэтому неравенство

(50) представляет собой содержательную оценку точности аппроксимации в бесконечномерном принципе инвариантности. В частности, используя неравенство Ляпунова $\mathbf{E}\Delta^3 \le (\mathbf{E}\Delta^\gamma)^{3/\gamma}$, получим, что при $\gamma > 3$

$$\mathbf{E}(\Delta_n(X,Y))^3 \ll_{\alpha,\beta,\gamma,\psi} n^{3(2+\gamma)/4\gamma}(\mathbf{E}\|Z\|^\gamma)^{3/\gamma}. \tag{51}$$

При $\gamma > 6$ порядок неравенства (51) по n лучше, чем порядок оценки (19).

Пример 2. Предположим теперь, что в условиях примера 1 выполнено соотношение (16). Пусть n настолько велико, что

$$d = \min\bigl\{m : nB_m^2 < 1\bigr\} \ge 1. \tag{52}$$

Ясно, что тогда по-прежнему выполняется соотношение (47). Тем самым при достаточно большом n правая часть неравенства (12) оценивается сверху следующим образом:

$$d^{\psi\gamma} n\sigma_1^\gamma \mathbf{E}\bigl\|\mathbb{D}_d^{-1/2} Z^{(d)}\bigr\|^\gamma + n\mathbf{E}\|Z^{[d]}\|^\gamma + \bigl(nB_d^2\bigr)^{\gamma/2} \ll_{\alpha,\beta,\gamma,K} n(\log^* n)^{(2\psi+1)\gamma/2\beta}\mathbf{E}\|Z\|^\gamma. \tag{53}$$

Пользуясь соотношением (47), нетрудно также проверить, что при достаточно большом n выполняется условие (11) и, следовательно, справедливо утверждение теоремы 5 с оценкой

$$\mathbf{E}(\Delta_n(X,Y))^\gamma \ll_{\alpha,\beta,\gamma,\psi,K} n(\log^* n)^{(2\psi+1)\gamma/2\beta}\mathbf{E}\|Z\|^\gamma, \tag{54}$$

которая значительно сильнее неравенства (50) и близка к конечномерной оценке (7) теоремы 2.

Пример 3. Пусть $\sigma_m^2 = m^{-b}$, $m = 1, 2, \ldots$, где $b > 1$. Выберем

$$d = \max\bigl\{m : n^{2/\gamma} m^{2\psi}/\sigma_m^2 < nm\sigma_m^2\bigr\}. \tag{55}$$

Ясно, что тогда $d \ge 1$ и

$$d^{b-1} \asymp_b n^{r(\gamma-2)/\gamma}, \quad \text{где } r = \frac{b-1}{2b-1+2\psi}. \tag{56}$$

Тем самым при выполнении условия (13) правая часть неравенства (14) оценивается сверху следующим образом:

$$d^{\psi\gamma}(\sigma_1/\sigma_d)^\gamma n\mathbf{E}\|Z\|^\gamma + n^{\gamma/2}B_d^\gamma \ll_{b,\gamma} n^{(\gamma - r(\gamma-2))/2}\mathbf{E}\|Z\|^\gamma. \tag{57}$$

Пользуясь соотношением (56), нетрудно также проверить, что условие (13) выполняется при достаточно большом n, если $\gamma < 2(b-1+2\psi)$. В этом случае справедливо утверждение теоремы 5 с оценкой

$$\mathbf{E}(\Delta_n(X,Y))^\gamma \ll_{\psi,b,\gamma} n^{(\gamma - r(\gamma-2))/2}\mathbf{E}\|Z\|^\gamma. \tag{58}$$

Используя неравенство Ляпунова по аналогии с примером 1, получим, что при $\gamma > 3$

$$\mathbf{E}(\Delta_n(X,Y))^3 \ll_{\psi,b,\gamma} n^{3(\gamma - r(\gamma-2))/2\gamma}(\mathbf{E}\|Z\|^\gamma)^{3/\gamma}. \tag{59}$$

При $3r - 1 > 0$ и $\gamma > 6r/(3r-1)$ порядок неравенства (59) по n лучше, чем порядок оценки (19).

Если же условие (13) не выполнено для d, определенного с помощью равенства (55), следует уменьшить d, выбирая его с помощью соотношения

$$d = \max\bigl\{m : C(\gamma) m^{\gamma/2} (\log^* m)^{\gamma+1} (\mathbf{E}\|Z\|^\gamma)^{2/\gamma} \le n^{1-2/\gamma} \sigma_m^2\bigr\}. \tag{60}$$

Ясно, что при достаточно большом n

$$d^{b-1} \asymp_{b,\gamma,\lambda} n^{\delta(\gamma-2)/\gamma} (\log^* n)^{-\delta(\gamma+1)}, \quad \text{где } \delta = \frac{2(b-1)}{2b+\gamma},\ \lambda = \mathbf{E}\|Z\|^\gamma. \tag{61}$$

В этом случае справедливо утверждение теоремы 5 с оценкой

$$\mathbf{E}(\Delta_n(X,Y))^\gamma \ll_{\psi,b,\gamma,\lambda} n^{(\gamma-\delta(\gamma-2))/2} (\log^* n)^{\delta\gamma(\gamma+1)/2}, \tag{62}$$

которая должна быть слабее по порядку по сравнению с (58). Таким образом, в общем случае при достаточно большом n существует построение, для которого

$$\mathbf{E}(\Delta_n(X,Y))^\gamma \ll_{\psi,b,\gamma,\lambda} \max\{n^{(\gamma-\delta(\gamma-2))/2} (\log^* n)^{\delta\gamma(\gamma+1)/2}, n^{(\gamma-r(\gamma-2))/2}\}. \tag{63}$$

Пример 4. Предположим, что в условиях примера 3 выполнено соотношение (16). Выберем

$$d = \min\bigl\{m : n^{2/\gamma} m^{2\psi+1} < nm\sigma_m^2\bigr\}. \tag{64}$$

Ясно, что тогда $d \ge 1$ и

$$d^{b-1} \asymp_b n^{\rho(\gamma-2)/\gamma}, \quad \text{где } \rho = \frac{b-1}{b+2\psi}. \tag{65}$$

Поэтому при выполнении условия (11) правую часть неравенства (12) можно оценить сверху следующим образом:

$$d^{\psi\gamma} n\sigma_1^\gamma \mathbf{E}\bigl\|\mathbb{D}_d^{-1/2} Z^{(d)}\bigr\|^\gamma + n\mathbf{E}\|Z^{[d]}\|^\gamma + \bigl(nB_d^2\bigr)^{\gamma/2} \ll_{b,\gamma,K} n^{(\gamma-\rho(\gamma-2))/2} \mathbf{E}\|Z\|^\gamma. \tag{66}$$

Пользуясь соотношением (65), нетрудно также показать, что условие (11) выполняется при достаточно большом n, если $\gamma < 2(b-1+2\psi)$. В этом случае справедливо утверждение теоремы 5 с оценкой

$$\mathbf{E}(\Delta_n(X,Y))^\gamma \ll_{\psi,b,\gamma,K} n^{(\gamma-\rho(\gamma-2))/2} \mathbf{E}\|Z\|^\gamma. \tag{67}$$

Если же условие (11) не выполнено, следует выбирать d для применения теоремы 5 не по формуле (64), а с помощью соотношения

$$d = \max\{m : C(\gamma) K^{2/\gamma} m^{1+\gamma/2} (\log^* m)^{\gamma+1} \le n^{1-2/\gamma}\}. \tag{68}$$

Ясно, что при достаточно большом n

$$d^{b-1} \asymp_{b,\gamma,K} n^{\mu(\gamma-2)/\gamma} (\log^* n)^{-\mu(\gamma+1)}, \quad \text{где } \mu = \frac{2(b-1)}{2+\gamma}. \tag{69}$$

В этом случае справедливо утверждение теоремы 5 с оценкой

$$\mathbf{E}(\Delta_n(X,Y))^\gamma \ll_{\psi,b,\gamma,K} n^{(\gamma-\mu(\gamma-2))/2} (\log^* n)^{\mu\gamma(\gamma+1)/2}, \tag{70}$$

которая слабее по порядку по сравнению с (67). В общем случае при достаточно большом n существует построение, для которого

$$\mathbf{E}(\Delta_n(X,Y))^\gamma \ll_{\psi,b,\gamma,K} \max\{n^{(\gamma-\mu(\gamma-2))/2} (\log^* n)^{\mu\gamma(\gamma+1)/2}, n^{(\gamma-\rho(\gamma-2))/2}\} \mathbf{E}\|Z\|^\gamma. \tag{71}$$

Пример 5. Пусть $\sigma_m^2 = 1/m(\log^* m)^{1+\tau}$, $m = 1, 2, \ldots$, где $\tau > 0$. Через $\lceil x \rceil$ будем обозначать целую часть числа x. Выберем

$$d = \lceil n^\varepsilon \rceil, \quad \text{где } \varepsilon = \frac{\gamma - 2}{\gamma(\gamma + 22)}. \tag{72}$$

Ясно, что тогда

$$B_d^2 \asymp_\tau \frac{1}{(\log^* d)^\tau} \asymp_{\gamma,\tau} \frac{1}{(\log^* n)^\tau}. \tag{73}$$

Пользуясь соотношениями (72) и (73), нетрудно проверить, что при достаточно большом n выполнено условие (13) и справедливо утверждение теоремы 5 с оценкой

$$\mathbf{E}\big(\Delta_n(X, Y)\big)^\gamma \ll_{\gamma,\tau} (n/\log^* n)^{\gamma/2}. \tag{74}$$

Сравним оценки сверху, полученные в примерах 1, 3 и 5 с помощью теоремы 5, с оценкой снизу

$$\mathbf{E}(\Delta_n(X, Y))^\gamma \gg_\gamma \left(nB_k^2\right)^{\gamma/2}, \tag{75}$$

вытекающей из (23).

В примере 1 оценка снизу (75) далека от оценки сверху (50). Нетрудно подсчитать, что в примере 3 натуральное число k, определенное равенством (22), удовлетворяет соотношению $k \asymp_{b,\lambda} n^{1/b}$, $B_k^2 \asymp_{b,\lambda} n^{(1-b)/b}$, а оценка снизу (75) имеет порядок $O(n^{\gamma/2b})$. Это показывает, что порядок оценок сверху не случайно растет с ростом γ. Отметим, что при больших значениях γ и b порядок оценок сверху близок к $n^{\gamma/4}$.

При относительно небольших значениях γ и b на порядок оценок существенно влияет величина ψ, которая возникает из-за достаточно больших степеней размерности в оценках погрешности в теоремах 2 и 3. Возможные уточнения теорем 2 и 3 должны привести к улучшению порядка точности аппроксимации как в примерах 1–4, так и в теоремах 4 и 5.

В примере 5 легко проверяется, что $k \asymp_\tau n/(\log^* n)^{1+\tau}$. Тем самым оценки снизу и сверху имеют одинаковый порядок $O((n/\log^* n)^{\gamma/2})$, так что теорема 5 дает правильный порядок точности аппроксимации. То же самое произойдет, если дисперсии координат σ_m^2 убывают еще медленнее, чем в примере 5. При этом порядок оценки может быть сделан сколь угодно близким к тривиальному порядку $O(n^{\gamma/2})$.

Авторы благодарны рецензенту за ряд полезных замечаний, позволивших существенно улучшить изложение.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гётце Ф., Зайцев А. Ю.* Точность аппроксимации в многомерном принципе инвариантности для сумм независимых одинаково распределенных случайных векторов с конечными моментами // Зап. научн. семинаров ПОМИ. 2009. Т. 368. С. 110–121.
2. *Götze F., Zaitsev A. Yu.* Bounds for the rate of strong approximation in the multidimensional invariance principle // Теория вероятностей и ее применения. 2008. Т. 53, № 1. С. 100–123.
3. *Зайцев А. Ю.* Точность сильной гауссовской аппроксимации для сумм независимых одинаково распределенных случайных векторов // Зап. научн. семинаров ПОМИ. 2009. Т. 364. С. 148–165.
4. *Саханенко А. И.* Оценки в принципе инвариантности // Тр. Ин-та математики СО АН СССР. Наука: Новосибирск, 1985. Т. 5. С. 27–44.

5. *Rosenthal H. P.* On the subspaces of L_p ($p > 2$) spanned by sequences of independent random variables // Israel J. Math. 1970. V. 8. P. 273–303.

6. *Rosenthal H. P.* On the span in L^p of sequences of independent random variables. II // Proc. Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability (Univ. California, Berkeley, CA, 1970/1971.) V. II: Probability theory. Berkeley, CA: Univ. California Press, 1972. P. 149–167.

7. *Бенткус В., Гётце Ф., Паулаускас В., Рачкаускас А.* Точность гауссовской аппроксимации в банаховых пространствах // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, 1991. Т. 81. С. 39–139. (Итоги науки и техники.).

8. *Komlós J., Major P., Tusnády G.* An approximation of partial sums of independent RV'-s and the sample DF. I, II. // Z. Wahrsch. verw. Geb. 1975. Bd 32. S. 111–131; 1976. Bd 34. S. 34–58.

9. *Боровков А. А.* О скорости сходимости в принципе инвариантности // Теория вероятностей и ее применения. 1973. Т. 18. С. 217–234.

10. *Major P.* The approximation of partial sums of independent r.v.'s // Z. Wahrsch. verw. Geb. 1976. Bd 35. S. 213–220.

11. *Einmahl U.* Extensions of results of Komlós, Major and Tusnády to the multivariate case // J. Multivariate Anal. 1989. V. 28. P. 20–68.

12. *Боровков А. А., Саханенко А. И.* Об оценках скорости сходимости в принципе инвариантности для банаховых пространств // Теория вероятностей и ее применения. 1980. Т. 25. С. 734–744.

13. *Боровков К. А.* О скорости сходимости в принципе инвариантности для гильбертова пространства // Теория вероятностей и ее применения. 1984. Т. 29. С. 532–535.

14. *Sakhanenko A. I.* Simple method of obtaining estimates in the invariance principle // Probability theory and mathematical statistics. Proc. of the Fifth Japan–USSR symp., held in Kyoto, Japan, July 8–14, 1986. Berlin: Springer-Verl., 1987. P. 430–443. (Lect. Notes Math.; V. 1299).

15. *Sakhanenko A. I.* A new way to obtain estimates in the invariance principle // High dimensional probability, II. Progr. Probab., 47 (Seattle, WA, 1999). Boston, MA: Birkhäuser, 2000. P. 223–245.

16. *de Acosta A.* Inequalities for B-valued random vectors with applications to the strong law of large numbers // Ann. Probab. 1981. V. 9. P. 157–161.

17. *Johnson W. B., Schechtman G., Zinn J.* Best constants in moment inequalities for linear combinations of independent and exchangeable random variables // Ann. Probab. 1985. V. 13. P. 234–253.

18. *Montgomery-Smith S. J.* Comparison of sums of independent identically distributed random vectors // Probab. Math. Stat. 1993. V. 14, N 2. P. 281–285.

19. *de la Peña V. H., Giné E.* Decoupling. From dependence to independence. Randomly stopped processes. U-statistics and processes. Martingales and beyond. New York: Springer-Verl., 1999.

20. *Berkes I., Philipp W.* Approximation theorems for independent and weakly dependent random vectors // Ann. Probab. 1979. V. 7, N 1. P. 29–54.

21. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения.. М.: Мир, 1984. Т. 2.

Статья поступила 18 марта 2011 г.

Götze Friedrich (Гётце Фридрих)
Fakultät für Mathematik,
Universität Bielefeld, Postfach 100131,
D-33501 Bielefeld,
Deutschland
goetze@math.uni-bielefeld.de

Зайцев Андрей Юрьевич
Санкт-Петербургское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова РАН,
наб. р. Фонтанки, 27, Санкт-Петербург 191023
zaitsev@pdmi.ras.ru