Сибирский математический журнал
Июль—август, 2011. Том 52, № 4

УДК 519.214+519.226

ОБ АППРОКСИМАЦИИ НЕКОТОРЫХ СТАТИСТИК КРИТЕРИЕВ СОГЛАСИЯ ДЛЯ СЛУЧАЯ ДИСКРЕТНЫХ ТРЕХМЕРНЫХ ДАННЫХ

Ж. А. Асылбеков,
В. Н. Зубов, В. В. Ульянов

Аннотация. Исследуется скорость слабой сходимости распределений статистик $\{t_\lambda(\boldsymbol{Y}), \lambda \in \mathbb{R}\}$ критериев согласия со степенными мерами расхождения к хи-квадрат распределению. Статистики построены по n наблюдениям случайной величины с тремя возможными исходами. Доказано, что

$$\Pr(t_\lambda(\boldsymbol{Y}) < c) = G_2(c) + O(n^{-50/73}(\log n)^{315/146}),$$

где $G_2(c)$ — функция распределения хи-квадрат случайной величины с двумя степенями свободы. В доказательстве используется теорема М. Н. Хаксли (1993 г.) о приближении числа точек с целочисленными координатами, содержащихся в выпуклом множестве с гладкой границей на плоскости, его площадью.

Ключевые слова: точность хи-квадрат приближения, критерий согласия со степенными мерами расхождения, целочисленные точки, теорема Хаксли.

1. Введение и основной результат

Пусть $\boldsymbol{Y} = (Y_1, Y_2, Y_3)$ — случайный вектор, имеющий мультиномиальное распределение $M_3(n, \boldsymbol{\pi})$, т. е.

$$\Pr(Y_1 = n_1, Y_2 = n_2, Y_3 = n_3) = \begin{cases} n! \prod\limits_{j=1}^{3} \frac{\pi_j^{n_j}}{n_j!} & n_j = 0, \dots, n, \ n_1 + n_2 + n_3 = n; \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

где $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$, $\pi_j > 0$, $\sum\limits_{j=1}^{3} \pi_j = 1$. Вектор $\boldsymbol{Y}$ возникает, например, в результате n наблюдений случайной величины, принимающей три значения с вероятностями π_1, π_2, π_3. При этом Y_i соответствует частоте появлений i-го значения. Далее будем считать выполненной простую гипотезу H_0: $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{p}$, где $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, p_3)$, $p_j > 0$, $j = 1, 2, 3$, и $p_1 + p_2 + p_3 = 1$. Если наблюдается случайная величина с более чем тремя значениями, то вектор $\boldsymbol{p}$ состоит из теоретических вероятностей попадания наблюдаемой случайной величины в некоторые три попарно не пересекающиеся области при условии справедливости H_0, при этом

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 11–01–00515).

Y_i — число значений, попавших в i-ю область. Для построения соответствующего критерия согласия часто используется один из представителей семейства статистик со степенными мерами расхождения, имеющего вид

$$t_\lambda(\boldsymbol{Y}) = \frac{2}{\lambda(\lambda+1)} \sum_{j=1}^{3} Y_j \left[\left(\frac{Y_j}{np_j} \right)^\lambda - 1 \right], \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Замечание 1. При $\lambda = 0$ и $\lambda = -1$ статистику t_λ следует понимать как результат предельного перехода.

Замечание 2. Статистики t_λ впервые введены в [1, 2]. Полагая $\lambda = 1$, $\lambda = -1/2$ и $\lambda = 0$, получаем критерий хи-квадрат Карла Пирсона, статистику Фримана — Тьюки и логарифмическую статистику отношения правдоподобия соответственно.

Наша задача состоит в исследовании точности приближения хи-квадрат распределением для $\Pr(t_\lambda(\boldsymbol{Y}) < c)$, где c здесь и в дальнейшем обозначает произвольное положительное число. Поскольку компоненты вектора $\boldsymbol{Y}$ удовлетворяют равенству $Y_1 + Y_2 + Y_3 = n$, введем случайные величины

$$X_j = (Y_j - np_j)/\sqrt{n}, \ j = 1, 2, 3, \quad \boldsymbol{X} = (X_1, X_2)$$

и будем исследовать свойства вектора $\boldsymbol{X}$. Компоненты $\boldsymbol{X}$ сконцентрированы на решетке

$$L = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2);\, x_j = (n_j - n\,p_j)/\sqrt{n},\, j = 1, 2\},$$

где n_j — неотрицательные целые числа.

Имеем

$$\Pr(t_\lambda(\boldsymbol{Y}) < c) = \Pr(T_\lambda(X_1, X_2) < c) = \Pr(\boldsymbol{X} \in B^\lambda),$$

где

$$B^\lambda = \{(x, y) : T_\lambda(x, y) < c\} \tag{1}$$

и

$$\begin{aligned} T_\lambda(x, y) = {} & \frac{2}{\lambda(\lambda+1)} (np_1 + \sqrt{n}x) \left[\left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}p_1} \right)^\lambda - 1 \right] \\ & + \frac{2}{\lambda(\lambda+1)} (np_2 + \sqrt{n}y) \left[\left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}p_2} \right)^\lambda - 1 \right] \\ & + \frac{2}{\lambda(\lambda+1)} (np_3 - \sqrt{n}(x+y)) \left[\left(1 - \frac{x+y}{\sqrt{n}p_3} \right)^\lambda - 1 \right]. \end{aligned} \tag{2}$$

Множество B^λ принадлежит классу так называемых обобщенных выпуклых множеств, что будет показано в разд. 3.

Определение 1. Множество $B \subset \mathbb{R}^2$ называется *обобщенным выпуклым множеством*, если его можно представить в следующем виде:

$$B = \{(x, y) : \lambda_1(y) < x < \theta_1(y),\ y \in B_1\} = \{(x, y) : \lambda_2(x) < y < \theta_2(x),\ x \in B_2\},$$

где $B_1 \subset \mathbb{R}$, $B_2 \subset \mathbb{R}$ и λ_1, θ_1, λ_2, θ_2 — непрерывные функции, определенные на B_1 и B_2 соответственно.

В предположении, что выполнена основная гипотеза, для определенного выше случайного вектора $\boldsymbol{X}$ и произвольного ограниченного обобщенного выпуклого множества B Ярнольд в [3] получил асимптотическое разложение

$$\Pr(\boldsymbol{X} \in B) = J_1 + J_2 + O(n^{-1}),$$

где

$$J_1 = J_1(B) = \iint\limits_B \phi(\boldsymbol{x})\left\{1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\,h_1(\boldsymbol{x}) + \frac{1}{n}\,h_2(\boldsymbol{x})\right\} d\boldsymbol{x},$$

$$h_1(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}\frac{x_j}{p_j} + \frac{1}{6}\sum_{j=1}^{3} x_j\left(\frac{x_j}{p_j}\right)^2,$$

$$h_2(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\,h_1(x)^2 + \frac{1}{12}\left(1 - \sum_{j=1}^{3}\frac{1}{p_j}\right) + \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{x_j}{p_j}\right)^2 - \frac{1}{12}\sum_{j=1}^{3} x_j\left(\frac{x_j}{p_j}\right)^3,$$

а также $x_3 = -x_1 - x_2$,

$$J_2 = J_2(B) = -\frac{1}{n}\sum_{y\in L_2}\chi_{B_1}(y)[S_1(\sqrt{n}x + p_1 n)\phi(x,y)]_{\lambda_1(y)}^{\theta_1(y)} - \frac{1}{\sqrt{n}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\chi_{B_2}(x)[S_1(\sqrt{n}y + p_2 n)\phi(x,y)]_{\lambda_2(x)}^{\theta_2(x)}\,dx, \quad (3)$$

где

$$L_2 = \{y : y = (1/\sqrt{n})(m - np_2),\ m \in \mathbb{Z}\}, \quad (4)$$

$$S_1(x) = x - [x] - 1/2, \quad [h(x)]_{\lambda(y)}^{\theta(y)} = h(\theta(y)) - h(\lambda(y)),$$

$$\phi(x,y) = \frac{1}{2\pi|\Omega|^{1/2}}\exp\left(-\frac{1}{2}(x,y)\Omega^{-1}(x,y)^T\right)$$

и Ω — ковариационная матрица вектора $\boldsymbol{X}$. Здесь $\chi_A(x)$ — индикаторная функция, а функции θ_1, λ_1, θ_2, λ_2 суть непрерывные функции из определения 1 для множества B.

Шиотани и Фуджикоши в [4] показали, что в случаях $\lambda = 0$, $\lambda = -1/2$

$$J_1(B^\lambda) = G_2(c) + O(n^{-1}),$$
$$J_2(B^\lambda) = (N^\lambda - nV^\lambda)\frac{e^{-\frac{c}{2}}}{2\pi n}\sqrt{p_1p_2p_3} + o(1), \quad (5)$$
$$V^\lambda = V^1 + O(n^{-1}),$$

где $G_2(c)$ — функция распределения хи-квадрат распределения с двумя степенями свободы, N^λ — число точек решетки L в множестве B^λ, V^λ — объем множества B^λ. Эти результаты были обобщены Ридом на случай произвольного $\lambda \in \mathbb{R}$ в теореме 3.1 в [2], из которой вытекает, что

$$\Pr(T_\lambda < c) = \Pr\big(\chi_2^2 < c\big) + J_2(B^\lambda) + O(n^{-1}),$$

причем для $J_2(B^\lambda)$ справедливо представление (5). Этим задача оценки погрешности аппроксимации предельным распределением сводится к оценке порядка малости члена $J_2(B^\lambda)$.

Поскольку B^λ — обобщенное выпуклое множество (это будет показано в леммах 5 и 8), для члена $J_2(B^\lambda)$ справедлив результат Ярнольда (см. [3, теорема 3]):

$$J_2(B^\lambda) = O(n^{-1/2}).$$

В настоящей статье этот результат заметно улучшен.

Теорема 1. *При всех $\lambda \in \mathbb{R}$ справедлива оценка*

$$J_2(B^\lambda) = O(n^{-50/73}(\log n)^{315/146}). \tag{6}$$

Следствие 1. *При всех $\lambda \in \mathbb{R}$ справедливо приближение*

$$\Pr(t_\lambda(\boldsymbol{Y}) < c) = G_2(c) + O(n^{-50/73}(\log n)^{315/146}),$$

Замечание 3. Необходимо отметить, что в отличие от работ [2, 4], из которых следует лишь стремление к нулю величины $J_2(B^\lambda)$ при $n \to \infty$, в теореме 1 доказана степенная скорость такого стремления, которая лучше $O(n^{-1/2})$. Более того, показатель степени у n в (6) равен $-50/73$, что несколько лучше даже показателя $-2/3$, который получен Ярнольдом для классического критерия хи-квадрат Пирсона, т. е. для частного случая, когда $\lambda = 1$ (см. [3, теорема 4]). Наше уточнение опирается на результат из [5] о приближении числа целых точек в множестве с гладкой границей на плоскости площадью этого множества. В 2003 г. Хаксли в [6] улучшил результат из [5]. Однако при нашем подходе затруднительно использовать это улучшение. Объяснение причин требует введения дополнительных обозначений и анализа результата из [5], что и сделано в начале разд. 5 настоящей работы. Согласно нижним оценкам, полученным Харди в [7], порядок $J_2(B^1)$ не может быть лучше $O(n^{-3/4}\log\log n)$. Ситуация меняется, когда проблема рассматривается для мультиномиального распределения $M_k(n, \boldsymbol{\pi})$ с $k > 5$. Тогда, используя результат Гётце [8], можно доказать (см. [9, теорема 1]), что

$$J_2(B^1) = O(n^{-1}).$$

Заметим, что и в общем случае $\lambda \neq 1$ при рассмотрении мультиномиального распределения $M_k(n, \boldsymbol{\pi})$ с $k > 3$ порядок $J_2(B^\lambda)$ улучшается с ростом k, хотя и не достигает $O(n^{-1})$ (см. [10, теорема 2]). Однако в этом случае рассуждения значительно усложняются и требуется использование теоретико-числовых результатов о числе целых точек в выпуклых множествах с гладкой границей для пространств размерности $k-1$. При этом общий результат дает худшее следствие для случая $k = 3$, чем (6).

Доказательство теоремы 1 структурно разделено на две части. В первой (см. разд. 2) для произвольного λ оценивается порядок аппроксимации $J_2(B^\lambda)$ первым слагаемым в (5). Во второй части (см. разд. 3–5) анализируется применимость результата Хаксли из теории чисел к множеству B^λ и на основе этого строится окончательная оценка для $J_2(B^\lambda)$.

Авторы признательны профессорам Ф. Гётце и Я. Фуджикоши за полезные обсуждения.

2. Редукция члена J_2

Пусть $\hat\theta_1$ и $\hat\lambda_1$ — функции из определения 1 для эллипса $B^1 = \{(x, y) : T_1(x, y) < c\}$ с

$$T_1(x, y) = \left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_3}\right)x^2 + \frac{2}{p_3}xy + \left(\frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3}\right)y^2$$

и B_1^1 — область определения этих функций.

Лемма 1. *Мера Лебега множества* $B_1^\lambda \backslash B_1^1$ *есть величина порядка* $O(n^{-1/2})$.

Доказательство. Решая уравнение $T_1(x,y) = c$ относительно x, найдем явный вид функций $\hat\theta_1$ и $\hat\lambda_1$:

$$\hat\theta_1(y) = -\frac{p_1 y}{p_1+p_3} + \frac{\sqrt{p_1p_2p_3}\sqrt{-y^2 + cp_2(p_1+p_3)}}{p_2(p_1+p_3)},$$

$$\hat\lambda_1(y) = -\frac{p_1 y}{p_1+p_3} - \frac{\sqrt{p_1p_2p_3}\sqrt{-y^2 + cp_2(p_1+p_3)}}{p_2(p_1+p_3)}.$$

Отсюда получаем область определения этих функций:

$$B_1^1 = [-\sqrt{cp_2(p_1+p_3)}, \sqrt{cp_2(p_1+p_3)}]. \tag{7}$$

Учитывая, что B^λ — выпуклое множество с гладкой границей (это будет показано в леммах 5 и 8), мы можем найти точки, в которых прямые, параллельные оси Ox, касаются кривой, задаваемой соотношением $T_\lambda(x,y) = c$. Эти точки имеют минимальную и максимальную ординаты ($y_{\min}$ и $y_{\max}$) среди всех точек эллипса. Таким образом, их ординаты будут концами отрезка B_1^λ. Поскольку начиная с некоторого n всюду на множестве B^λ выполнено неравенство

$$\frac{\partial^2 T_\lambda}{\partial x^2}(x,y) > 0,$$

при фиксированном y функция $T_\lambda(x,y)$ в точке касания достигает минимума, равного c, если

$$\frac{\partial T_\lambda}{\partial x}(x,y) = 0.$$

Решая это уравнение относительно y, получаем, что точки с ординатами $y_{\min}$ и $y_{\max}$ расположены на прямой $x = -p_1y/(p_1+p_3)$. Подставляя это выражение в уравнение $T_\lambda(x,y) = c$, раскладывая левую часть по формуле Тейлора и выражая y, получаем, что

$$y_{\min} = -\sqrt{cp_2(p_1+p_3)} + O(n^{-1/2}), \quad y_{\max} = \sqrt{cp_2(p_1+p_3)} + O(n^{-1/2}).$$

Поэтому множество B_1^λ имеет вид

$$B_1^\lambda = [-\sqrt{cp_2(p_1+p_3)} + O(n^{-1/2}), \sqrt{cp_2(p_1+p_3)} + O(n^{-1/2})]. \tag{8}$$

Из (7) и (8) приходим к утверждению леммы. □

Обозначим

$$B_{1-}^1 = [-\sqrt{cp_2(p_1+p_3)} + n^{-1/2}, \sqrt{cp_2(p_1+p_3)} - n^{-1/2}]. \tag{9}$$

Замечание 4. В множество $B_1^1 \setminus B_{1-}^1$ попадают ровно две точки решетки L_2 (см. (7), (9) и (4)).

Замечание 5. Мера Лебега множества $B_1^\lambda \setminus B_{1-}^1$ есть $O(n^{-1/2})$ (см. лемму 1, (7) и (9)).

Замечание 6. Множество $B_1^\lambda \setminus B_{1-}^1$ представляет собой объединение не более чем двух полуинтервалов.

Лемма 2. *Существуют константы $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ такие, что функции θ_1 и λ_1 удовлетворяют следующим неравенствам:*

$$|\theta_1(y) - \hat{\theta}_1(y)| \leq c_1 n^{-1/4}, \quad |\lambda_1(y) - \hat{\lambda}_1(y)| \leq c_2 n^{-1/4} \tag{10}$$

для всех $y \in B_1^\lambda \cap B_{1-}^1$ и $n \geq N = \lceil (cp_2(p_1 + p_3))^{-1} \rceil$.

Доказательство. Раскладывая в уравнении $T_\lambda(\theta_1(y), y) = c$ левую часть по степеням n, получим

$$T_1(\theta_1(y), y) + R(y)n^{-1/2} = c \tag{11}$$

с

$$|R(y)| \leq c_3. \tag{12}$$

Выражая $\theta_1(y)$ из (11), имеем

$$|\theta_1(y) - \hat{\theta}_1(y)| = \frac{\sqrt{p_1 p_2 p_3}|R(y)|}{\sqrt{n}} \times \left| \sqrt{-y^2 + \left(c - \frac{R(y)}{\sqrt{n}}\right) p_2(p_1 + p_3)} + \sqrt{-y^2 + cp_2(p_1 + p_3)} \right|^{-1}. \tag{13}$$

Для $y \in B_{1-}^1$ в силу того, что B_{1-}^1 имеет вид (9), получим оценку

$$y^2 \leq cp_2(p_1 + p_3) - \frac{2\sqrt{cp_2(p_1 + p_3)}}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}. \tag{14}$$

Подставляя неравенство (14) в (13) и учитывая (12), имеем

$$|\theta_1(y) - \hat{\theta}_1(y)| = \frac{\sqrt{p_1 p_2 p_3} c_3}{c^{1/4}(p_2(p_1 + p_3))^{1/4}} n^{-1/4}$$

для всех $n \geq N = \lceil (cp_2(p_1 + p_3))^{-1} \rceil$. Отсюда вытекает первая оценка в (10). Вторая оценка в (10) доказывается аналогично. □

Замечание 7. Аналогичные оценки можно получить для функций θ_2 и λ_2.

Утверждение 1. *Член $J_2(B^\lambda)$, определяемый формулой* (3), *можно представить в следующем виде:*

$$J_2(B^\lambda) = \frac{d}{n}(N^\lambda - nV^\lambda) + O(n^{-3/4}), \tag{15}$$

где $d > 0$ — константа.

Доказательство. Рассмотрим по отдельности слагаемые в выражении (3). Положим

$$\begin{gathered} J_{2,1} = \frac{1}{n} \sum_{y \in L_2} \chi_{B_1^\lambda}(y) [S_1(\sqrt{n}x + p_1 n)\phi(x, y)]_{\lambda_1(y)}^{\theta_1(y)}, \\ J_{2,2} = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{B_2^\lambda}(x) [S_1(\sqrt{n}y + p_2 n)\phi(x, y)]_{\lambda_2(x)}^{\theta_2(x)} \, dx. \end{gathered} \tag{16}$$

Тогда

$$J_2(B^\lambda) = -(J_{2,1} + J_{2,2}). \tag{17}$$

Используя представление множества B_1^λ в виде объединения двух непересекающихся множеств: $B_1^\lambda = \left(B_1^\lambda \cap B_{1-}^1\right) \cup \left(B_1^\lambda \setminus B_{1-}^1\right)$, можем переписать $J_{2,1}$ в виде

$$J_{2,1} = \frac{1}{n}\sum_{y\in L_2}\chi_{B_1^\lambda\cap B_{1-}^1}(y)[S_1(\sqrt{n}x+p_1n)\phi(x,y)]_{\lambda_1(y)}^{\theta_1(y)} + \frac{1}{n}\sum_{y\in L_2}\chi_{B_1^\lambda\setminus B_{1-}^1}(y)[S_1(\sqrt{n}x+p_1n)\phi(x,y)]_{\lambda_1(y)}^{\theta_1(y)}. \quad (18)$$

Решетка L_2 имеет шаг $n^{-1/2}$, поэтому в множестве $B_1^\lambda \setminus B_{1-}^1$ в силу замечаний 5 и 6 содержится $O(1)$ точек этой решетки. Следовательно, ввиду ограниченности функций S_1 и ϕ второе слагаемое в (18) есть $O(n^{-1})$. Пользуясь формулой Лагранжа, получим

$$\begin{aligned}J_{2,1} = \frac{1}{n}\sum_{y\in L_2\cap B_1^\lambda\cap B_{1-}^1} & S_1(\sqrt{n}\theta_1(y)+p_1n)\frac{\partial\phi}{\partial x}(\xi_1(y),y)(\theta_1(y)-\hat\theta_1(y)) \\ &+ \frac{1}{n}\sum_{y\in L_2\cap B_1^\lambda\cap B_{1-}^1} S_1(\sqrt{n}\lambda_1(y)+p_1n)\frac{\partial\phi}{\partial x}(\xi_2(y),y)(\hat\lambda_1(y)-\lambda_1(y)) \\ &+ \frac{1}{n}\sum_{y\in L_2\cap B_1^\lambda\cap B_{1-}^1} d[S_1(\sqrt{n}x+p_1n)]_{\lambda_1(y)}^{\theta_1(y)} \\ &+ \frac{1}{n}\sum_{y\in L_2\cap(B_1^\lambda\setminus B_{1-}^1)} [S_1(\sqrt{n}x+p_1n)\phi(x,y)]_{\lambda_1(y)}^{\theta_1(y)},\end{aligned}$$

где $\xi_1(y)$ и $\xi_2(y)$ — некоторые функции, определенные на $B_1^\lambda \cap B_{1-}^1$. Дополнительно запишем

$$\begin{aligned}\sum_{y\in L_2\cap B_1^\lambda\cap B_{1-}^1} & d[S_1(\sqrt{n}x+p_1n)]_{\lambda_1(y)}^{\theta_1(y)} \\ &= \sum_{y\in L_2\cap B_1^\lambda} d[S_1(\sqrt{n}x+p_1n)]_{\lambda_1(y)}^{\theta_1(y)} - \sum_{y\in L_2\cap(B_1^\lambda\setminus B_{1-}^1)} d[S_1(\sqrt{n}x+p_1n)]_{\lambda_1(y)}^{\theta_1(y)}.\end{aligned}$$

В силу замечания 5, леммы 2 и ограниченности функций S_1 и ϕ заключаем, что

$$J_{2,1} = \frac{1}{n}\sum_{x_2\in L_2\cap B_1^\lambda} d[S_1(\sqrt{n}x+p_1n)]_{\lambda_1(y)}^{\theta_1(y)} + O(n^{-3/4}). \quad (19)$$

Проделывая то же самое с выражением (16), можем переписать его в виде

$$J_{2,2} = \frac{1}{\sqrt{n}}\int_{B_2^\lambda} d[S_1(\sqrt{n}y+p_2n)]_{\lambda_2(x)}^{\theta_2(x)}\,dx + O(n^{-3/4}). \quad (20)$$

Подставляя (19) и (20) в (17), получаем, что

$$-J_2(B^\lambda) = \frac{1}{n}\sum_{y\in L_2\cap B_1^\lambda} d[S_1(\sqrt{n}x+p_1n)]_{\lambda_1(y)}^{\theta_1(y)} + \frac{1}{\sqrt{n}}\int_{B_2^\lambda} d[S_1(\sqrt{n}y+p_2n)]_{\lambda_2(x)}^{\theta_2(x)}dx + O(n^{-3/4}). \quad (21)$$

Вынося константу d из-под знаков суммы и интеграла в (21) и применяя рассуждения работы [3] (см. доказательство теоремы 4 в [3]), получаем (15). $\square$

3. Выпуклость множества B^λ

Для квадратичной формы

$$\Phi(h_1, h_2, \dots, h_m) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} a_{ik} h_i h_k \tag{22}$$

запишем матрицу, ей соответствующую:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}. \tag{23}$$

Теорема (критерий Сильвестра). *Для того чтобы квадратичная форма* (22) *с симметричной матрицей* (23) *являлась положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры матрицы* (23) *были положительны.*

Доказательство см. в [11, гл. XVII, § 102, теорема 102.4].

Лемма 3. *Пусть функция $f(x)$ задана и дважды дифференцируема на выпуклом множестве $Q \subset \mathbb{R}^2$. Тогда для того чтобы эта функция являлась строго выпуклой на множестве Q, достаточно, чтобы второй дифференциал $d^2 f$ этой функции во всех точках Q являлся строго положительно определенной квадратичной формой.*

Доказательство см. в [12, гл. 14, § 7, лемма 2].

Лемма 4. *Функция $T_\lambda(x, y)$, определяемая формулой* (2), *строго выпукла на множестве $Q = \{(x, y) : x > -\sqrt{n}p_1,\ y > -\sqrt{n}p_2,\ x + y < \sqrt{n}p_3\}$.*

Доказательство. Множество Q выпуклое, поскольку является открытым треугольником. Вычислим частные производные второго порядка функции $T_\lambda(x, y)$:

$$\frac{\partial^2(T_\lambda)}{\partial x^2} = 2\left[\frac{1}{p_1}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}p_1}\right)^{\lambda-1} + \frac{1}{p_3}\left(1 - \frac{x+y}{\sqrt{n}p_3}\right)^{\lambda-1}\right],$$

$$\frac{\partial^2(T_\lambda)}{\partial y^2} = 2\left[\frac{1}{p_2}\left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}p_2}\right)^{\lambda-1} + \frac{1}{p_3}\left(1 - \frac{x+y}{\sqrt{n}p_3}\right)^{\lambda-1}\right],$$

$$\frac{\partial^2(T_\lambda)}{\partial x \partial y} = \frac{2}{p_3}\left(1 - \frac{x+y}{\sqrt{n}p_3}\right)^{\lambda-1} = \frac{\partial^2(T_\lambda)}{\partial y \partial x}.$$

Все указанные производные непрерывны в Q, поэтому функция $T_\lambda(x, y)$ дважды дифференцируема в Q. В силу леммы 3 утверждение леммы будет доказано, если мы покажем, что $d^2(T_\lambda)$ — строго положительно определенная квадратичная форма. Для этого в силу критерия Сильвестра достаточно показать, что главные миноры матрицы $A = \begin{pmatrix} \partial^2 T_\lambda/\partial x^2 & \partial^2 T_\lambda/\partial x \partial y \\ \partial^2 T_\lambda/\partial y \partial x & \partial^2 T_\lambda/\partial y^2 \end{pmatrix}$ положительны.

Понятно, что для любых $(x, y) \in Q$ главный минор первого порядка $A_1 = \partial^2(T_\lambda)/\partial x^2$ положителен. Для главного минора второго порядка имеем

$$A_2 = 4\left[\frac{(ab)^{\lambda-1}}{p_1 p_2} + \frac{(ac)^{\lambda-1}}{p_1 p_3} + \frac{(bc)^{\lambda-1}}{p_2 p_3}\right] > 0,$$

где $a = 1 + x/\sqrt{np_1} > 0$, $b = 1 + y/\sqrt{np_2} > 0$, $c = 1 - (x+y)/\sqrt{np_3} > 0$. $\square$

Лемма 5. *Множество B^λ строго выпуклое.*

Доказательство. Фиксируем произвольные $\boldsymbol{x}_1 = (x_1, y_1) \in B^\lambda$, $\boldsymbol{x}_2 = (x_2, y_2) \in B^\lambda$, $t \in [0, 1]$. Тогда $T_\lambda(\boldsymbol{x}_1) < c$, $T_\lambda(\boldsymbol{x}_2) < c$. В силу леммы 4 функция $T_\lambda(x, y)$ строго выпуклая на Q. Поэтому

$$T_\lambda(\boldsymbol{x}_1 + t(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1)) < T_\lambda(\boldsymbol{x}_1) + t(T_\lambda(\boldsymbol{x}_2) - T_\lambda(\boldsymbol{x}_1)) \\ = (1-t)T_\lambda(\boldsymbol{x}_1) + tT_\lambda(\boldsymbol{x}_2) < (1-t)c + tc = c.$$

Следовательно, $\boldsymbol{x}_1 + t(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1) \in B^\lambda$, и поэтому B^λ — выпуклое множество. Повторяя эти рассуждения для произвольной пары точек на границе множества B^λ, получим, что оно строго выпуклое. □

4. Гладкость кривой $T_\lambda(x, y) = c$

Рассмотрим функцию $U(r, t) = T_\lambda(r\cos t, r\sin t) - c$ на множестве

$$S = (0, +\infty) \times [0, 2\pi] \cap \{(r, t) : r\cos t > -\sqrt{n}p_1, \\ r\sin t > -\sqrt{n}p_2, r\cos t + r\sin t < \sqrt{n}p_3\}. \quad (24)$$

Лемма 6. *Существуют такие s, N, что для любых $(r, t) \in \partial B^\lambda$ и $n \geq N$*

$$\frac{\partial U(r,t)}{\partial r} \geq s > 0.$$

Доказательство. Разложим производную U:

$$\frac{\partial U(r,t)}{\partial r} = 2r\left(\cos^2 t\left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_3}\right) + \sin^2 t\left(\frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3}\right) + \frac{2\cos t \sin t}{p_3}\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Очевидно, что на границе найдется такое r_1, что $r(t) \geq r_1$ для любого t. В силу вида функции $U(r(t), t)$ и ее бесконечной дифференцируемости на множестве $(r, t) \in [0, r_0] \times [0, 2\pi]$ величину $O(1/\sqrt{n})$ можно считать равномерной по t. Переходя к двойному аргументу в тригонометрических функциях и затем используя формулу для косинуса вспомогательного аргумента, приходим к нижней оценке производной

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{2}{p_3}\right) + \sqrt{\frac{(1/p_1 - 1/p_2)^2}{4} + \frac{1}{p_3^2}}\cos(2t + \phi_0) \\ > \frac{1}{2p_1} + \frac{1}{2p_2} + \frac{1}{p_3} - \sqrt{\left(\frac{1}{2p_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{2p_2}\right)^2 + \left(\frac{1}{p_3}\right)^2} > 0. \quad \square$$

Лемма 7. *Пусть (r_0, t_0) — точка множества S, в которой функция $U(r, t)$ обращается в нуль. Тогда для любого достаточно малого положительного числа ε найдется такая окрестность точки t_0, что в пределах этой окрестности существует единственная функция $r = r(t)$, которая удовлетворяет условию $|r - r_0| < \varepsilon$ и является решением уравнения*

$$U(r, t) = 0,$$

причем функция $r = r(t)$ непрерывна и пять раз дифференцируема в указанной окрестности точки t_0.

Доказательство. Пусть (r_0, t_0) — точка множества S, в которой функция $U(r, t)$ обращается в нуль. Поскольку S является открытым множеством, существует окрестность точки (r_0, t_0), целиком лежащая в S. Функция $U(r,t)$ бесконечно дифференцируема в указанной окрестности. Следовательно, частная производная $\partial U/\partial r$ непрерывна в (r_0, t_0). В силу леммы 6 частная производная $\partial U/\partial r$ не обращается в нуль в точке (r_0, t_0). Стало быть, для функции $U(r,t)$ и точки (r_0, t_0) выполнены все условия теоремы о неявной функции (см., например, [13]). $\square$

Лемма 8. *Для кривой*

$$T_\lambda(x, y) = c \tag{25}$$

существует четырежды непрерывно дифференцируемая параметризация вида $x = x(t) = r(t)\cos t$, $y = y(t) = r(t)\sin t$, $t \in [0, 2\pi]$.

Доказательство. В силу леммы 5 множество $B^\lambda = \{(x,y) : T_\lambda(x,y) < c\}$ выпуклое. Кроме того, начало координат лежит внутри этой кривой, так как $T_\lambda(0,0) = 0 < c$. Следовательно, для любого $t_0 \in [0, 2\pi]$ луч, выходящий из начала координат под углом t_0 к оси Ox, пересекает кривую (25) в единственной точке (x_0, y_0). Перейдем к полярной системе координат: $x = r\cos t$, $y = r\sin t$. Тогда точка (x_0, y_0) перейдет в точку (r_0, t_0), где $r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$. Точка (x_0, y_0) лежит на кривой (25) по построению, тем самым

$$U(r_0, t_0) = T_\lambda(r_0 \cos t_0, r_0 \sin t_0) - c = T_\lambda(x_0, y_0) - c = 0.$$

Поэтому в силу леммы 7 найдется такая окрестность точки t_0, что в пределах этой окрестности существует единственная функция $r = r(t)$, которая является решением уравнения $U(r,t) = 0$, причем эта функция $r = r(t)$ непрерывна и пять раз дифференцируема в указанной окрестности. Пусть $x(t) = r(t)\cos t$, $y(t) = r(t)\sin t$. Тогда в указанной окрестности точки t_0

$$T_\lambda(x(t), y(t)) = T_\lambda(r(t)\cos t, r(t)\sin t) = U(r(t), t) + c = c,$$

причем функции $x(t)$, $y(t)$ непрерывны и пять раз дифференцируемы в этой окрестности. Следовательно, они четырежды непрерывно дифференцируемы в этой окрестности и являются искомой параметризацией кривой (25) в указанной окрестности t_0.

В силу произвольности выбора t_0 требуемая параметризация существует на всем сегменте $[0, 2\pi]$. $\square$

Следствие 2. *Радиус кривизны кривой* (25) *не обращается в нуль всюду на этой кривой.*

Доказательство. Пусть $x(t), y(t)$ — параметризация кривой (25) из леммы 8. Покажем, что

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 \neq 0 \quad \text{для всех } t \in [0, 2\pi]. \tag{26}$$

Предположим, что существует точка $t_0 \in [0, 2\pi]$ такая, что $(x'(t_0))^2 + (y'(t_0))^2 = 0$. Тогда в этой точке $r'^2(t_0) + r^2(t_0) = 0$. Следовательно,

$$r(t_0) = 0 \to \left\{ \begin{array}{l} x(t_0) = 0, \\ y(t_0) = 0 \end{array} \right. \to T_\lambda(x(t_0), y(t_0)) = 0.$$

Это противоречит тому, что $x(t), y(t)$ — параметризация кривой (25).

Из формулы для радиуса кривизны:

$$\rho = \frac{((x')^2 + (y')^2)^{3/2}}{x'y'' - y'x''}, \tag{27}$$

и (26) получаем утверждение следствия. □

Определение 2. Кривая $\{x(t), y(t)\}$, $t \in [a, b]$, называется *гладкой*, если функции $x(t), y(t)$ гладкие на $[a, b]$.

Определение 3. Гладкая кривая $\{x(t), y(t)\}$, $t \in [a, b]$, называется *регулярной*, если вектор $(x'(t), y'(t))^T$ не обращается в нуль всюду на $[a, b]$.

Определение 4. Параметр l кривой $\{x(l), y(l)\}$ называется *натуральным*, если длина участка кривой, отвечающего изменению параметра l от a_1 до $b_1 > a_1$, равна $b_1 - a_1$.

Лемма 9. 1. *Если параметр $l \in [a, b]$ кривой $\{x(l), y(l)\}$ натурален, то $\sqrt{(x'(l))^2 + (y'(l))^2} = 1$ в точках, где существуют непрерывные производные $x'(l), y'(l)$.*

2 *На каждой регулярной кривой существует натуральный параметр.*

Доказательство см. в [14, гл. 1, § 1, лемма 2]. □

Следствие 3. *Радиус кривизны кривой* (25) *непрерывен всюду на этой кривой.*

Доказательство. Пусть $x(t), y(t)$ — параметризация кривой (25) из леммы 8. Покажем, что

$$x'y'' - y'x'' \neq 0 \quad \text{для всех } t \in [0, 2\pi]. \tag{28}$$

Сначала покажем, что $(x'')^2 + (y'')^2 \neq 0$ всюду на $[0, 2\pi]$. Предположим противное, т. е. пусть для некоторого $t_0 \in [0, 2\pi]$ выполнено

$$(x''(t_0))^2 + (y''(t_0))^2 = 0.$$

Подставляя сюда выражения для $x(t)$ и $y(t)$ из леммы 8, имеем

$$4(r'(t_0))^2 + (r''(t_0) - r(t_0))^2 = 0,$$

следовательно,

$$r'(t_0) = 0, \quad r''(t_0) = r(t_0). \tag{29}$$

Далее, дифференцируя тождество $U(r(t), t) = 0$ два раза в точке t_0 и учитывая (29), получим, что

$$\frac{2r^2(t_0)\sin^2 t_0}{p_1\bigl(1 + \frac{r(t_0)\cos t_0}{\sqrt{n}p_1}\bigr)^{1-\lambda}} + \frac{2r^2(t_0)\cos^2 t_0}{p_2\bigl(1 + \frac{r(t_0)\sin t_0}{\sqrt{n}p_2}\bigr)^{1-\lambda}} + \frac{2(-r(t_0)\sin t_0 + r(t_0)\cos t_0)^2}{p_3\bigl(1 - \frac{r(t_0)\cos t_0 + r(t_0)\sin t_0}{\sqrt{n}p_3}\bigr)^{1-\lambda}} = 0. \tag{30}$$

Здесь знаменатели в каждой дроби положительны в силу области определения функции $U(r, t)$ (см. (24)). Поэтому каждое слагаемое в (30) неотрицательно и необходимо обращается в нуль, следовательно, $\cos t_0 = \sin t_0 = 0$, но это противоречит основному тригонометрическому тождеству. Тем самым $(x'')^2 + (y'')^2 \neq 0$ всюду на кривой.

Из леммы 8 и (26) заключаем, что кривая (25) регулярна и в силу леммы 9 допускает натуральную параметризацию $x = \chi(l)$, $y = \gamma(l)$. Можно показать, что и в этом случае векторы $(\chi', \gamma')^T$, $(\chi'', \gamma'')^T$ ненулевые всюду на $l \in [0, L]$, где L — длина кривой (25). Это легко показать от противного, пользуясь тем, что отображение $l : [0, 2\pi] \to [0, L]$, задаваемое по формуле

$$l(t) = \int\limits_0^t \sqrt{x'^2(\tau) + y'^2(\tau)}\, d\tau, \tag{31}$$

гладкое и обратимое. Но тогда в силу леммы 9 $\chi'^2(l) + \gamma'^2(l) = 1$. Дифференцируя это тождество по l, получим $\chi'(l)\chi''(l) + \gamma'(l)\gamma''(l) = 0$, следовательно, векторы $(\chi', \gamma')^T$ и (χ'', γ'') ортогональны друг другу. Поэтому

$$\begin{vmatrix} \chi'(l) & \chi''(l) \\ \gamma'(l) & \gamma''(l) \end{vmatrix} \neq 0 \to \chi'(l)\gamma''(l) - \gamma'(l)\chi''(l) \neq 0. \tag{32}$$

Значит, в силу взаимной однозначности отображения (31) выполнено (28). Отсюда и из формулы для радиуса кривизны (27) получаем утверждение следствия. $\square$

Следствие 4. *Радиус кривизны кривой* (25) *дважды непрерывно дифференцируем относительно угла смежности всюду на этой кривой.*

Доказательство. Пусть $\chi = \chi(l)$, $\gamma = \gamma(l)$ — натуральная параметризация кривой (25). Тогда в силу леммы 8, а также гладкости и обратимости отображения (31) $\chi(l)$ и $\gamma(l)$ являются четырежды непрерывно дифференцируемыми функциями. Пусть ρ — радиус кривизны кривой (25), ψ — ее угол смежности. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{d\psi} &= \frac{d\rho}{dl}\frac{dl}{d\psi} = \rho\frac{d\rho}{dl} = \frac{1}{2}\frac{d\rho^2}{dl} = \frac{1}{2}\frac{d\Big(\frac{(\chi'^2+\gamma'^2)^3}{(\chi'\gamma''-\gamma'\chi'')^2}\Big)}{dl} \\ &= \frac{1}{2}\frac{3(\chi'^2+\gamma'^2)^2(2\chi'\gamma''+2\gamma'\chi'')}{(\chi'\gamma''-\gamma'\chi'')^2} - \frac{(\chi'^2+\gamma'^2)^3(\chi'\gamma'''-\gamma'\chi''')}{(\chi'\gamma''-\gamma'\chi'')^3}. \end{aligned} \tag{33}$$

Поэтому в силу гладкости функций $\chi(l), \gamma(l)$ и свойства (32) радиус кривизны ρ непрерывно дифференцируем всюду на кривой (25).

Аналогично

$$\frac{d^2\rho}{d\psi^2} = \frac{d}{d\psi}\left(\frac{d\rho}{d\psi}\right) = \frac{1}{2}\rho\frac{d(\frac{d\rho^2}{dl})}{dl}. \tag{34}$$

Не выписывая точной формулы для второй производной по тангенциальному углу, легко видеть, что она непрерывна в силу требований на $\chi(l), \gamma(l)$ и того факта, что в знаменателе результирующего выражения вновь получим $\chi'\gamma'' - \gamma'\chi''$ в некоторой степени. $\square$

5. Применение теоремы Хаксли к последовательности множеств $B^\lambda(n)$

Теорема 2 [5]. *Пусть B — выпуклая евклидова плоская область площадью A, ограниченная простой замкнутой кривой C, состоящей из конечного числа частей C_i, каждая из которых три раза непрерывно дифференцируема в следующем смысле: радиус кривизны ρ непрерывен, не равен нулю на каждой части C_i и непрерывно дифференцируем относительно угла смежности ψ. Пусть число M достаточно велико, и пусть MB обозначает множество, образованное* *увеличением множества B линейно в M раз. Тогда для любого изометрического вложения множества MB в евклидову плоскость число целых точек (m, n) в MB есть*

$$AM^2 + O(IM^{46/73}(\log M)^{315/146}), \tag{35}$$

где I — число, зависящее от кривой C, но не от M и не от вложения множества MB.

Если помимо вышеуказанного части C_i четырежды непрерывно дифференцируемы в том смысле, что ρ дважды непрерывно дифференцируем по отношению к тангенциальному углу ψ, то тогда мы можем взять

$$I = \sum_i \min_{C_i} \left(1 + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{d\rho}{d\psi}\right)^2\right)^{-69/146} \rho^{46/73} + \sum_i \int_{C_i} \left(1 + \frac{|\rho d^2\rho/d\psi^2|}{\rho^2 + (d\rho/d\psi)^2}\right) \times \left(1 + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{d\rho}{d\psi}^2\right)^2\right)^{-69/146} \left|\frac{d\rho}{d\psi}\right| \rho^{-33/73}\, d\psi \tag{36}$$

при условии, что M достаточно велико для выполнения неравенств

$$M \geq \frac{1}{\rho}, \quad \frac{1}{\rho^{64}}\left|\frac{d\rho}{d\psi}\right|^{53} \leq M^{11}(\log M)^{387/8}$$

по отдельности на каждом участке C_i.

Доказательство см. в [5, теоремы 5 и 6]. □

Теперь докажем лемму, которая показывает, что в нашем случае благодаря теореме 2 величина I ограничена некоторой константой, не зависящей от n. Необходимо отметить, что в 2003 г. Хаксли в [6] несколько улучшил оценку в теореме 2, однако не получил явного представления для I, аналогичного (36). В связи с этим результат из [6] не может быть применен в нашем случае, так как граница ∂B^λ множества B^λ зависит от n, а тогда от n зависит и I. Поскольку при отсутствии явного выражения для I не представляется возможным оценить вклад I в порядок погрешности приближения, результат из [6] не используется в настоящей работе.

Лемма 10. *Для всех достаточно больших n радиус кривизны ρ границы ∂B^λ равномерно по n ограничен сверху и равномерно отделен от нуля, а его первая и вторая производные по тангенциальному углу ψ равномерно ограничены сверху.*

Доказательство. Напомним, что радиус кривизны и его производные задаются формулами (27), (33) и (34). Используем параметризацию в полярных координатах из леммы 8. В этом случае

$$\rho = \frac{(r^2(t) + r'^2(t))^{\frac{3}{2}}}{|2(r'(t))^2 + r^2(t) - r'(t)r''(t)|}, \tag{37}$$

а производные по тангенциальному углу выражаются аналогично с появлением дополнительных сомножителей вида

$$2(r'(t))^2 + r^2(t) - r'(t)r''(t) \tag{38}$$

в знаменателе.

Обозначим через $r_n(t)$ полярный радиус ∂B^λ и через $r(t)$ — полярный радиус ∂B^1. Заметим, что точное выражение величины (38) для предельного множества B^1 отделено от 0. Действительно, B^1 есть повернутый вокруг начала координат эллипс с осями $a(\bar p, c)$, $b(\bar p, c)$. Для простейшего эллипса вида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, подставив нашу параметризацию, получим

$$r(t)=\left(\frac{\cos^2 t}{a^2}+\frac{\sin^2 t}{b^2}\right)^{-1/2}=\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)+\frac{\cos 2t}{2}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\right)^{-1/2}, \quad (39)$$

$$r'(t)=\frac{\sin 2t}{2}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)+\frac{\cos 2t}{2}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\right)^{-3/2}, \quad (40)$$

$$r''(t)=\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)^2\left(\frac{3}{4}-\frac{\cos^2 2t}{4}+\frac{b^2+a^2}{b^2-a^2}\frac{\cos 2t}{2}\right) \times\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)+\frac{\cos 2t}{2}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\right)^{-5/2}. \quad (41)$$

Заметим, что $r(t)$ изменяется в ограниченных пределах:

$$\sqrt{2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}-\left|\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right|\right)^{-1/2}\ge r(t)\ge\sqrt{2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\left|\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right|\right)^{-1/2}. \quad (42)$$

Теперь для (38) получим

$$\underbrace{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)+\frac{\cos 2t}{2}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\right)}_{A}^{-3}\Bigg[\frac{\sin^2 2t\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)^2}{2} + \left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)+\frac{\cos 2t}{2}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)^2\left(\frac{3}{2}-\frac{\cos^2 2t}{2} + \frac{b^2+a^2}{b^2-a^2}\cos 2t\right)\Bigg]=A^{-3}\left(\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^2-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)^2\right)=\frac{1}{a^2b^2A^3}>0.$$

Поскольку в полярных координатах поворот сводится к преобразованию $t := t+c$, а оценка снизу может быть сделана не зависящей от t, мы доказали отделенность от нуля величины (38) для границы B^1. Логично предположить, что точно таким же свойством обладает допредельное множество начиная с некоторого номера N, единого для всех t.

Ниже в лемме 11 доказана равномерная сходимость $r_n(t) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} r(t)$. Мы знаем, что производные решений $r_n(t)$, $r(t)$ выражаются через производные неявной функции по своим аргументам t и $r(t)$. При этом в знаменателе будет появляться первая производная по r от функционалов $T_\lambda(r,t)$, $T_1(r,t)$ в некоторой степени. Например,

$$r_n'(t)=-\frac{\partial T_\lambda(r_n(t),t)}{\partial t}\Bigg/\frac{\partial T_\lambda(r_n(t),t)}{\partial r},\quad r'(t)=-\frac{\partial T_1(r(t),t)}{\partial t}\Bigg/\frac{\partial T_1(r(t),t)}{\partial r}.$$

Из леммы 6 следует, что

$$\exists N\,\forall n\ge N\ \frac{\partial T_1(r(t),t)}{\partial r}\ge s>0,\quad \frac{\partial T_\lambda(r_n(t),t)}{\partial r}\ge s>0.$$

В лемме 6 фактически доказана равномерная оценка

$$\frac{\partial T_\lambda(r(t),t)}{\partial r}=\frac{\partial T_1(r(t),t)}{\partial r}+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Проводя аналогичные рассуждения, можно получить то же для производных по t:
$$\frac{\partial T_\lambda(r(t),t)}{\partial t} = \frac{\partial T_1(r(t),t)}{\partial t} + O\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big).$$
Поэтому нетрудно видеть, что
$$\begin{aligned} \frac{\partial T_\lambda(r(t),t)}{\partial t}\Big/\frac{\partial T_\lambda(r(t),t)}{\partial r} &= \frac{\partial T_1(r(t),t)}{\partial t}\Big/\frac{\partial T_1(r(t),t)}{\partial r} + O\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big), \\ \frac{\partial T_\lambda(r_n(t),t)}{\partial t}\Big/\frac{\partial T_\lambda(r_n(t),t)}{\partial r} &= \frac{\partial T_1(r_n(t),t)}{\partial t}\Big/\frac{\partial T_1(r_n(t),t)}{\partial r} + O\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big). \end{aligned} \tag{43}$$

Распишем разность $r_n'(t) - r'(t)$:
$$\begin{aligned} &\frac{\partial T_\lambda(r_n(t),t)}{\partial t}\Big/\frac{\partial T_\lambda(r_n(t),t)}{\partial r} - \frac{\partial T_1(r(t),t)}{\partial t}\Big/\frac{\partial T_1(r(t),t)}{\partial r} \\ &\quad = \Big(\frac{\partial T_\lambda(r_n(t),t)}{\partial t}\Big/\frac{\partial T_\lambda(r_n(t),t)}{\partial r} - \frac{\partial T_\lambda(r(t),t)}{\partial t}\Big/\frac{\partial T_\lambda(r(t),t)}{\partial r}\Big) \\ &\qquad + \Big(\frac{\partial T_\lambda(r(t),t)}{\partial t}\Big/\frac{\partial T_\lambda(r(t),t)}{\partial r} - \frac{\partial T_1(r(t),t)}{\partial t}\Big/\frac{\partial T_1(r(t),t)}{\partial r}\Big). \end{aligned}$$
Поскольку дробь $\frac{\partial T_1(r,t)}{\partial t}\big/\frac{\partial T_1(r,t)}{\partial r}$ является независимой от n гладкой функцией с ненулевым знаменателем и поскольку переменные (r,t) изменяются в ограниченной области, можно применить (43), чтобы посредством теоремы Лагранжа получить равенство $|r_n'(t)-r'(t)| = M|r_n(t)-r(t)|+O(1/\sqrt{n})$, что приводит нас к равномерной сходимости первых производных полярного радиуса. Аналогично можно показать равномерную сходимость и для старших производных.

Из формул (39)–(42) вытекает ограниченность сверху для производных полярного радиуса ∂B^1 и ограниченность с обеих сторон самого полярного радиуса. При этом величина (38) отделена от нуля. В силу доказанного эти же утверждения справедливы и для полярного радиуса (вместе с производными) границы ∂B^λ по крайней мере начиная с некоторого номера N, единого для всех t. Теперь утверждение леммы следует из предыдущих рассуждений и формул (37), (34) и (33). □

Следствие 5. *Для достаточно большого n множество B^λ удовлетворяет условиям теоремы 2 с фактором $M = \sqrt{n}$.*

Доказательство непосредственно следует из леммы 5 и следствий 3 и 4. □

6. Доказательство основного результата

Напомним, что N^λ — число точек решетки L, попадающих в множество B^λ. Поскольку решетка L имеет шаг, равный $1/\sqrt{n}$, можно рассматривать N^λ как число целых точек в множестве $\sqrt{n}B^\lambda$, которое является линейным увеличением множества B^λ в $\sqrt{n}$ раз. В силу следствия 5 можно применить теорему Хаксли к множеству B^λ с линейным фактором $\sqrt{n}$.

При этом необходимо отметить, что константа I, вообще говоря, зависит от n. Однако она ограничена, что нетрудно заключить из оценки сверху
$$I(n) \le \min_C \rho^{\frac{46}{73}} + \int\limits_C \frac{1+\left|\frac{d^2\rho}{d\psi^2}/\rho\right|}{\rho^{\frac{33}{73}}}\left|\frac{d\rho}{d\psi}\right| d\psi$$

и леммы 10. Следовательно, можно не учитывать ее при подсчете порядка погрешности. Тогда из теоремы 2 следует, что

$$N^\lambda - nV^\lambda = O(n^{23/73}(\log n)^{315/146}). \tag{44}$$

Остается подставить (44) в (15), и мы приходим к оценке (6).

Замечание 8. Нами доказана равномерная сходимость полярного радиуса $r_n(t)$ и его производных к своим пределам, а также равномерная по n отделенность от 0 полярного радиуса. Отсюда следует, что выражения под знаками интеграла и min в (36) равномерно сходятся. Известно (из теоремы Лебега), что из равномерной сходимости под знаками этих операторов вытекает возможность почленного перехода к пределу. Значит, $I(n)$ не только ограничена, но и сходится к своему пределу I_{B^1}.

Теорема 1 доказана.

7. Доказательство равномерной сходимости полярных радиусов

Лемма 11. *Пусть $r_n(t)$ — полярный радиус множества B^λ, а $r(t)$ — полярный радиус множества B^1. Тогда справедливо неравенство*

$$|r_n(t) - r(t)| \le \frac{C}{\sqrt{n}}.$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} T_1(r_n(t),t) - T_1(r(t),t) &\le |T_1(r_n(t),t) - T_\lambda(r_n(t),t)| \\ &\quad + |T_\lambda(r_n(t),t) - T_\lambda(r(t),t)| + |T_\lambda(r(t),t) - T_1(r(t),t)|. \end{aligned}$$

Поскольку из формулы Тейлора следует, что $T_\lambda(r,t) = T_1(r,t) + O\big(\frac{1}{\sqrt{n}}\big)$, и ошибка равномерна по n из-за ограниченности множества изменения координат, получаем

$$|T_1(r_n(t),t) - T_\lambda(r_n(t),t)| = O\bigg(\frac{1}{\sqrt{n}}\bigg), \quad |T_\lambda(r(t),t) - T_1(r(t),t)| = O\bigg(\frac{1}{\sqrt{n}}\bigg).$$

Более того, $T_\lambda(r_n(t),t) = c = T_1(r(t),t)$, и второе слагаемое может быть представлено в виде

$$|T_\lambda(r(t),t) - T_1(r(t),t)| = O\bigg(\frac{1}{\sqrt{n}}\bigg).$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} T_1(r_n(t),t) - T_1(r(t),t) &= \frac{(r_n(t)\cos t)^2}{p_1} + \frac{(r_n(t)\sin t)^2}{p_2} + \frac{(r_n(t)(\cos t + \sin t))^2}{p_3} \\ &\quad - \bigg[\frac{(r(t)\cos t)^2}{p_1} + \frac{(r(t)\sin t)^2}{p_2} + \frac{(r(t)(\cos t + \sin t))^2}{p_3}\bigg] \\ &= \bigg[\cos^2 t\bigg(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_3}\bigg) + \sin^2 t\bigg(\frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3}\bigg) + \frac{\sin 2t}{p_3}\bigg]\big(r_n^2(t) - r^2(t)\big). \end{aligned}$$

Из леммы 6 известно, что первый множитель равномерно ограничен снизу (обозначим его через E, а соответствующую нижнюю границу — через E_0). Имеем

$$|r_n(t) - r(t)| = O\bigg(\frac{1}{E(r_n(t) + r(t))\sqrt{n})}\bigg) = O\bigg(\frac{1}{E_0 r(t)\sqrt{n}}\bigg) = O\bigg(\frac{1}{\sqrt{n}}\bigg).$$

Возможность последнего перехода следует из тривиальной неотрицательности $r_n(t)$ и существования равномерной нижней границы для $r(t)$. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Cressie N. A. C., Read T. R. C.* Multinomial goodness-of-fit tests // J. Roy. Stat. Soc. Ser. B. 1984. V. 46, N 3. P. 440–464.
2. *Read T. R. C.* Closer asymptotic approximations for the distributions of the power divergence goodness-of-fit statistics // Ann. Inst. Stat. Math. 1984. V. 36. P. 59–69.
3. *Yarnold J. K.* Asymptotic approximations for the probability that a sum of lattice random vectors lies in a convex set // Ann. Math. Stat. 1972. V. 43, N 5. P. 1566–1580.
4. *Siotani M., Fujikoshi Y.* Asymptotic approximations for the distributions of multinomial goodness-of-fit statistics // Hiroshima Math. J. 1984. V. 14. P. 115–124. (Technical report of the Hiroshima statistical research group (1980)).
5. *Huxley M. N.* Exponential sums and lattice points. II // Proc. London Math. Soc. 1993. V. 66, N 3. P. 279–301.
6. *Huxley M. N.* Exponential sums and lattice points. III // Proc. London Math. Soc. 2003. V. 87, N 3. P. 591–609.
7. *Hardy G.* On Dirichlet's divisor problem // Proc. London Math. Soc. 1916. V. 15. P. 1–25.
8. *Götze F.* Lattice point problems and values of quadratic forms // Invent. Math. 2004. V. 157. P. 195–226.
9. *Götze F., Ulyanov V. V.* Asymptotic distribution of χ^2-type statistics // Preprints der Forschergruppe spektrale Analysis und stochastische Dynamik. 2003. Universität Bielefeld. 15 p. (Preprintreihe 03–033).
10. *Ulyanov V. V., Zubov V. N.* Refinement on the convergence of one family of goodness-of-fit statistics to chi-squared distribution // Hiroshima Math. J. 2009. V. 39. P. 133–161.
11. *Ильин В. А., Ким Г. Д.* Линейная алгебра и аналитическая геометрия. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1998.
12. *Ильин В. А., Поздняк Э. Г.* Основы математического анализа М.: Наука. Физматлит, 2000. Ч. I.
13. *Вайнберг М. М., Треногин В. А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969.
14. *Тайманов И. А.* Лекции по дифференциальной геометрии. М.; Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика; Институт компьютерных исследований, 2006.

Статья поступила 17 января 2011 г.

Ульянов Владимир Васильевич, Асылбеков Женисбек Асылбекович
Московский гос. университет им. М. В. Ломоносова,
факультет вычислительной математики и кибернетики,
Ленинские горы, Москва 119991
vulyan@gmail.com

Зубов Василий Николаевич
Акционерный коммерческий банк «Национальный клиринговый центр»,
Большой Кисловский пер., 13, Москва 125009