Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2011. Том 52, № 3

УДК 517.55

О ГОЛОМОРФНОМ ПРОДОЛЖЕНИИ В ОКРЕСТНОСТЬ ОСТРИЯ КЛИНА НЕОБЩЕГО ПОЛОЖЕНИЯ

Е. В. Юрьева

Аннотация. Некоторые известные теоремы о возможности голоморфного продолжения функций в окрестность острия клина распространяются на случай двустороннего n-кругового клина необщего положения (т. е. такого, в который нельзя вписать клин общего положения).

Ключевые слова: аналитическое продолжение, теорема Боголюбова, интегральная формула Вейля, амеба гиперповерхности.

Введение

Богатство проблематики голоморфного продолжения в многомерном комплексном анализе обнаружилось в 1906 г. благодаря феномену Гартогса «принудительного» голоморфного продолжения: оказывается, функция, голоморфная в окрестности замкнутой гиперповерхности, автоматически голоморфно продолжается в область, ограниченную этой гиперповерхностью [1, 2]. В частности, голоморфная функция $n \geq 2$ переменных не может иметь изолированных особых точек: особенности таких функций обязаны выходить на границу области или простираться в бесконечность. Другой пример неожиданного «принудительного» продолжения для голоморфных функций многих переменных дает теорема Боголюбова об острие клина (edge of the wedge theorem) [3] (см. также [4]).

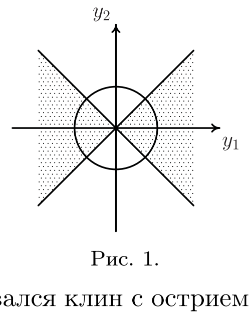

Рис. 1.

Она утверждает, в частности, что если функция $f(z)$ голоморфна в трубчатой области $\mathscr{T} = \mathbb{R}^n + i\Gamma$, основанием Γ которой служит световой конус $y_1^2 > y_2^2 + \dots + y_n^2$, и непрерывна в его замыкании $\overline{\mathscr{T}}$, то она голоморфно продолжается в $\mathbb{C}^n$. Если требовать голоморфность $f(z)$ лишь в конечной части $\mathscr{T} \cap \{|z| < r\}$, то она будет продолжаться в полную шаровую окрестность $|z| < r/8$. Результат Боголюбова был обобщен в статье С. И. Пинчука [5], где вместо клина над световым конусом рассматривался клин с острием на порождающем многообразии, ограниченный гладкими гиперповерхностями в общем положении. В работах [3, 5] рассматривались двусторонние клины (рис. 1). Затем последовал ряд работ Е. М. Чирки, Г. М. Хенкина, Р. А. Айрапетяна, связанных с проблематикой продолжения CR-функций

Работа выполнена при финансовой поддержке программы Рособразования «Развитие научного потенциала высшей школы» (код проекта 2.1.1/4620).

с острия M в односторонние клины. Наиболее общая ситуация такого типа описана А. Е. Тумановым [6]: в качестве острия клина выступало гладкое порождающее многообразие M коразмерности m, являющееся общим краем r многообразий M_j, при этом все непрерывные CR-функции на $\bigcup\limits_{j=1}^{r} M_j$ допускают CR-продолжение в клин с острием M и гранями M_j. Отметим, что во всех указанных результатах рассматривались только клины общего положения.

Цель настоящей статьи состоит в исследовании вопросов продолжения в окрестность острия двустороннего клина необщего положения; при этом рассматриваются лишь n-круговые клины. В основе доказательств лежат интегральная формула Вейля и существование аналитических поверхностей, «проникающих» из одной части двустороннего клина в другую его часть через острие. В заключительном параграфе показывается, что клины с наличием указанных аналитических поверхностей можно строить с помощью некоторых комплексных алгебраических гиперповерхностей. Оказывается, что один класс таких гиперповерхностей определяется полиномами, которые введены физиками Ли и Янгом [7] в исследовании модели Изинга, и этот класс может значительно пополнится благодаря статьям [8, 9] по современной теории амеб.

§ 1. Голоморфное продолжение функций в окрестность острия n-кругового клина

Напомним вначале теорему Пинчука.

Теорема [5]. *Если порождающее многообразие*

$$M = \{z \in D : \varphi_1(z) = \dots = \varphi_n(z) = 0\}$$

задается функциями φ_j класса C^2 и функции f^+ и f^-, голоморфные соответственно в областях

$$D^+ = \{z \in D : \varphi_1(z) > 0, \dots, \varphi_n(z) > 0\},$$

$$D^- = \{z \in D : \varphi_1(z) < 0, \dots, \varphi_n(z) < 0\},$$

непрерывно продолжаются на M, а на M их значения совпадают: $f^+\big|_M = f^-\big|_M$, то f^+ и f^- продолжаются до функции f, голоморфной в окрестности M.

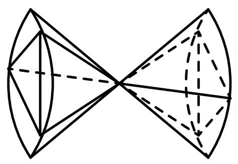

Рис. 2.

Заметим, что теорему Боголюбова можно получить из сформулированной теоремы Пинчука, вписав в световой конус Γ многогранный клин (рис. 2). Условие, что многообразие M порождающее, существенно и явно используется в доказательстве теоремы. Кроме того, следует отметить, что по самому определению порождающего многообразия через функции φ_j рассмотренный в теореме Пинчука клин ограничен гиперповерхностями в общем положении. Это также существенно в доказательстве Пинчука, поскольку он использует известную теорему Кнезера о вложенном ребре. Рассмотрим один вариант теоремы об острие клина в случае необщего положения, в котором в качестве острия рассматривается вещественный n-мерный тор.

Теорема. *Пусть D^+ и D^- — две n-круговые области, замыкания которых пересекаются по единичному тору $T^n = \{|z_1| = \dots = |z_n| = 1\}$, а объединение $D^+ \cup T^n \cup D^-$ содержит диагональ $\triangle = \{|z_1| = \dots = |z_n|\}$. Если функции f^+ и f^-*

голоморфны в областях D^+ и D^- соответственно и непрерывно продолжаются на T^n с совпадающими значениями: $f^+\big|_{T^n} = f^-\big|_{T^n}$, то f^+ и f^- продолжаются до функции f, голоморфной в окрестности T^n.

Доказательство. Воспользуемся идеей привлечения интеграла типа Вейля, который рассмотрен в статье А. К. Циха [10] в вопросе продолжения голоморфных функций на аналитические множества. Для $\varepsilon > 0$ рассмотрим следующий полиэдр Вейля:

$$W_\varepsilon = \left\{ z : \frac{1}{2} < |z_1| < 2, 1-\varepsilon < \left| \chi\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \right| < 1+\varepsilon, \dots, 1-\varepsilon < \left| \chi\left(\frac{z_1}{z_n}\right) \right| < 1+\varepsilon \right\},$$

где χ — функция одного переменного, голоморфная в окрестности единичной окружности, причем модуль χ равен единице на этой окружности. Например, в качестве χ достаточно взять дробно-линейную функцию

$$u = \chi(t) = \frac{t-a}{1-\bar{a}t},$$

осуществляющую автоморфизм единичного круга, где модуль $|a|$ достаточно мал. При малых ε остов $\partial_0 W_\varepsilon$ полиэдра W_ε состоит из 2^n связных компонент

$$|z_1| = 2^{\pm 1}, \ \left| \chi\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \right| = 1 \pm \varepsilon, \dots, \left| \chi\left(\frac{z_1}{z_n}\right) \right| = 1 \pm \varepsilon,$$

принадлежащих $D^+ \cup D^-$. В самом деле, для функций $\chi\bigl(\frac{z_1}{z_j}\bigr)$ прообразы окружностей $|u| = 1 \pm \varepsilon$ таковы, что модули $\bigl|\frac{z_1}{z_j}\bigr|$ близки к единице, поэтому остов $\partial_0 W_\varepsilon$ расположен близко к диагонали $\triangle = \{|z_1| = \dots = |z_n|\}$. В то же время ввиду соотношения $|z_1| = 2^{\pm 1}$ на $\partial_0 W_\varepsilon$ этот остов не пересекается с тором T^n, поэтому по условию теоремы $\partial_0 W_\varepsilon$ принадлежит $D^+ \cup D^-$.

Введем функцию f на $D^+ \cup T^n \cup D^-$ так, что $f = f^\pm|_{D^\pm}$, и для краткости письма обозначим дроби $\chi\bigl(\frac{z_1}{z_j}\bigr)$ через $\chi_j(z)$. Для полиэдра W_ε и функции f напишем интеграл типа Вейля

$$F(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\partial_0 W_\varepsilon} \frac{f(\zeta) H(\zeta, z)\, d\zeta_1 \wedge \dots \wedge d\zeta_n}{(\zeta_1 - z_1)(\chi_2(\zeta) - \chi_2(z)) \dots (\chi_n(\zeta) - \chi_n(z))}, \qquad (1)$$

где $z \in W_\varepsilon$ и $H(\zeta, z)$ — гефериан мероморфных функций $\chi_1 = \zeta_1, \chi_2, \dots, \chi_n$. Напомним (см. [1] или [10]), что гефериан для семейства $\chi_1, \dots, \chi_n$ — это определитель $\det(a_{ij}(\zeta, z))$, где голоморфные функции $a_{ij}(\zeta, z)$ определяются из разложений $\chi_i(\zeta) - \chi_i(z) = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}(\zeta, z)(\zeta_j - z_j)$, $i = 1, \dots, n$. Так как подынтегральное выражение непрерывно по совокупности переменных $(\zeta, z) \in \partial_0 W_\varepsilon \times W_\varepsilon$ и голоморфно зависит от параметра z, то $F(z)$ голоморфна в W_ε.

Представим интеграл (1) в виде повторного:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(|\zeta_1|=2)-(|\zeta_1|=\frac{1}{2})} \frac{\Phi(\zeta_1, z)\, d\zeta_1}{\zeta_1 - z_1}, \qquad (2)$$

где

$$\Phi(\zeta_1, z) = \frac{1}{(2\pi i)^{n-1}} \int\limits_{\partial_0 \widetilde{W}_\varepsilon(\zeta_1)} \frac{f(\zeta) H(\zeta, z)\, d\zeta_2 \wedge \dots \wedge d\zeta_n}{(\chi_2(\zeta) - \chi_2(z)) \dots (\chi_n(\zeta) - \chi_n(z))},$$

а $\widetilde{W}_\varepsilon(\zeta_1)$ — это полиэдр Вейля в пространстве $\mathbb{C}^{n-1}_{\zeta'}$ переменных $\zeta' = (\zeta_2, \dots, \zeta_n)$ (зависящий от параметра ζ_1из окружностей$|\zeta_1| = 2^{\pm 1}$), который задается неравенствами

$$1-\varepsilon < \left|\chi\left(\frac{\zeta_1}{\zeta_2}\right)\right| < 1+\varepsilon, \dots, 1-\varepsilon < \left|\chi\left(\frac{\zeta_1}{\zeta_n}\right)\right| < 1+\varepsilon.$$

Заметим, что $\widetilde{W}_\varepsilon(\zeta_1)$ представляет собой декартову степень G^{n-1} плоской области G, причем для любого $z \in W_\varepsilon$ на остове $\partial_0 \widetilde{W}_\varepsilon(\zeta_1) = (\partial G)^{n-1}$ выполняются неравенства $|\chi_j(\zeta)| > |\chi_j(z)|$. Поскольку χ биголоморфна вблизи единичной окружности, уравнения (относительно неизвестных ζ_j) $\chi_j(\zeta) = \chi_j(z)$ равносильны уравнениям $\frac{\zeta_1}{\zeta_j} = \frac{z_1}{z_j}$ и имеют единственные решения $\zeta_j = \frac{\zeta_1 z_j}{z_1}$. Поэтому по кратной формуле Коши [11, разд. 5.3]

$$\Phi(\zeta_1, z) = f\left(\zeta_1, \frac{\zeta_1}{z_1} z'\right) \frac{H(\zeta, z)}{\prod\limits_2^n \frac{\partial \chi_j}{\partial \zeta_j}(\zeta)}\Bigg|_{\zeta = (\zeta_1, \frac{\zeta_1}{z_1} z')}, \quad z' = (z_2, \dots, z_n).$$

Докажем, что множитель при f равен единице. Геффериан $H(\zeta, z)$ представляет собой определитель от нижнетреугольной матрицы и равен

$$H(\zeta,z) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21}(\zeta,z) & a_{22}(\zeta,z) & 0 & \dots & 0 \\ a_{31}(\zeta,z) & 0 & a_{33}(\zeta,z) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(\zeta,z) & 0 & 0 & \dots & a_{nn}(\zeta,z) \end{vmatrix} = \prod_2^n a_{jj}(\zeta_1, \zeta_j, z_1, z_j).$$

Для вычисления a_{jj} воспользуемся явным видом дробно-линейной функции χ, для которой

$$\chi(\tau) - \chi(t) = \frac{(\tau - t)(1 - |a|^2)}{(1 - \bar{a}\tau)(1 - \bar{a}t)}.$$

Имеем

$$\chi\left(\frac{\zeta_1}{\zeta_j}\right) - \chi\left(\frac{z_1}{z_j}\right) = \frac{1 - |a|^2}{(\zeta_j - \bar{a}\zeta_1)(z_j - \bar{a}z_1)}(z_j(\zeta_1 - z_1) - z_1(\zeta_j - z_j)).$$

Тем самым

$$a_{jj}(\zeta, z) = \frac{z_1(|a|^2 - 1)}{(\zeta_j - \bar{a}\zeta_1)(z_j - \bar{a}z_1)},$$

откуда

$$a_{jj}(\zeta, z)|_{\zeta_j = \frac{z_j}{z_1}\zeta_1} = \frac{z_1^2(|a|^2 - 1)}{\zeta_1(z_j - \bar{a}z_1)^2}.$$

В то же время

$$\frac{\partial}{\partial \zeta_j}\left(\chi\left(\frac{\zeta_1}{\zeta_j}\right)\right)\Bigg|_{\zeta_j = \frac{z_j}{z_1}\zeta_1} = \frac{\zeta_1(|a|^2 - 1)}{(\zeta_j - \bar{a}\zeta_1)^2}\Bigg|_{\zeta_j = \frac{z_j}{z_1}\zeta_1} = \frac{z_1^2(|a|^2 - 1)}{\zeta_1(z_j - \bar{a}z_1)^2}.$$

В итоге получаем

$$\Phi(\zeta_1, z) = f\left(\zeta_1, \frac{\zeta_1}{z_1} z'\right),$$

т. е. интеграл (2) равен

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(|\zeta_1|=2)-(|\zeta_1|=\frac{1}{2})} \frac{f(\zeta_1, \frac{\zeta_1}{z_1} z')\, d\zeta_1}{\zeta_1 - z_1}, \quad z = (z_1, z') \in W_\varepsilon. \tag{3}$$

Докажем, что $F(z) = f(z)$ в $W_\varepsilon \cap (D^+ \cup D^-)$. Вначале покажем, что $F(z) = f(z)$ на диагонали $\triangle$. В самом деле, для каждой точки $z \in \triangle$ рассмотрим комплексную прямую $l_z = \bigl\{\zeta = \bigl(\zeta_1, \frac{\zeta_1}{z_1} z'\bigr) : \zeta_1 \in \mathbb{C}\bigr\}$, проходящую через z и лежащую в $\triangle$. По условию теоремы сужение $f\bigl(\zeta_1, \frac{\zeta_1}{z_1} z'\bigr)$ функции f на l_z голоморфно в кольцах $\mathscr{A}^- = \bigl\{\frac{1}{2} < |\zeta_1| < 1\bigr\}$ и $\mathscr{A}^+ = \{1 < |\zeta_1| < 2\}$ и непрерывно на окружности $C = \{|\zeta_1| = 1\}$. Прибавив к интегралу (3) и вычтя из него интеграл по единичной окружности C, представим интеграл $F(z)$ для $z_1 \in \mathscr{A}^+ \cup \mathscr{A}^-$ в виде суммы $F^+(z) + F^-(z)$ двух интегралов Коши со свойствами

$$F^\pm(z) = f(z),\ z \in \mathscr{A}^\pm, \quad F^\pm(z) = 0,\ z \in \mathscr{A}^\mp.$$

Отсюда получаем, что $F = F^+ + F^-$ совпадает с f в $\mathscr{A}^+ \cup C \cup \mathscr{A}^-$, т. е. F совпадает с f на диагонали $\triangle$.

Так как $\triangle$ является множеством единственности в кусках $W_\varepsilon \cap D^\pm$, имеем совпадение $F(z) = f(z)$ всюду в $W_\varepsilon \cap (D^+ \cup D^-)$. Таким образом, получаем голоморфное продолжение функции f в окрестность остова единичного поликруга T^n.

Следующий пример показывает, что в теореме нельзя опустить условие о том, что диагональ $\triangle$ переходит из D^+ в D^- через тор T^n.

Пример. Рассмотрим функцию $f(z,w) = (z-w)\ln(z-w)$, голоморфную в клине $K = \{2|z| < |w|^2 + 1,\ |z| > |w|\}$.

Эта функция однозначна в K. Кроме того, она непрерывна на части границы K, где $2|z| = |w|^2 + 1$, $z \neq w$. В соответствии с правилом Лопиталя она непрерывно продолжается нулем на комплексную прямую $z = w$, следовательно, $f(z,w)$ непрерывна в замыкании $\overline{K}$. Предположим, что для $f(z,w)$ существует голоморфное продолжение $F(z,w)$ хотя бы в некоторую окрестность острия $|z| = |w| = 1$. Будучи равной нулю на комплексной прямой $z = w$, функция F должна делиться на $z - w$ (см. [1, с. 163]):

$$F(z,w) = (z-w)h(z,w),$$

где h голоморфна в некоторой окрестности острия клина K. Таким образом, в указанной окрестности мы будем иметь

$$h(z,w) = \frac{F(z,w)}{z-w} = \frac{f(z,w)}{z-w} = \ln(z-w),$$

т. е. h должна быть неограниченной при $(z,w) \to (1,1)$ в клине K. Получаем противоречие с голоморфностью h в окрестности острия $|z| = |w| = 1$.

§ 2. О клинах, образуемых алгебраическими гиперповерхностями

Существует класс полиномов (зависящий от $\frac{n(n-1)}{2}$ вещественных параметров), введенных физиками Ли и Янгом [7], нулевые множества которых определяют клины, для которых выполняются условия теоремы.

Такие полиномы задаются следующим образом. Пусть $x_{\alpha\beta} = x_{\beta\alpha}$ ($\alpha \neq \beta$, $\alpha, \beta = 1, 2, \dots, n$) — действительные числа, абсолютные значения которых не превосходят 1. Выберем в множестве индексов $I = \{1, \dots, n\}$ произвольное подмножество a, которое может быть пустым либо совпадать с I; тем самым всего имеется 2^n выборов $a \subset I$. Рассмотрим произведение всех $x_{\alpha\beta}$, где α пробегает a, а β пробегает дополнительное множество $I \setminus a$. Определим для каждого $a \subset I$ произведение:

$$P_a = \prod_{\substack{\alpha \in a, \\ \beta \in I \setminus a}} x_{\alpha\,\beta}.$$

Тогда искомый полином имеет вид

$$\mathscr{B}_n(z_1, \dots, z_n) = \sum_{a \subset I} P_a z^a = \sum_{a \subset I} \Big(\prod_{\substack{\alpha \in a, \\ \beta \in I \setminus a}} x_{\alpha\,\beta} \Big) z^a,$$

где $z^a = \prod\limits_{\alpha \in a} z_\alpha$. В частности, для $n = 1$ полином $\mathscr{B}_1$ равен $1 + z_1$. Далее,

$$\mathscr{B}_2 = 1 + x_{12}(z_1 + z_2) + z_1 z_2,$$

$$\mathscr{B}_3 = 1 + z_1 x_{12} x_{13} + z_2 x_{21} x_{23} + z_3 x_{31} x_{32} + z_1 z_2 x_{13} x_{23} + z_2 z_3 x_{21} x_{31} \\ + z_3 z_1 x_{32} x_{12} + z_1 z_2 z_3.$$

Лемма (Ли — Янг [7]). *Если $\mathscr{B}_n(z_1, \dots, z_n) = 0$ и $|z_k|$, $k = 1, \dots, n$, не меньше* 1, *то*

$$1 = |z_1| = |z_2| = \ldots = |z_n|.$$

Следствие 1. *Гиперповерхность $V = \{z \in \mathbb{C}^n : \mathscr{B}_n(z_1, \dots, z_n) = 0\}$ пересекает остов $T^n = \{|z_1| = \dots = |z_n| = 1\}$ и располагается вне клина $D^+ \cup T^n \cup D^-$, где*

$$D^+ = \{z : |z_j| > 1 \ \forall j = 1, \dots, n\}, \quad D^- = \{z : |z_j| < 1 \ \forall j = 1, \dots, n\}.$$

Доказательство. В силу симметричности матрицы $\|x_{\alpha\beta}\|$ имеем $P_a = P_{I \setminus a}$. Поэтому

$$\mathscr{B}_n \left(\frac{1}{z_1}, \dots, \frac{1}{z_n} \right) = \frac{\mathscr{B}_n(z_1, \dots, z_n)}{z_1 \dots z_n}.$$

Таким образом, гиперповерхность V ведет себя симметричным образом относительно областей D^- и D^+, т. е. по лемме Ли — Янга V может пересекать замыкания $\overline{D^-}$ и $\overline{D^+}$ лишь по остову T^n.

Фактически утверждение следствия 1 показывает, что дополнение к гиперповерхности V на схеме Рейнхарта определяет n-круговой клин. Этот клин удобнее рассматривать в логарифмической шкале.

Определение [8]. *Амебой* $\mathscr{A}_V$ алгебраической гиперповерхности $V \subset (\mathbb{C} \setminus 0)^n$ называется ее образ в $\mathbb{R}^n$ при отображении

$$\operatorname{Log} : (z_1, \dots, z_n) \to (\operatorname{Log}|z_1|, \dots, \operatorname{Log}|z_n|).$$

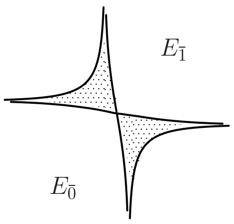

Рис. 3.

Амеба комплексной кривой $V = \{\mathscr{B}_2(z_1, z_2) = 0\}$ при $|x_{12}| < 1$ изображена на рис. 3.

Структуру амебы гиперповерхности $V = \{\mathscr{B}(z) = 0\}$ в некотором смысле отражает многогранник Ньютона $\mathscr{N}_{\mathscr{B}}$ полинома $\mathscr{B}(z)$ (напомним, что *многогранником Ньютона* полинома $\mathscr{B}(z) = \sum\limits_{\alpha\in A\subset\mathbb{Z}^n} c_\alpha z^\alpha$ называется выпуклая оболочка в $\mathbb{R}^n$ множества A). Известно (см. [8]), что дополнение $\mathbb{R}^n \setminus \mathscr{A}_V$ к амебе $\mathscr{A}_V$ состоит из конечного числа связных компонент E_ν, открытых и выпуклых. Каждая из компонент E_ν соответствует некоторой целочисленной точке ν из многогранника Ньютона $\mathscr{N}_{\mathscr{B}}$. Более того, конус рецессии компоненты E_ν (т. е. максимальный конус среди тех, сдвиги которых помещаются в E_ν) совпадает с двойственным конусом к многограннику $\mathscr{N}_{\mathscr{B}}$ в точке ν. Для полинома $\mathscr{B}_n(z_1, \dots, z_n)$ многогранник Ньютона представляет собой единичный куб $[0,1]^n$, поэтому дополнение $\mathbb{R}^n \setminus \mathscr{A}_V$ состоит только из 2^n компонент, соответствующих вершинам куба. По следствию 1 из леммы Ли — Янга диагональ $\operatorname{Log}|z_1| = \dots = \operatorname{Log}|z_n|$ лишь в точке $\bar 0$ пересекает амебу $\mathscr{A}_V$, значит, она в этой точке переходит из компоненты $E_{\bar 0} = E_{(0,\dots,0)}$ в компоненту $E_{\bar 1} = E_{(1,\dots,1)}$. Из теоремы получаем такое

Следствие 2. *Пусть функции $f_{\bar 0}$ и $f_{\bar 1}$ голоморфны в областях* $\operatorname{Log}^{-1}(E_{\bar 0})$ *и* $\operatorname{Log}^{-1}(E_{\bar 1})$. *Если $f_{\bar 0}$ и $f_{\bar 1}$ непрерывно продолжаются на единичный остов $T^n = \{|z_1| = \dots = |z_n| = 1\}$ с совпадающими на T^n значениями, то они голоморфно продолжаются до целой функции.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. Ч. 2. Функции нескольких переменных. М.: Наука, 1985.
2. *Владимиров В. С.* Методы теории функций многих комплексных переменных. М.: Наука, 1964.
3. *Боголюбов Н. Н, Медведев Б. В., Поливанов М. К.* Вопросы теории дисперсионных соотношений. М.: Физматгиз, 1958.
4. *Антипова И. А., Исаева Е. В.* К теореме Боголюбова о голоморфном продолжении функций с острия в клин // Вестн. КрасГУ. 2005. Т. 4. С. 154–157.
5. *Пинчук С. И.* Теорема Боголюбова об «острие клина» для порождающих многообразий // Мат. сб. 1974. Т. 94. С. 468–482.
6. *Туманов А. Е.* Продолжение CR-функций в клин // Мат. сб. 1990. Т. 181, № 7. С. 951–964.
7. *Lee T. D., Yang C. N.* Statistical theory of equations of state and phase transitions. II. Lattice gas and ising model // Phys. Review. 1952. V. 87, N 3. P. 410–419.
8. *Forsberg M., Passare M., Tsikh A.* Laurent determinants and arrangements of hyperplane amoebas // Adv. Math. 2000. V. 151. P. 45–70.
9. *Passare M., Rullgård H.* Amoebas, Monge–Ampère measures, and triangulations of the Newton polytope // Duke Math. J. 2004. V. 121, N 3. P. 481–507.
10. *Цих А. К.* Слабо голоморфные функции на полных пересечениях, их голоморфное продолжение // Мат. сб. 1987. Т. 133, № 4. С. 429–445.
11. *Цих А. К.* Многомерные вычеты и их приложения. М.: Наука, 1988.

Статья поступила 22 апреля 2010 г.

Юрьева Евгения Викторовна
Сибирский федеральный университет, Институт математики,
пр. Свободный, 79, Красноярск 660041
evg_yurieva@fromru.com