Сибирский математический журнал
Июль—август, 2011. Том 52, № 4

УДК 519.21

ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ КАНОНИЧЕСКИХ U–ПРОЦЕССОВ ОТ ЗАВИСИМЫХ НАБЛЮДЕНИЙ

И. С. Борисов, В. А. Жечев

Аннотация. Доказана функциональная предельная теорема для последовательности нормированных U-статистик (так называемых U-процессов) произвольной размерности с каноническими (вырожденными) ядрами, заданных на выборках растущего объема из последовательности стационарно связанных наблюдений с условием φ-перемешивания. Соответствующее предельное распределение описывается в виде бесконечной полиномиальной формы от последовательности винеровских зависимых процессов с известной ковариацией.

Ключевые слова: канонические U-статистики, принцип инвариантности, стационарно связанные наблюдения, φ-перемешивание.

1. Введение, основные определения и понятия

С середины 50-х гг. прошлого века известна функциональная предельная теорема — принцип инвариантности — для процессов частичных сумм независимых или слабо зависимых случайных величин (см., например, [1–3]). В 80-е гг. окончательно сформировалась предельная теория (в частности, включающая соответствующий принцип инвариантности) для более общих объектов — так называемых U-статистик и статистик Мизеса (V-статистик) произвольного порядка как с каноническими, так и неканоническими ядрами и независимыми наблюдениями (см., например, [4–7]). Если изучение предельного поведения неканонических U- и V-статистик в известной степени сводится к асимптотическому анализу сумм случайных величин, то для упомянутых канонических статистик ситуация значительно усложняется. В случае независимых наблюдений предельное распределение указанных статистик может быть представлено в виде бесконечной полиномиальной формы от независимых гауссовских величин (см. [5]) или в виде кратных стохастических интегралов с интегрирующей стохастической винеровской продакт-мерой (см. [6]). Соответственно слабые пределы в функциональной предельной теореме представляют собой либо аналогичные полиномиальные формы от независимых винеровских процессов (см. [4]) или однопараметрические семейства кратных стохастических интегралов с интегрирующей стохастической продакт-мерой, порожденной так называемым случайным полем Кифера (см. [7]).

Для слабо зависимых наблюдений изучение предельного поведения канонических U- и V-статистик существенно усложняется по сравнению со случаем обычных сумм. Прежде всего это относится к описанию предельного распределения в виде кратных стохастических интегралов (см. [8]). В данном случае более продуктивным оказался подход, связанный с использованием аппарата ортогональных рядов (см. [5, 9]), который впервые был использован в случае независимых наблюдений и канонических статистик второго порядка еще в 1947 г. в классической работе Мизеса [10], а позже был распространен и на канонические статистики произвольного порядка (см. [5]).

Напомним основные моменты второго подхода в случае слабо зависимых наблюдений с равномерно сильным перемешиванием (более подробно см. [9]).

Пусть $X_1, X_2, \dots$ — стационарная последовательность случайных величин, заданных на $(\Omega, F, \mathbb{P})$. Обозначим через F распределение X_1. Рассмотрим функции $f \in L_2(\mathbb{R}^m, F^m)$, где F^m — продакт-мера с маргинальным распределением F. Тогда справедливо разложение в кратный ряд (см. [11])

$$f(t_1, \dots, t_m) = \sum_{k_1=0}^{\infty} \dots \sum_{k_m=0}^{\infty} f_{k_1\dots k_m} e_{k_1}(t_1)\dots e_{k_m}(t_m), \tag{1}$$

сходящийся в норме $L_2(\mathbb{R}^m, F^m)$, где $\{e_{k_j}\}$ — ортонормированный базис в $L_2(\mathbb{R}, F)$, причем без ограничения общности можно считать, что $e_0 \equiv 1$. Тогда $\mathbb{E}e_j(X_1) = 0$, $j \geq 1$, из условия ортогональности с e_0 и $\mathbb{E}e_i(X_1)e_j(X_1) = \delta_{i,j}$ для всех $i \neq j$.

Обозначим через $\{X_i^*\}$ последовательность независимых копий случайной величины X_1. Если коэффициенты разложения $\{f_{k_1\dots k_m}\}$ абсолютно суммируемы, то в силу теоремы Б. Леви и очевидной оценки $\mathbb{E}|e_{k_1}(X_1^*)\dots e_{k_m}(X_m^*)| \leq 1$ ряд в (1) при замене аргументов $t_1, \dots, t_m$ случайными величинами $X_1^*, \dots, X_m^*$ будет сходиться п. н.

Определение 1. Функция $f(t_1, \dots, t_m) \in L_2(\mathbb{R}^m, F^m)$ называется *канонической* (или *вырожденной*), если

$$\mathbb{E}f(y_1, \dots, y_{i-1}, X_1, y_{i+1}, \dots, y_m) = 0$$

для всех $y_j \in \mathbb{R}$ и $i \in \{1, \dots, m\}$, где два случая $i = 1$ и $i = m$ соответствуют крайним положениям координаты X_1 векторного аргумента функции f.

Отметим важное свойство канонических функций (см. [9]).

Предложение 1. *Если $f(t_1, \dots, t_m)$ — каноническая функция, то e_0 отсутствует в разложении* (1), *т. е.*

$$f(t_1, \dots, t_m) = \sum_{k_1=1}^{\infty} \dots \sum_{k_m=1}^{\infty} f_{k_1\dots k_m} e_{k_1}(t_1)\dots e_{k_m}(t_m). \tag{2}$$

Определим *каноническую U-статистику* от выборки объема n стационарно связанных наблюдений:

$$U_n := n^{-m/2} \sum_{1 \leq i_1 \neq} \dots \sum_{\neq i_m \leq n} f(X_{i_1}, \dots, X_{i_m}),$$

где f — каноническое ядро.

В настоящей статье будем рассматривать последовательность U-статистик

$$U_n(t) := n^{-m/2} \sum_{1 \leq i_1 \neq} \dots \sum_{\neq i_m \leq [nt]} f(X_{i_1}, \dots, X_{i_m}), \quad t \in [0, 1],$$

как случайный процесс в $D[0, 1]$ — так называемый *U-процесс*.

Асимптотическое поведение канонических U-статистик достаточно полно изучено. Скажем, при условии независимости наблюдений в [5] доказано, что

$$U_n \xrightarrow{d} \sum_{k_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_m=0}^{\infty} f_{k_1 \dots k_m} \prod_{j=1}^{\infty} H_{v_j(k_1,\dots,k_m)}(\tau_j), \tag{3}$$

где $\{\tau_j\}$ — последовательность независимых стандартных нормальных величин, $v_j(i_1,\dots,i_m)$ — количество индексов среди $i_1,\dots,i_m$, равных j, а $H_k(x)$ — полиномы Эрмита, определенные по формуле

$$H_k(x) = (-1)^k \exp(x^2/2) \frac{d^k}{dx^k} \exp(-x^2/2), \quad k \geq 0.$$

В [9] получен аналог результата (3) для наблюдений с условиями α- и φ-перемешивания.

В настоящей работе рассматриваются только стационарные последовательности $\{X_i\}$, удовлетворяющие условию φ-перемешивания. Напомним определение. Обозначим через $\mathfrak{M}_j^k$, где $j \leq k$, σ-алгебру событий, порожденную случайными величинами $X_j,\dots,X_k$.

Определение 2. Последовательность $X_1, X_2, \dots$ *удовлетворяет условию φ-перемешивания*, если

$$\varphi(i) := \sup_{k\geq 1} \sup_{\substack{A \in \mathfrak{M}_1^k, \\ B \in \mathfrak{M}_{k+1}^{\infty}, \\ \mathbb{P}(A) > 0}} \frac{|\mathbb{P}(AB) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)|}{\mathbb{P}(A)} \to 0 \quad \text{при } i \to \infty.$$

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi(k)^{1/2} < \infty.$$

Отметим, что это известное условие обеспечивает применимость центральной предельной теоремы для соответствующих стационарных последовательностей (см., например, [1]).

При переходе от независимых наблюдений к зависимым возникает принципиальная сложность: после подстановки в тождество (2) вместо переменных $(t_1,\dots,t_m)$ набора зависимых случайных величин $(X_1,\dots,X_m)$ равенство в (2) может нарушаться с положительной вероятностью (см. контрпример в [9]). Введем ограничение на совместное распределение элементов последовательности $\{X_i\}$, обеспечивающее указанную возможность замены в (2) неслучайных переменных случайными (см. [9]).

(AC) *Для любого набора попарно различных индексов $(j_1,\dots,j_m)$ распределение вектора $(X_{j_1},\dots,X_{j_m})$ абсолютно непрерывно относительно распределения вектора $(X_1^*,\dots,X_m^*)$.*

Например, условие (AC) будет выполненным для любой стационарной последовательности с условием так называемого ψ-перемешивания (см. [8, 9]). Кроме того, нетрудно привести пример последовательности скользящих средних, построенных по последовательности независимых равномерно распределенных случайных величин таких, что любые наборы из m элементов из построенной последовательности скользящих средних будут иметь ограниченную плотность совместного распределения, что и будет означать выполнение условия (AC).

Как отмечалось выше, условие

$$\sum_{k_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{k_m=1}^{\infty} |f_{k_1\ldots k_m}| < \infty \tag{4}$$

влечет за собой п. н. сходимость ряда (2) относительно распределения вектора $(X_1^*, \ldots, X_m^*)$. Следовательно, при выполнении условия (AC) отмеченная сходимость имеет место и п. н. относительно распределения случайного вектора $(X_{j_1}, \ldots, X_{j_m})$. Другими словами, при выполнении (AC) в тождество (2) вместо переменных $t_1, \ldots, t_m$ можно подставить случайные величины $X_{j_1}, \ldots, X_{j_m}$ для любых попарно различных индексов $j_1, \ldots, j_m$.

Итак, при выполнении условий (AC) и (4) U-статистику можно представить следующим образом в виде кратного ряда, сходящегося с вероятностью 1:

$$\begin{aligned} U_n(t) &= n^{-m/2} \sum_{1\le i_1 \ne} \cdots \sum_{\ne i_m \le [nt]} \sum_{k_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_m=0}^{\infty} f_{k_1\ldots k_m} e_{k_1}(X_{i_1}) \ldots e_{k_m}(X_{i_m}) \\ &= n^{-m/2} \sum_{k_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_m=0}^{\infty} f_{k_1\ldots k_m} \sum_{1\le i_1 \ne} \cdots \sum_{\ne i_m \le [nt]} e_{k_1}(X_{i_1}) \ldots e_{k_m}(X_{i_m}). \end{aligned}$$

Дальнейшие рассуждения во многом аналогичны случаю независимых наблюдений и сводятся к последовательному выделению из кратной суммы в правой части приведенного тождества статистик с расщепляющимися ядрами. Действительно, выражение

$$n^{-m/2} \sum_{1\le i_1 \ne} \cdots \sum_{\ne i_m \le [nt]} e_{k_1}(X_{i_1}) \ldots e_{k_m}(X_{i_m})$$

представляется в виде линейной комбинации произведений следующих величин:

$$n^{-1/2} \sum_{i=1}^{[nt]} e_k(X_i), \quad n^{-1} \sum_{i=1}^{[nt]} e_{k_1}(X_i) e_{k_2}(X_i), \ldots, n^{-l/2} \sum_{i=1}^{[nt]} e_{k_1}(X_i) \cdots e_{k_l}(X_i).$$

Доказательство носит комбинаторный характер и не зависит от совместного распределения случайных величин $\{X_i\}$ (см. [5]).

Будем предполагать, что ортонормированный базис $\{e_j(t)\}$ в (2) удовлетворяет следующим дополнительным ограничениям, используемым в доказательстве предельных теорем для зависимых случайных величин (см. [9]):

$$\sup_i \mathbb{E}|e_i(X_1)|^m < \infty. \tag{5}$$

Введем последовательность винеровских процессов $\{w_i(t)\}$ с ковариациями

$$\mathbb{E}w_k(t_1) w_k(t_2) = \min(t_1, t_2) \left(1 + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{E}e_k(X_1) e_k(X_{j+1}) \right); \tag{6}$$

$$\mathbb{E}w_k(t_1) w_l(t_2) = \min(t_1, t_2) \left(\sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{E}e_k(X_1) e_l(X_{j+1}) + \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{E}e_l(X_1) e_k(X_{j+1}) \right), \quad l \ne k.$$

Конечность рядов (6) следует из вышеприведенных условий на коэффициенты перемешивания (см. [1]). Последовательность зависимых винеровских процессов $\{w_i(t)\}$ с ковариацией (6) существует в силу теоремы Колмогорова о согласованных распределениях (см., например, [2]) и далее будет играть роль слабого предела при $n \to \infty$ для последовательности случайных процессов $\left\{n^{-1/2}\sum\limits_{j=1}^{[nt]} e_i(X_j);\ i \geq 1\right\}$. Отметим, что для любого фиксированного N многомерный случайный процесс $\left\{n^{-1/2}\sum\limits_{j=1}^{[nt]} e_i(X_j);\ 1 \leq i \leq N\right\}$ при $n \to \infty$ в силу соответствующего принципа инвариантности C-сходится к N-мерному винеровскому процессу $\{w_i(t);\ 1 \leq i \leq N\}$. При этом допускаем в (6) обращение в нуль множителей при ковариационной функции $\min(t_1, t_2)$ стандартного винеровского процесса. Иными словами, нам удобно будет понимать тождественный нуль на отрезке $[0, 1]$ как винеровский процесс с нулевой дисперсией. Отметим также, что класс всех вырожденных распределений представляет собой множество предельных точек в топологии слабой сходимости для класса всех гауссовских распределений.

Напомним, что речь идет о C-сходимости, вообще говоря, k-мерных случайных процессов $\{\xi_n(t)\}$ с траекториями из пространства $D^k[0, 1]$ с продакт-топологией Скорохода к п. н. непрерывному случайному процессу $\xi(t)$, если для любого измеримого в $D^k[0, 1]$ функционала $g(\cdot)$, непрерывного в точках пространства $C^k[0, 1]$ в равномерной топологии, последовательность $g(\xi_n)$ сходится по распределению к случайной величине $g(\xi)$ (см. [12]).

В заключение параграфа приведем полезное для дальнейшего анализа утверждение, которое представляет собой аналог классического моментного неравенства Розенталя для сумм независимых случайных величин.

Теорема 1 (см. [13]). *Пусть $\{\xi_i\}$ — последовательность центрированных случайных величин с конечными моментами порядка $t \geq 2$, удовлетворяющая условию φ-перемешивания, и, кроме того, $\varphi := \sum\limits_{k=1}^{\infty} \varphi^{1/2}(2^k) < \infty$. Тогда при $t \geq 2$ имеет место неравенство*

$$\mathbb{E}\max_{1\leq k\leq n}|S_k|^t \leq (tc(\varphi))^t\left(\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}|\xi_i|^t + \left(\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}|\xi_i|^2\right)^{t/2}\right),$$

где постоянная $c(\varphi)$ зависит только от φ.

2. Функциональная предельная теорема для U-процессов

Введем в рассмотрение случайный процесс

$$U(t) := \sum_{k_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{k_m=1}^{\infty} f_{k_1\dots k_m} t^{m/2}\prod_{j=1}^{\infty} H_{v_j(k_1,\dots,k_m)}(t^{-1/2}w_j(t)). \tag{7}$$

Теорема 2. *Пусть стационарная последовательность $\{X_i\}$ удовлетворяет условию φ-перемешивания с ограничениями* (5) *и $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\varphi(k)^{1/2} < \infty$, и пусть для канонического ядра $f \in L_2(\mathbb{R}^m, F^m)$ выполнены условия* (4) *и* (AC).

Тогда последовательность случайных процессов $U_n(t)$ при $n \to \infty$ C-сходится к случайному процессу $U(t)$, определенному в (7), *и соответствующий кратный ряд п. н. сходится для каждого $t \in [0, 1]$ и п. н. непрерывен по t.*

Доказательство. Для доказательства C-сходимости (см., например, [1]) нужно проверить сходимость конечномерных распределений и свойство плотности семейства допредельных распределений в равномерной топологии.

I. Сходимость конечномерных распределений. Покажем, что при $n \to \infty$

$$(U_n(t_1), \dots, U_n(t_q)) \xrightarrow{d} (U(t_1), \dots, U(t_q)),$$

где $t_1, \dots, t_q$ — произвольный конечный набор точек из отрезка $[0,1]$.

Введем в рассмотрение соответствующую частичную сумму по индексам k_i в определении $U_n(t)$:

$$U_n^N(t) := n^{-m/2} \sum_{k_1=1}^{N} \cdots \sum_{k_m=1}^{N} f_{k_1 \dots k_m} \sum_{1 \le i_1 \ne} \cdots \sum_{\ne i_m \le [nt]} e_{k_1}(X_{i_1}) \dots e_{k_m}(X_{i_m}),$$

а также аналогичную частичную сумму для $U(t)$:

$$U^N(t) := \sum_{k_1=1}^{N} \cdots \sum_{k_m=1}^{N} f_{k_1 \dots k_m} t^{m/2} \prod_{j=1}^{\infty} H_{v_j(k_1, \dots, k_m)}(t^{-1/2} w_j(t)).$$

Сначала для любого натурального N докажем сходимость

$$\big(U_n^N(t_1), \dots, U_n^N(t_q)\big) \xrightarrow{d} (U^N(t_1), \dots, U^N(t_q)).$$

Рассмотрим подробнее статистику

$$U_n^N(t) := n^{-m/2} \sum_{k_1=1}^{N} \cdots \sum_{k_m=1}^{N} f_{k_1 \dots k_m} \sum_{1 \le i_1 \ne} \cdots \sum_{\ne i_m \le [nt]} e_{k_1}(X_{i_1}) \dots e_{k_m}(X_{i_m}),$$

которая является линейной комбинацией конечного числа U-статистик следующего вида:

$$U_n^N(e_{k_1}, \dots, e_{k_m})(t) := n^{-m/2} \sum_{1 \le i_1 \ne} \cdots \sum_{\ne i_m \le [nt]} e_{k_1}(X_{i_1}) \dots e_{k_m}(X_{i_m}).$$

Далее с помощью рассуждений, аналогичных проведенным выше для независимых наблюдений, представляем последнюю U-статистику в виде суммы статистик Мизеса, где суммирование ведется по всевозможным, не только попарно различным, наборам $j_1, \dots, j_m$. Затем, меняя порядок суммирования, сводим задачу к анализу полиномов от следующих случайных процессов:

$$n^{-1/2} \sum_{i=1}^{[nt]} e_k(X_i),\ n^{-1} \sum_{i=1}^{[nt]} e_{k_1}(X_i) e_{k_2}(X_i), \dots, n^{-l/2} \sum_{i=1}^{[nt]} e_{k_1}(X_i) \cdots e_{k_l}(X_i).$$

Для каждого $2 < l \le m$ указанные суммы при $n \to \infty$ сходятся к 0 по вероятности, так как в силу условия (5) и неравенства Гёльдера конечна величина $\mathbb{E}|e_{k_1}(X_i) \cdots e_{k_l}(X_i)|$ и по закону больших чисел для слабо зависимых величин имеет место сходимость

$$n^{-1} \sum_{i=1}^{[nt]} e_{k_1}(X_i) \cdots e_{k_l}(X_i) \xrightarrow{p} t \mathbb{E} e_{k_1}(X_i) \cdots e_{k_l}(X_i),$$

а значит, при $l > 2$ получаем

$$n^{-l/2} \sum_{i=1}^{[nt]} e_{k_1}(X_i) \cdots e_{k_l}(X_i) \xrightarrow{p} 0$$

при всех $t \in [0,1]$.

Поэтому слагаемые, содержащие такие суммы в качестве сомножителя, тоже сходятся к нулю по вероятности. При $l = 2$ к указанным суммам также применяется закон больших чисел. Ввиду ортонормированности базиса в пределе эти величины совпадают с $t\delta_{k_1,k_2}$, где δ_{k_1,k_2} — символ Кронекера. Таким образом, в пределе результат для частичных сумм аналогичен уже изученному случаю для независимых наблюдений (см. [4]):

$$U_n^N(t) \xrightarrow{d} U^N(t) = \sum_{k_1=1}^{N} \cdots \sum_{k_m=1}^{N} f_{k_1\dots k_m} t^{m/2} \prod_{j=1}^{\infty} H_{v_j(k_1,\dots,k_m)}(t^{-1/2} w_j(t)).$$

Отсюда получаем, что при $n \to \infty$

$$\big(U_n^N(t_1),\dots,U_n^N(t_q)\big) \xrightarrow{d} (U^N(t_1),\dots,U^N(t_q)),$$

где $w_j(t)$ имеют совместное распределение с ковариациями, определенными в (6). Это утверждение является непосредственным следствием многомерной центральной предельной теоремы для стационарных последовательностей случайных величин с перемешиванием, поскольку в этом случае можно применять известный метод Крамера — Уолда (см. [1]).

II. Плотность последовательности распределений U-процессов. Надо доказать следующее:

$$\lim_{\Delta\to 0} \limsup_{n\to\infty} P(\sup_t |U_n(t+\Delta) - U_n(t)| > c) = 0.$$

Сначала докажем аналогичное утверждение для U_n^N:

$$\lim_{\Delta\to 0} \limsup_{n\to\infty} P\big(\sup_t \big|U_n^N(t+\Delta) - U_n^N(t)\big| > c\big) = 0.$$

Очевидно, что если для конечного числа процессов выполнено свойство плотности, то и для их суммы оно тоже будет иметь место. Поэтому исследуем свойство плотности в отдельности для процессов, составляющих U_n^N. Отметим, что

$$U_n^N(t) = n^{-m/2} \sum_{k_1=0}^{N} \cdots \sum_{k_m=0}^{N} \sum_{1\le i_1\ne} \cdots \sum_{\ne i_m \le [nt]} f_{k_1\dots k_m} e_{k_1}(X_{i_1})\dots e_{k_m}(X_{i_m})$$

состоит из конечного числа сумм вида

$$S_m(t) \equiv S_n(m,k_1,\dots,k_m)(t) := n^{-m/2} \sum_{1\le i_1\ne} \cdots \sum_{\ne i_m\le[nt]} e_{k_1}(X_{i_1})\dots e_{k_m}(X_{i_m}),$$

где индексы $1 \le k_1,\dots,k_m \le N$ произвольны.

Заметим, что $\mathbb{E}\sup_t |S_m(t)| < C(m) < \infty$. Действительно, добавляя и вычитая диагональные элементы кратной суммы $S_m(t)$, получим конечную линейную комбинацию следующих произведений:

$$S_1^{(1)}(t)\dots S_1^{(j)}(t), \quad 1 \le j \le m,$$

где $S_1^{(j)}(t) = n^{-1/2} \sum\limits_{i\le[nt]} e_j(X_i)$. Применяя теорему 1, приходим к соотношению

$$\mathbb{E}\sup_t \big|S_1^{(1)}(t)\dots S_1^{(j)}(t)\big| \le \big(\mathbb{E}\sup_t \big|S_1^{(1)}(t)\big|^j \dots \mathbb{E}\sup_t \big|S_1^{(j)}(t)\big|^j\big)^{1/j} < \infty.$$

Докажем свойство плотности для распределений процессов $S_n(m,\dots)(t)$ индукцией по размерности m. Для $m=1$ утверждение содержится в [1].

Пусть для всех $m \le l$ утверждение верно. Докажем его справедливость при $m=l+1$. Воспользуемся тождеством

$$\begin{aligned}
&n^{-(l+1)/2} \sum_{1\le i_1\ne} \cdots \sum_{\ne i_{l+1}\le[nt]} e_{k_1}(X_{i_1})\dots e_{k_l}(X_{i_l})e_{k_{l+1}}(X_{i_{l+1}}) \\
&\quad = n^{-l/2}\Big(\sum_{1\le i_1\ne} \cdots \sum_{\ne i_l\le[nt]} e_{k_1}(X_{i_1})\dots e_{k_l}(X_{i_l})\Big) n^{-1/2}\sum_{i_{l+1}=1}^{[nt]} e_{k_{l+1}}(X_{i_{l+1}}) \\
&- n^{-1}\sum_{i=1}^{[nt]} e_{k_1}(X_i)e_{k_{l+1}}(X_i) n^{-(l-1)/2} \sum_{1\le i_2\ne} \cdots \sum_{\ne i_l\le[nt]} e_{k_2}(X_{i_2})\dots e_{k_l}(X_{i_l}) - \dots \\
&- n^{-1}\sum_{i=1}^{[nt]} e_{k_l}(X_i)e_{k_{l+1}}(X_i) n^{-(l-1)/2} \sum_{1\le i_1\ne} \cdots \sum_{\ne i_{l-1}\le[nt]} e_{k_1}(X_{i_1})\dots e_{k_{l-1}}(X_{i_{l-1}}).
\end{aligned}$$

Это соотношение удобно переписать в других обозначениях:

$$\begin{aligned}
S_n(l+1,k_1,\dots,k_{l+1})(t) &= S_n(l,k_1,\dots,k_l)(t)S_n(1,k_{l+1})(t) \\
&- S_n(l-1,k_2,\dots,k_l)\theta_n^1(t) - \dots - S_n(l-1,k_1,\dots,k_{l-1})\theta_n^l(t), \qquad (8)
\end{aligned}$$

где $\theta_n^j(t) = n^{-1}\sum\limits_{i=1}^{[nt]} e_{k_j}(X_i)e_{k_{l+1}}(X_i)$ и по определению $S_0(t)\equiv 1$.

Сначала заметим, что с помощью тождества (8) индукцией по l легко устанавливается равномерная стохастическая ограниченность случайных процессов $S_n(l,k_1,\dots,k_l)(t)$, т. е. соотношение

$$\lim_{K\to\infty} \mathbf{P}\big(\sup_{0\le t\le 1}|S_n(l,k_1,\dots,k_l)(t)| > K\big) = 0.$$

При этом база индукции ($l=1$) непосредственно следует из теоремы 1 и очевидного соотношения (закона больших чисел для слабо зависимых одинаково распределенных случайных величин)

$$\sup_{0\le t\le 1}\big|\theta_n^j(t)\big| \le n^{-1}\sum_{i=1}^{n}|e_{k_j}(X_i)e_{k_{l+1}}(X_i)| \xrightarrow{p} \mathbf{E}|e_{k_j}(X_1)e_{k_{l+1}}(X_1)| < \infty \qquad (9)$$

при $n\to\infty$.

Докажем свойство плотности распределений (при всех n) всех парных произведений случайных процессов в тождестве (8), вновь применяя индукцию по параметру l. Например, рассмотрим произведение $S_n(l,\cdot)(t)S_n(1,\cdot)(t)$ (аналогично анализируются и другие парные произведения в (8)). В силу элементарного представления

$$S_l(t+\Delta)S_1(t+\Delta) - S_l(t)S_1(t) = (S_l(t+\Delta)-S_l(t))S_1(t+\Delta) + S_l(t)(S_1(t+\Delta)-S_1(t))$$

можно утверждать, что указанное свойство плотности для произведения двух процессов будет иметь место, если этим свойством обладает каждый из них и, кроме того, каждый из этих процессов будет равномерно по $t\in[0,1]$ стохастически ограниченным, что уже установлено. База индукции также следует из теоремы 1. Индукционный переход от l к $l+1$ сразу вытекает из (8) и простого наблюдения, что все случайные процессы $n^{1/2}\theta_n^j(t)$ представляют собой классические процессы частичных сумм (случайные ломаные), для которых при наших условиях в [1] уже доказано свойство плотности их распределений.

Оценим первый момент равномерной нормы хвоста статистики (кратного ряда):

$$\mathbb{E}\sup_t\bigl|U_n(t)-U_n^N(t)\bigr|=\mathbb{E}\sup_t\Bigl|\sum_{\max(k_j)\geq N+1}\dots\sum f_{k_1\dots k_m}S_n(m,\dots)(t)\Bigr|$$

$$\leq\sum_{\max(k_j)\geq N+1}\dots\sum|f_{k_1\dots k_m}|\mathbb{E}\sup_t|S_n(m,\dots)(t)|\leq C(m)\sum_{\max(k_j)=N+1}^{\infty}|f_{k_1\dots k_m}|.$$

Таким образом, для любого $\varepsilon>0$ в силу соотношения $\sum\limits_{k_1=1}^{\infty}\dots\sum\limits_{k_m=1}^{\infty}|f_{k_1\dots k_m}|<\infty$ существует такое N, что

$$\sum_{\max(k_j)\geq N+1}\dots\sum|f_{k_1\dots k_m}|<\varepsilon.$$

Тогда справедлива следующая оценка:

$$\begin{aligned}
&P(\sup_t|U_n(t+\Delta)-U_n(t)|>c)\\
&\qquad\leq P\bigl(\sup_t\bigl|U_n^N(t+\Delta)-U_n^N(t)\bigr|+2\sup_t\bigl|U_n(t)-U_n^N(t)\bigr|>c\bigr)\\
&\qquad\leq P\bigl(\sup_t\bigl|U_n^N(t+\Delta)-U_n^N(t)\bigr|>c/3\bigr)+P\bigl(\sup_t\bigl|U_n(t)-U_n^N(t)\bigr|>c/3\bigr)\\
&\qquad\leq P\bigl(\sup_t\bigl|U_n^N(t+\Delta)-U_n^N(t)\bigr|>c/3\bigr)+3c^{-1}\mathbb{E}\sup_t\bigl|U_n(t)-U_n^N(t)\bigr|\\
&\qquad\leq P\bigl(\sup_t\bigl|U_n^N(t+\Delta)-U_n^N(t)\bigr|>c/3\bigr)+3c^{-1}\varepsilon C(m).
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\lim_{\Delta\to0}\limsup_{n\to\infty}P(\sup_t|U_n(t+\Delta)-U_n(t)|>c)\leq3c^{-1}\varepsilon C(m).$$

Так как ε произвольное, заключаем, что

$$\lim_{\Delta\to0}\limsup_{n\to\infty}P(\sup_t|U_n(t+\Delta)-U_n(t)|>c)=0.$$

Осталось показать п. н. непрерывность предельного случайного процесса $U(t)$. Так как при всех j справедливо соотношение

$$\mathbb{E}|w_j(t+\delta)-w_j(t)|^4=\mathbb{E}|w_j(\delta)|^4=C\delta^2,$$

для любых $l\leq m$ получаем

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\bigl|w_j^l(t+\delta)-w_j^l(t)\bigr|^4&=\mathbb{E}|w_j(t+\delta)-w_j(t)|^4\bigl|w_j^{l-1}(t+\delta)+\dots+w_j^{l-1}(t)\bigr|^4\\
&\leq\bigl(\mathbb{E}|w_j(t+\delta)-w_j(t)|^8\mathbb{E}\bigl|w_j^{l-1}(t+\delta)+\dots+w_j^{l-1}(t)\bigr|^8\bigr)^{1/2}\\
&\leq C_1(\delta^4)^{1/2}=C_1\delta^2.
\end{aligned}\tag{10}$$

Совершенно очевидно, что умножение случайного процесса $w_j^l(t)$ на любую неслучайную липшицеву функцию, по существу, не изменит неравенство (10): с точностью до постоянного множителя в правой части оно останется справедливым. Так что, домножив на t^k, $t \in [0,1]$, эти случайные процессы (в структуре рассматриваемого U-процесса, как следует из вышеприведенного анализа, присутствуют только множители t^k с целыми $k \geq 0$), получаем новые случайные процессы, для которых вышеприведенная оценка в (10) останется верной. Просуммировав величины $t^k w_j^l(t)$ с соответствующими числовым коэффициентами, можно получить выражение $t^{v_j(k_1,\dots,k_m)/2} H_{v_j(k_1,\dots,k_m)}(t^{-1/2} w_j(t))$. Так как для всех $j, k_1, \dots, k_m$ степень полинома $v_j(k_1,\dots,k_m)$ не больше m, найдется такая константа C, что

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|(t+\delta)^{v_j(k_1,\dots,k_m)/2} &H_{v_j(k_1,\dots,k_m)}((t+\delta)^{-1/2} w_j(t+\delta)) \\ &- t^{v_j(k_1,\dots,k_m)/2} H_{v_j(k_1,\dots,k_m)}(t^{-1/2} w_j(t))|^4 \leq C_2 \delta^2.\end{aligned}$$

Тогда и для произведения конечного числа таких процессов

$$Y_{k_1,\dots,k_m}(t) = t^{m/2} \prod_{j=1}^{\infty} H_{v_j(k_1,\dots,k_m)}(t^{-1/2} w_j(t)) \tag{10}$$

в силу конечности моментов

$$\mathbb{E}|t^{v_j(k_1,\dots,k_m)/2} H_{v_j(k_1,\dots,k_m)}(t^{-1/2} w_j(t))|^l, \quad l \leq m,$$

и неравенства Гёльдера справедлива оценка

$$\mathbb{E}|Y_{k_1,\dots,k_m}(t+\delta) - Y_{k_1,\dots,k_m}(t)|^4 \leq C_3 \delta^2.$$

Отметим, что в бесконечном произведении в (10) лишь конечный набор множителей отличен от 1, так как при $j > \max k_i$ все множители этого произведения равны 1 (т. е. начальному полиному Эрмита). Обозначим

$$\Delta_0 = \mathbb{E}|U(t+\delta) - U(t)|^4 = \mathbb{E}\left|\sum_{k_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{k_m=1}^{\infty} f_{k_1\dots k_m}(Y_{k_1,\dots,k_m}(t+\delta) - Y_{k_1,\dots,k_m}(t))\right|^4.$$

Для более компактной записи вместо мультииндекса $(k_1,\dots,k_m)$ будем использовать символ $\tilde{k}$, а также обозначим

$$\triangle Y_{\tilde{k}} := Y_{\tilde{k}}(t+\delta) - Y_{\tilde{k}}(t).$$

Применяя неравенство Гёльдера, окончательно получаем

$$\begin{aligned}\Delta_0 &\leq \sum_{\tilde{k_1}} \sum_{\tilde{k_2}} \sum_{\tilde{k_3}} \sum_{\tilde{k_4}} |f_{\tilde{k_1}} f_{\tilde{k_2}} f_{\tilde{k_3}} f_{\tilde{k_4}}| \mathbb{E}|\triangle Y_{\tilde{k_1}} \triangle Y_{\tilde{k_2}} \triangle Y_{\tilde{k_3}} \triangle Y_{\tilde{k_4}}| \\ &\leq \sum_{\tilde{k_1}} \sum_{\tilde{k_2}} \sum_{\tilde{k_3}} \sum_{\tilde{k_4}} |f_{\tilde{k_1}} f_{\tilde{k_2}} f_{\tilde{k_3}} f_{\tilde{k_4}}| (\mathbb{E}|\triangle Y_{\tilde{k_1}}|^4 \mathbb{E}|\triangle Y_{\tilde{k_2}}|^4 \mathbb{E}|\triangle Y_{\tilde{k_3}}|^4 \mathbb{E}|\triangle Y_{\tilde{k_4}}|^4)^{1/4} \\ &\leq \sum_{\tilde{k_1}} \sum_{\tilde{k_2}} \sum_{\tilde{k_3}} \sum_{\tilde{k_4}} |f_{\tilde{k_1}} f_{\tilde{k_2}} f_{\tilde{k_3}} f_{\tilde{k_4}}| K\delta^2 = K\delta^2 \left(\sum_{k_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{k_m=1}^{\infty} |f_{k_1\dots k_m}|\right)^4.\end{aligned}$$

Итак, в силу классического критерия Колмогорова (см. [1]) отсюда следует п. н. непрерывность $U(t)$.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Биллингсли П.* Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977.
2. *Боровков А. А.* Теория вероятностей. М.: Наука, 1986.
3. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Введение в теорию случайных процессов. М.: Наука, 1965.
4. *Ронжин А. Ф.* Функциональные предельные теоремы для U-статистик // Мат. заметки. 1986. Т. 40, № 5. С. 886–893.
5. *Rubin H., Vitale R.* Asymptotic distribution of symmetric statistics // Ann. Statist. 1980. V. 8, N 1. P. 165–170.
6. *Denker M., Grillenberger C., Keller G.* A note on invariance principles for v. Mises' statistics // Metrika. 1985. V. 32. P. 197–214.
7. *Dehling H., Denker M., Philipp W.* The almost sure invariance principle for the empirical processes of U-statistic structure // Ann. Inst. Henri Poincaré, Probab. Stat. 1987. V. 23, N 2. P. 121–134.
8. *Борисов И. С., Быстров А. А.* Предельные теоремы для канонических статистик Мизеса, построенных по зависимым наблюдениям // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 6. С. 1205–1217.
9. *Борисов И. С., Володько Н. В.* Ортогональные ряды и предельные теоремы для канонических U- и V-статистик от стационарно связанных наблюдений // Мат. труды. 2008. Т. 11, № 1. С. 25–48.
10. *Von Mises R.* On the asymptotic distribution of differentiable statistical functions // Ann. Math. Stat. 1947. V. 18. P. 309–348.
11. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972.
12. *Боровков А. А.* Асимптотические методы в теории массового обслуживания. М.: Наука, 1980.
13. *Утев С. А.* Суммы случайных величин с φ-перемешиванием // Тр. Ин-та математики СО АН СССР. Новосибирск: Наука, 1989. Т. 13. С. 78–100.

Статья поступила 9 февраля 2011 г.

Борисов Игорь Семенович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
`sibam@math.nsc.ru`

Жечев Василий Александрович
Новосибирский гос. университет, механико-математический факультет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
`v.zhechev@gmail.com`