Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2011. Том 52, № 3

УДК 515.16, 517.55

ГОМОЛОГИИ И КОГОМОЛОГИИ ДОПОЛНЕНИЯ К НЕКОТОРЫМ НАБОРАМ КОМПЛЕКСНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ КОРАЗМЕРНОСТИ ДВА

Ю. В. Элияшев

Аннотация. Рассматриваются когомологии и гомологии дополнения к набору координатных плоскостей $Z = \bigcup\limits_{1<|i-j|<d-1} \{z_i = z_j = 0\}$ в $\mathbb{C}^d$, строятся в явном виде базис этих групп и базис групп гомологий одноточечной компактификации набора плоскостей Z.

Ключевые слова: топология набора плоскостей.

Введение

Теория многомерных вычетов, как и теория интегральных представлений голоморфных функций, основана на некоторых модельных дифференциальных формах и двойственных контурах (циклах) интегрирования [1, 2]. Исторически первыми были многомерное ядро и интегральное представление Коши, доказанное Пуанкаре в 1887 г., а также ядро и интегральное представление Бохнера — Мартинелли, доказанное в 1938, 1943 гг. Эти интегральные представления стали эталонными, из них впоследствии на основе гомологических и когомологических процедур был построен ряд других интегральных представлений.

Развитая в [3] теория моментных отображений на симплектических многообразиях адаптирована Коксом [4, 5] применительно к торическим многообразиям. Тем самым была подготовлена почва для развития теории вычетов с сингулярностями на наборах плоскостей. Так, А. К. Цих [6] в 1999 г. предложил стратегию построения теории вычетов для ядер с сингулярностями на наборах координатных плоскостей. Эта теория получила развитие в более поздних статьях [7, 8].

Для решения названных выше задач многомерного комплексного анализа важным является изучение топологии дополнений к наборам координатных плоскостей, в частности, изучение групп гомологий и когомологий дополнений к таким наборам. В книге Горески и Макферсона [9] (см. также [10]) разработан универсальный комбинаторный метод вычисления (ко)гомологий для дополнений к произвольным наборам плоскостей, однако этот метод трудно применим для реализации явных конструкций базисных элементов (ко)гомологий. Исследования в области торической топологии, в частности, работы В. М. Бухштабера и Т. Е. Панова [11, 12] позволили найти методы вычисления групп

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ–7347.2010.1), а также гранта МО и Науки РФ 2.1.1/4620 и СФУ.

(ко)гомологий дополнений к координатным наборам плоскостей, которые проще универсальных методов и позволяют получать некоторую дополнительную информацию, а также ввести умножение, т. е. структуру кольца когомологий. О связи этих двух методов вычисления (ко)гомологий см. [11, гл. 9].

Цель данной работы состоит в построении в явном виде циклов, образующих базис групп сингулярных гомологий, и дифференциальных форм, образующих базис групп когомологий де Рама для дополнения $\mathbb{C}^d \setminus Z$ к следующему набору координатных плоскостей:

$$Z = \bigcup_{1<|i-j|<d-1} \{z_i = z_j = 0\}.$$

Также в работе строятся в явном виде циклы, образующие базис групп гомологий для замыкания набора плоскостей $\overline{Z} = Z \cup \{\infty\}$ в сферической компактификации $\mathbb{C}^d$.

Следует отметить, что такой выбор набора плоскостей Z был мотивирован теорией торических многообразий. А именно, любое компактное торическое двумерное многообразие X, за исключением взвешенной двумерной проективной плоскости, может быть представлено в виде $X = (\mathbb{C}^d \setminus Z)/G$, где G — некоторая подгруппа d-мерного комплексного тора $\mathbb{T}^d$.

В начале § 1 приводятся известные вспомогательные факты о топологии дополнений к наборам комплексных координатных плоскостей. Затем даются явные конструкции для базисных циклов из $H_s(\mathbb{C}^d \setminus Z)$ и двойственных им по Александеру — Понтрягину циклов из $H_{2d-s-1}(\overline{Z})$, где $\overline{Z}$ — одноточечная компактификация набора плоскостей Z. Базисные циклы группы $H_s(\mathbb{C}^d \setminus Z)$ для $3 \leq s \leq d-1$ довольно просто геометрически устроены, а именно они могут быть реализованы произведениями $S^3 \times (S^1)^{(s-3)}$ трехмерной сферы на $(s-3)$-мерный тор.

В § 2 строятся базы групп когомологий де Рама $H^s(\mathbb{C}^d \setminus Z)$, $3 \leq s \leq d-1$. Все базисные формы подходящей перенумерацией координат получаются из форм вида

$$\omega_{k,m} = \omega_{BM}(z_1 \cdot \ldots \cdot z_k, z_{k+1} \cdot \ldots \cdot z_m) \wedge \frac{dz_2}{z_2} \wedge \cdots \wedge \frac{dz_{m-1}}{z_{m-1}},$$

где ω_{BM} — ядро Бохнера — Мартинелли в $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ [1]. Отметим, что аналогичного вида формы рассматривались в статье Сорани [13] с целью получения шкалы интегральных формул, соединяющих представления Коши и Бохнера — Мартинелли.

В § 3 работы строится образующая старшей группы когомологий де Рама $H^{d+2}(\mathbb{C}^d \setminus Z)$. Приведенная конструкция этой образующей отличается от формы, предъявленной в работе [8].

§ 1. Группы гомологий $H_s(\mathbb{C}^d \setminus Z)$ и двойственность Александера — Понтрягина

В этом параграфе построим базу группы $H_s(\mathbb{C}^d \setminus Z)$, $s = 1, \ldots, d+2$, и найдем двойственную (по Александеру — Понтрягину) к ней базу группы $H_{2d-s-1}(\overline{Z})$. Под термином «база группы гомологий» здесь и далее подразумевается такой набор циклов $\gamma_1, \ldots, \gamma_N$, что их классы гомологий $[\gamma_1], \ldots, [\gamma_N]$ являются базисом свободной части этой группы, в этом случае число N равно рангу этой группы.

Напомним формулировку теоремы двойственности Александера — Понтрягина. Пусть σ и γ — циклы в n-мерном вещественном многообразии, сумма размерностей которых равна $n-1$, причем σ гомологичен нулю: $\partial\sigma = \beta$. Их *коэффициент зацепления* $\mathfrak{D}(\sigma, \gamma)$ определяется как индекс пересечения β и γ:

$$\mathfrak{D}(\sigma, \gamma) = \chi(\beta, \gamma).$$

В следующей теореме через $\widetilde{H}_s$ обозначаются приведенные гомологии, а под группой слабых гомологий понимается свободная часть группы гомологий H_s.

Теорема 1 (двойственность Александера — Понтрягина). *Пусть S^n — многообразие, гомеоморфное n-мерной сфере, и T — полиэдр в нем. Тогда для $r+q=n$, $r=1,\dots,n$, группы слабых гомологий $\widetilde{H}_{r-1}(T)$ и $\widetilde{H}_q(S^n \setminus T)$ изоморфны, причем для всякой базы $(r-1)$-мерных гомологий $\{\sigma_i\}_{i=1}^p$ полиэдра T существует двойственная ей база q-мерных гомологий $\{\gamma_i\}_{i=1}^p$ дополнения $S^n \setminus T$ такая, что $\mathfrak{D}(\sigma_i, \gamma_j) = \delta_{ij}$ (символ Кронекера), $i, j = 1, \dots, p$.*

Согласно [11] любой набор комплексных координатных плоскостей в $\mathbb{C}^d$ коразмерности больше 1 может быть задан с помощью подходящего симплициального комплекса $\mathscr{K}$ на множестве вершин $[d] = \{1, \dots, d\}$. А именно, рассмотрим конфигурацию плоскостей

$$Z_{\mathscr{K}} := \bigcup_{\sigma \notin \mathscr{K}} L_\sigma,$$

где $\sigma \notin \mathscr{K}$ означает, что $\sigma = \{i_1, \dots, i_m\} \subseteq [d]$ — подмножество в $[d]$, не порождающее симплекс в $\mathscr{K}$, а $L_\sigma = \{z \in \mathbb{C}^d : z_{i_1} = \dots = z_{i_m} = 0\}$.

Теорема 2 [11]. *Имеет место изоморфизм*

$$\widetilde{H}_s(\mathbb{C}^d \setminus Z_{\mathscr{K}}) = \bigoplus_{\sigma \notin \mathscr{K}} \widetilde{H}_{s-|\sigma|-1}(\mathscr{K}_\sigma),$$

где $\mathscr{K}_\sigma$ — подкомплекс в $\mathscr{K}$, натянутый на набор вершин $\sigma = \{i_1, \dots, i_q\} \subseteq [d]$, а $|\sigma| = q$ — мощность набора σ.

Пусть $P \subset \mathbb{R}^n$ — n-мерный простой многогранник, т. е. к каждой его вершине сходится ровно n гиперграней (граней коразмерности один). Через $F_1, \dots, F_d$ обозначим гиперграни многогранника P и введем следующие обозначения:

$$F_J = \bigcup_{j \in J} F_j, \quad F^J = \bigcap_{j \in J} F_j,$$

где $J \subseteq [d]$, причем $F^{\varnothing} = P$, а $F_{\varnothing} = \varnothing$. Простому многограннику P можно сопоставить набор координатных плоскостей в $\mathbb{C}^d$:

$$Z_P = \bigcup_{\sigma \subseteq [d] : F^\sigma = \varnothing} L_\sigma.$$

Способы задания наборов плоскостей при помощи симплициальных комплексов $\mathscr{K}$ и простых многогранников P соотносятся следующим образом: любому простому многограннику P можно естественным образом сопоставить двойственный комплекс $\mathscr{K} = \mathscr{K}(P)$, состоящий из симплексов $\{i_1, \dots, i_q\}$, характеризуемых свойством $F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_q} \neq \varnothing$.

Положим

$$B_\tau := \{z \in \mathbb{C}^d : |z_j| = 1,\ j \notin \tau,\ |z_i| \le 1,\ i \in \tau\},$$

где $\tau \subseteq [d]$. Обозначим

$$\mathscr{Z}_{\mathscr{K}} := \bigcup_{\tau \in \mathscr{K}} B_\tau.$$

Теорема 3 [11]. *Существует деформационная ретракция* $\mathbb{C}^d \setminus Z_{\mathscr{K}} \to \mathscr{Z}_{\mathscr{K}}$.

Замечание. В случае, когда $\mathscr{K}$ — триангуляция n-мерной сферы, в частности, когда $\mathscr{K} = \mathscr{K}(P)$ для простого n-мерного многогранника P, множество $\mathscr{Z}_{\mathscr{K}}$ является $(d+n)$-мерным замкнутым ориентируемым многообразием. В случае, когда $\mathscr{K} = \mathscr{K}(P)$, многообразие $\mathscr{Z}_{\mathscr{K}(P)}$ гомотопически эквивалентно многообразию в $\mathbb{C}^d \setminus Z_{\mathscr{K}(P)}$, задаваемому системой уравнений

$$a_{i1}|z_1|^2 + \dots + a_{id}|z_d|^2 = \rho_i, \quad i = 1, \dots, d-n,$$

где a_{ij}, ρ_i — некоторые вещественные числа (см. [8, 14, 15]).

Интересующий нас набор плоскостей $Z = \bigcup\limits_{1<|i-j|<d-1} \{z_i = z_j = 0\}$ задается при помощи d-угольника P, т. е. $Z = Z_P$, грани $F_1, \dots, F_d$ которого упорядочены циклически. Соответствующий симплициальный комплекс $\mathscr{K}(P)$ образован одномерными симплексами $\{1,2\}, \{2,3\}, \dots, \{d-1,d\}, \{d,1\}$. Для указанного набора Z ранги групп гомологий $H_s(\mathbb{C}^d \setminus Z)$ вычисляются по простым комбинаторным формулам [12]:

$$\dim H_s(\mathbb{C}^d \setminus Z) = \begin{cases} 1 & \text{при } s = 0, d+2, \\ 0 & \text{при } s = 1, 2, d, d+1, \\ (d-2)C_{d-2}^{s-2} - C_{d-2}^{s-1} - C_{d-2}^{s-3} & \text{при } 3 \le s \le d-1. \end{cases}$$

Отметим, что в случае, когда P — d-угольник и $d \ge 4$, многообразие $\mathscr{Z}_{\mathscr{K}(P)}$ диффеоморфно связной сумме наборов нескольких копий произведений сфер $S^q \times S^p$, $q + p = d + 2$ (см. [15], а также цитированную там литературу).

На основе теоремы 2 можно доказать следующий изоморфизм.

Теорема 4. $H_s(\mathbb{C}^d \setminus Z_P) \simeq \bigoplus\limits_{I \subseteq [d]} H_{s-|I|}(P, F_I)$.

По сути, доказательство этой теоремы приведено в [15] в несколько других терминах. Мы приведем ее доказательство для интересующего нас случая, когда P является многоугольником.

Доказательство. Пусть P — d-угольник, группы $H_j(P, F_I)$ могут быть нетривиальны только при $j = 0, 1, 2$, причем $H_0(P, F_I)$ нетривиальна только для $I = \varnothing$, а $H_2(P, F_I)$ — только для $I = [d]$. Таким образом, нужно доказать следующее:

$$H_0(\mathbb{C}^d \setminus Z) \simeq H_0(P, \varnothing), \quad H_{d+2}(\mathbb{C}^d \setminus Z) \simeq H_2(P, F_{[d]}),$$
$$H_s(\mathbb{C}^d \setminus Z) \simeq \bigoplus_{\substack{|I|=s-1, \\ I \subseteq [d]}} H_1(P, F_I),$$

для $1 \le s \le d+1$. Первые два изоморфизма следуют из того, что $H_0(P, \varnothing) = H_2(P, \partial P) \simeq \mathbb{Z}$, и замечания к теореме 3. Докажем последний изоморфизм.

Очевидно, объединение $F_I = \bigcup\limits_{i \in I} F_i$ является пространством подкомплекса $\mathscr{K}_I$ комплекса $\mathscr{K} = \mathscr{K}(P)$, натянутого на вершины $i \in I$, поэтому

$$\widetilde{H}_0(F_I) = \widetilde{H}_0(\mathscr{K}_I).$$

Таким образом, при $0 < s < d + 2$ по теореме 2 получим

$$H_s(\mathbb{C}^d \setminus Z) \simeq \bigoplus_{\substack{I \subset [d], \\ |I|=s-1}} \widetilde{H}_0(\mathscr{K}_I) \simeq \bigoplus_{\substack{I \subset [d], \\ |I|=s-1}} \widetilde{H}_0(F_I).$$

Поскольку $H_1(P) = H_0(P, F_I) = 0$, точная последовательность пары (P, F_I) имеет вид
$$0 \to H_1(P, F_I) \to H_0(F_I) \to H_0(P) \to 0,$$
откуда $H_1(P, F_I) \simeq \widetilde{H}_0(F_I)$. Таким образом, получили
$$H_s(\mathbb{C}^d \setminus Z) \simeq \bigoplus_{\substack{I\subset[d],\\ |I|=s-1}} \widetilde{H}_0(F_I) \simeq \bigoplus_{\substack{I\subset[d],\\ |I|=s-1}} H_1(P, F_I).$$
Теорема доказана.

Рассмотрим вопрос о геометрической реализации циклов из $H_s(\mathbb{C}^d \setminus Z)$ и построим базу этой группы, а также двойственную ей по Александеру — Понтрягину базу группы $H_q(\overline{Z})$, где $\overline{Z} = Z \cup \{\infty\}$ — замыкание Z в одноточечной компактификации $\mathbb{C}^d \cup \{\infty\} = S^{2d}$.

Всякому множеству $I \subset [d]$ можно однозначно сопоставить набор граней F_I. Будем говорить, что $J \subset I$ является *связной компонентой* I, если F_J — связная компонента F_I. Для любого множества $I \subset [d]$ зафиксируем некоторую его связную компоненту и обозначим ее через $I_0 \subset I$. Через C_I обозначим множество всех связных компонент $J \subset I$, а через C_{I,I_0} — множество всех связных компонент $J \subset I$, кроме I_0. Тогда ранг $H_1(P, F_I)$ равен мощности множества C_{I,I_0}.

Рассмотрим границу $\sigma_I^J = \partial\bar{\eta}_I^J$ замыкания $\bar{\eta}_I^J$ в одноточечной компактификации $\overline{\mathbb{C}}^d = \mathbb{C}^d \cup \{\infty\}$ цепи
$$\eta_I^J = (-1)^{1+|I|(|I|+1)/2} \sum_{j\in J} \operatorname{sgn}\tau_j \{z_i \in \mathbb{R}_+,\ i \in I \setminus \{j\};\ z_j = 0;\ z_k \in \mathbb{C},\ k \notin I\},$$
где τ_j — перестановка следующего вида:
$$\tau_j = \begin{pmatrix} i_1 & \dots & \dots & \dots & \dots & i_{|I|} \\ i_1 & \dots & [i_k = j] & \dots & i_{|I|} & j \end{pmatrix}.$$
Ориентацию цепи η_I^J считаем заданной порядком следования координат $r_1, \theta_1, \dots, r_d, \theta_d$ $(r_j = |z_j|,\ \theta_j = \arg z_j)$, ориентацию σ_I^J — индуцированной ориентацией η_I^J, а ориентацию объемлющего пространства $\mathbb{C}^d$ — заданной порядком следования координат $x_1, y_1, \dots, x_d, y_d$, где $z_j = x_j + iy_j$. Покажем, что $\sigma_I^J \subset \overline{Z}$. Представим σ_I^J в виде суммы $\sigma_I^J = \sum\limits_{i<j} \varepsilon_{ij}\sigma_I^{ij}$, где ε_{ij} — некоторый целочисленный коэффициент и σ_I^{ij} — цепь вида
$$\sigma_I^{ij} = \{z_i = 0,\ z_j = 0;\ z_q \in \mathbb{R}_+,\ q \in I \setminus \{i, j\};\ z_k \in \mathbb{C},\ k \notin I\} \cup \{\infty\},$$
лежащая в $\overline{Z}$ при $1 < |i-j| < d-1$. Остается заметить, что $\varepsilon_{ij} = 0$ при $|i-j| = 1$ и $|i-j| = d-1$. Таким образом, σ_I^J — цикл на $\overline{Z}$.

Рассмотрим $(|I|+1)$-мерные циклы
$$\gamma_I^{ij} = \{|z_i|^2 + |z_j|^2 = 1,\ |z_q|^2 = 1,\ z_k = -1;\ q \in I \setminus \{i, j\},\ k \notin I\},$$
где $i, j \in I$. Эти циклы лежат в дополнении к Z и топологически эквивалентны $S^3 \times (S^1)^{|I|-2}$. Цикл γ_I^{ij} можно параметризовать следующим образом:
$$\gamma_I^{ij} = \left\{ \begin{matrix} z_i = \sqrt{t}e^{\sqrt{-1}\theta_i},\ z_j = \sqrt{1-t}e^{\sqrt{-1}\theta_j},\ t \in [0,1]; \\ z_q = e^{\sqrt{-1}\theta_q},\ q \in I \setminus \{i, j\},\ \theta_s \in [0, 2\pi],\ s \in I; \\ z_k = -1,\ k \notin I \end{matrix} \right\},$$

где $i, j \in I$, а ориентацию γ_I^{ij} считаем заданной порядком следования параметров $t, \theta_{i_1}, \dots, \theta_{i_{|I|}}$ $(i_1 < \dots < i_{|I|})$. Пусть I_0 — выделенная связная компонента набора I и $J \in C_{I,I_0}$ — связная компонента набора I, отличная от I_0. Выберем произвольные индексы $i \in I_0, j \in J$ из соответствующих связных компонент и обозначим через γ_I^J класс гомологий цикла $\gamma_I^{i,j}$. Ниже покажем, что он корректно определен, т. е. не зависит от выбора $i \in I_0$, $j \in J$.

Теорема 5. *Пусть* $3 \le s \le d-1$. *Тогда циклы* $\{\gamma_I^J\}_{|I|=s-1,\ J\in C_{I,I_0}}$ *и циклы* $\{\sigma_I^J\}_{|I|=s-1,\ J\in C_{I,I_0}}$ *образуют двойственные по Александеру — Понтрягину базы групп* $H_s(\mathbb{C}^d \setminus Z)$ *и* $H_{2d-s-1}(\overline{Z})$ *соответственно, т. е.* $\mathfrak{D}(\sigma_{I'}^{J'}, \gamma_I^J) = \delta_{I'I}^{J'J}$, *где* $\delta_{I'I}^{J'J} = 1$ *при* $J' = J$ *и* $I' = I$ *в остальных случаях* $\delta_{I'I}^{J'J} = 0$.

Доказательство. Из теоремы 4 видно, что количество различных циклов в наборах $\{\gamma_I^J\}_{|I|=s-1,\ J\in C_{I,I_0}}$ и $\{\sigma_I^J\}_{|I|=s-1,\ J\in C_{I,I_0}}$ равно рангу соответствующих групп гомологий. Таким образом, остается показать, что $\mathfrak{D}(\sigma_{I'}^{J'}, \gamma_I^J) = \delta_{I'I}^{J'J}$ и класс $\gamma_I^J = [\gamma_I^{ij}]$, $i \in I_0, j \in J$, не зависит от выбора i, j.

Вычислим коэффициенты зацепления $\sigma_{I'}^{J'}$ и γ_I^{ij}, $i \in I_0, j \in J$. Если $I' = I$ и $J' = J$, то пересечение $\gamma_I^{ij} \cap \eta_I^J$ состоит из одной точки $z_j = 0$, $z_k = -1$, $k \in [d] \setminus I$, $z_q = 1$, $q \in I \setminus \{j\}$. При выбранных ориентациях цепей имеем $\mathfrak{D}(\sigma_I^J, \gamma_I^{ij}) = \chi(\eta_I^J, \gamma_I^{ij}) = 1$. В случае $J' \ne J$, $I' = I$ пересечение $\gamma_I^{ij} \cap \eta_I^{J'}$ пустое, следовательно, $\mathfrak{D}(\sigma_I^{J'}, \gamma_I^{ij}) = 0$.

Если $|I| = |I'|$ и $I \ne I'$, то $\gamma_I^{ij} \cap \eta_{I'}^{J'} = \varnothing$ для любых $i, j \in I$ и, следовательно, $\mathfrak{D}(\sigma_{I'}^{J'}, \gamma_I^J) = 0$ при $I \ne I'$. Таким образом, все коэффициенты зацепления между $\sigma_{I'}^{J'}$ и γ_I^{ij} не зависят от выбора $i \in I_0$, $j \in J$. Стало быть, класс гомологий $\gamma_I^J = [\gamma_I^{ij}]$, $i \in I_0$, $j \in J$, определен корректно, и $\mathfrak{D}(\sigma_{I'}^{J'}, \gamma_I^J) = \delta_{I'I}^{J'J}$. Теорема доказана.

Для полноты изложения приведем результат, полученный ранее автором настоящей статьи совместно с А. В. Казановой [16]. Речь идет о конструкции цикла, двойственного по Александеру — Понтрягину к образующей старшей группы гомологий $H_{d+2}(\mathbb{C}^d \setminus Z)$, которая порождена циклом $\mathscr{Z}_{\mathscr{K}(P)}$, где P — d-угольник. Введем цепь

$$\eta_i = \{z \in \mathbb{C}^d : z_i = z_{i+1} = 0,\ z_k \in \mathbb{R}_+,\ k \in [d] \setminus \{i, i+1\}\},$$

где $i \in [d]$ (в случае $i = d$ положим $\eta_d = \{z \in \mathbb{C}^d : z_d = z_1 = 0,\ z_k \in \mathbb{R}_+,\ k \in [d] \setminus \{d, 1\}\}$). Ее ориентацию определим порядком параметров $x_{j_1} = \operatorname{Re}(z_{j_1}), \dots, x_{j_{d-2}} = \operatorname{Re}(z_{j_{d-2}})$, где $j_1 < \dots < j_{d-2}$ и $j_k \in [d] \setminus \{i, i+1\}$. Через σ_i обозначим границу η_i, взятую со знаком $(-1)^{\frac{(d+1)d}{2}}$ в случае $i \in \{1, \dots, d-1\}$ и со знаком $(-1)^{(d+1)}(-1)^{\frac{(d+1)d}{2}}$ в случае $i = d$, т. е.

$$\sigma_i = (-1)^{\frac{(d+1)d}{2}} \partial\eta_i = (-1)^{\frac{(d+1)d}{2}} \sum_{j\in[d]\setminus\{i,i+1\}} (-1)^j \sigma_{ij}$$

при $i \in \{1, \dots, d-1\}$ и

$$\sigma_d = (-1)^{(d+1)}(-1)^{\frac{(d+1)d}{2}} \partial\eta_d = (-1)^{\frac{(d+1)d}{2}} \sum_{j\in[d]\setminus\{1,d\}} (-1)^j \sigma_{dj},$$

где

$$\sigma_{ij} = \{z \in \mathbb{C}^d : z_i = z_{i+1} = z_j = 0,\ z_k \in \mathbb{R}_+,\ k \in [d] \setminus \{i, i+1, j\}\}.$$

Примем ориентацию σ_i индуцированной ориентацией η_i. Поскольку носитель $|\sigma_{ij}|$ содержится в Z для любого j и $|\sigma_i| \subset Z$, замыкание $\bar{\sigma}_i$ определяет класс в группе гомологий $H_{d-3}(\overline{Z})$.

Теорема 6. *Пусть P — d-угольник. Тогда цикл $\mathscr{Z}_{\mathscr{K}(P)}$ является двойственным по Александеру — Понтрягину циклу $\bar{\sigma}_i \in H_{d-3}(\overline{Z})$.*

Доказательство их двойственности проводится непосредственным вычислением коэффициента зацепления цикла $\mathscr{Z}_{\mathscr{K}(P)}$ и пленки над циклом $\bar{\sigma}_i$, т. е. вычисления индекса пересечения между $\mathscr{Z}_{\mathscr{K}(P)}$ и η_i. Как следствие получим, что циклы $\bar{\sigma}_i$ и $\bar{\sigma}_j$ гомологичны в $\overline{Z}$ для любых i и j.

§ 2. База группы когомологий $H^s(\mathbb{C}^d \setminus Z)$

В этом параграфе построим базу когомологий де Рама $H^s(\mathbb{C}^d \setminus Z)$, $0 < s < d+2$, двойственную к ранее построенной базе $\{\gamma_I^J\}_{|I|=s-1,\ J\in C_{I,I_0}}$ группы $H_s(\mathbb{C}^d \setminus Z)$. Сначала рассмотрим вспомогательную задачу нахождения базы гомологий и когомологий дополнения к некоторому специальному набору координатных плоскостей коразмерности два. А именно, для пары непустых вложенных мультииндексов $J \subset I \subseteq [d]$ рассмотрим семейство плоскостей

$$Z_I^J = \bigcup_{\substack{j\in J,\\ i\in I\setminus J}} \{z_j = z_i = 0\}.$$

Предложение 1. *Группа $H_{|I|+1}\bigl(\mathbb{C}^d \setminus Z_I^J\bigr)$ однопорожденная и является старшей группой гомологий: $H_s\bigl(\mathbb{C}^d \setminus Z_I^J\bigr) = 0$ при $s > |I|+1$.*

Доказательство легко получается из точной последовательности Майера — Вьеториса для объединения

$$\mathbb{C}^d \setminus Z_I^J = \mathbb{C}^d \setminus (U_1 \cap U_2) = (\mathbb{C}^d \setminus U_1) \cup (\mathbb{C}^d \setminus U_2),$$

где $U_1 = \bigcup\limits_{j\in J}\{z_j = 0\}$ и $U_2 = \bigcup\limits_{i\in I\setminus J}\{z_i = 0\}$. В звене последовательности Майера — Вьеториса

$$\begin{aligned}\dots \to H_{|I|+1}(\mathbb{C}^d \setminus U_1) \oplus H_{|I|+1}(\mathbb{C}^d \setminus U_2) \to H_{|I|+1}\bigl(\mathbb{C}^d \setminus Z_I^J\bigr)\\ \to H_{|I|}\Bigl(\mathbb{C}^d \setminus \bigcup_{i\in I}\{z_i = 0\}\Bigr) \to H_{|I|}(\mathbb{C}^d \setminus U_1) \oplus H_{|I|}(\mathbb{C}^d \setminus U_2) \to \dots\end{aligned}$$

крайние члены тривиальны, поэтому

$$H_{|I|+1}\bigl(\mathbb{C}^d \setminus Z_I^J\bigr) \simeq H_{|I|}\Bigl(\mathbb{C}^d \setminus \bigcup_{i\in I}\{z_i = 0\}\Bigr) \simeq \mathbb{Z}.$$

То, что группа $H_{|I|+1}\bigl(\mathbb{C}^d \setminus Z_I^J\bigr)$ старшая, также следует из этой последовательности в звеньях больших размерностей, но надо учесть, что для $s > |I|$ наряду с группами $H_s(\mathbb{C}^d \setminus U_1), H_s(\mathbb{C}^d \setminus U_2)$ тривиальна и группа $H_s\bigl(\mathbb{C}^d \setminus \bigcup\limits_{i\in I}\{z_i = 0\}\bigr)$. Предложение доказано.

Покажем, что форма бистепени $(|I|, 1)$

$$\omega_I^J = \frac{-\sum\limits_{q\in J}\prod\limits_{s\in I\setminus q}\bar{z}_s\,d\bar{z}_q\,dz_I + \sum\limits_{q\in I\setminus J}\prod\limits_{s\in I\setminus q}\bar{z}_s\,d\bar{z}_q\,dz_I}{(2\pi i)^{|I|}\Bigl(\prod\limits_{s\in J}|z_s|^2 + \prod\limits_{s\in I\setminus J}|z_s|^2\Bigr)^2}$$

(здесь $dz_I = \bigwedge_{i\in I} dz_i$) порождает в $\mathbb{C}^d\setminus Z_I^J$ старшую группу когомологий де Рама. Форму ω_I^J можно записать в виде

$$\omega_I^J = \pm\frac{1}{(2\pi i)^{|I|-2}}\omega_{BM}\Big(\prod_{s\in J} z_s,\ \prod_{s\in I\setminus J} z_s\Big) \bigwedge_{q\in I\setminus\{i_0,j_0\}} \frac{dz_q}{z_q},$$

где $i_0 \in I\setminus J$, $j_0\in J$, а ω_{BM} есть форма Бохнера — Мартинелли

$$\omega_{BM}(\zeta_1,\zeta_2) = \frac{1}{(2\pi i)^2}\frac{\bar\zeta_1\, d\bar\zeta_2\, d\zeta_1\, d\zeta_2 - \bar\zeta_2\, d\bar\zeta_1\, d\zeta_1\, d\zeta_2}{(|z_1|^2+|z_2|^2)^2}.$$

Так как форма Бохнера — Мартинелли замкнута, форма ω_I^J замкнута.

Введем $(|I|+1)$-мерный цикл в $\mathbb{C}^d$:

$$\alpha_I^J = \{|z_j| = (1-r)^{\frac{1}{2|J|}},\ j\in J;\ |z_i| = r^{\frac{1}{2(|I|-|J|)}},\ i\in I\setminus J,\ r\in[0,1];\ z_k=-1,\ k\notin I\},$$

ориентируем его выбором порядка $r,\theta_{i_1},\dots,\theta_{i_{|I|}}$ ($\theta_j = \arg z_j$) параметризующих его координат.

Предложение 2. *Форма $\omega_I^J\in H^{(|I|+1)}\big(\mathbb{C}^d\setminus Z_I^J\big)$ и цикл $\alpha_I^J\in H_{(|I|+1)}\big(\mathbb{C}^d\setminus Z_I^J\big)$ двойственны по де Раму, т. е. $\int_{\alpha_I^J}\omega_I^J = 1$.*

Доказательство. Сначала выпишем параметризацию цикла α_I^J:

$$z_q = (1-r)^{\frac{1}{2|J|}} e^{i\theta_q},\ q\in J,\quad z_p = r^{\frac{1}{2(|I|-|J|)}} e^{i\theta_p},\ p\in I\setminus J,\ r\in[0,1].$$

Заметим, что полином от $|z_i|^2$, стоящий в знаменателе формы ω_I^J, равен 1 на цикле α_I^J. Далее, для внешних произведений (суженных на α_I^J) имеем

$$d\bar z_q\wedge dz_q = -\frac{i}{|J|}(1-r)^{\frac{1}{|J|}-1}\,dr\,d\theta_q,\quad q\in J,$$

$$d\bar z_q\wedge dz_q = \frac{i}{(|I|-|J|)}r^{\frac{1}{(|I|-|J|)}-1}\,dr\,d\theta_q,\quad q\in I\setminus J.$$

Переходя в интеграле $\int_{\alpha_I^J}\omega_I^J$ к координатам $r,\theta_{i_1},\dots,\theta_{i_{|I|}}$, получим

$$\int_{\alpha_I^J}\omega_I^J = \frac{1}{(2\pi i)^{|I|}}\int_0^1 dr\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi} d\theta_{i_1}\dots d\theta_{i_{|I|}} = 1.$$

Теперь применим полученные результаты к построению базы когомологий для $H^s(\mathbb{C}^d\setminus Z)$, $3\le s\le d-1$. Напомним, что для поднабора $I\subset[d]$, для которого F_I несвязно, через C_{I,I_0} мы обозначаем множество всех поднаборов $J\subset I$, для которых F_J — связные компоненты F_I, отличные от выбранной связной компоненты F_{I_0}.

Теорема 7. *Пусть $3\le s\le d-1$. Тогда следующие наборы циклов и форм:*

$$\big\{\gamma_I^J\big\}_{|I|=s-1,\ J\in C_{I,I_0}},\quad \big\{\omega_I^J\big\}_{|I|=s-1,\ J\in C_{I,I_0}},$$

образуют двойственные по де Раму базы групп $H_s(\mathbb{C}^d\setminus Z)$ и $H^s(\mathbb{C}^d\setminus Z)$ соответственно, т. е.

$$\int_{\gamma_{I'}^{J'}}\omega_I^J = \delta_{I'I}^{J'J},$$

где $\delta_{I'I}^{J'J} = 1$ *при* $J' = J$ *и* $I' = I$, *в остальных случаях* $\delta_{I'I}^{J'J} = 0$.

Доказательство. Вычислим интеграл $\int\limits_{\gamma_{I'}^{J'}} \omega_I^J$. Сначала рассмотрим случай $I' \neq I$, $|I'| = |I|$. В этом случае существует $k \in I \setminus I'$, и по теореме 5 в качестве представителя класса гомологий $\left[\gamma_{I'}^{J'}\right]$ можно выбрать такой цикл $\gamma \sim \gamma_{I'}^{J'}$, что γ лежит на плоскости $\{z_k = \mathrm{const}\}$. С другой стороны, форму ω_I^J можно записать в виде $\omega_I^J = \psi \wedge dz_k$, поэтому $\int\limits_{\gamma_{I'}^{J'}} \omega_I^J = 0$.

Теперь рассмотрим случай $I' = I$, $J' \neq J$. Напомним, что форма ω_I^J регулярна в $\mathbb{C}^d \setminus Z_I^J$. Покажем, что $\gamma_I^{J'} \sim 0$ в $\mathbb{C}^d \setminus Z(J, I)$. По теореме 5 $\gamma_I^{J'} \sim \gamma_I^{ij}$, где $i \in I_0$ и $j \in J$. Рассмотрим цепь

$$\beta_I^{ij} = \{|z_i|^2 + |z_j|^2 \leq 1;\ |z_k|^2 = 1,\ k \in I \setminus \{i, j\};\ z_q = -1, q \notin I\}.$$

Она лежит в $\mathbb{C}^d \setminus Z_I^J$, и $\partial\beta_I^{ij} = \pm\gamma_I^{ij}$. Таким образом,

$$\int\limits_{\gamma_I^{J'}} \omega_I^J = \int\limits_{\gamma_I^{ij}} \omega_I^J = \pm \int\limits_{\beta_I^{ij}} d\omega_I^J = 0.$$

Вычислим интеграл $\int\limits_{\gamma_I^J} \omega_I^J$. По предложению 2 имеем $\int\limits_{\alpha_I^J} \omega_I^J = 1$. Покажем, что α_I^J гомологичен γ_I^{ij} $(i \in I_0,\ j \in J)$ в $H_{|I|+1}\big(\mathbb{C}^d \setminus Z_I^J\big)$. Построим цепь:

$$\beta_I^{ij} = \left\{ \begin{array}{c} |z_i| = r^{\frac{1}{2((|I|-|J|)t+(1-t))}},\ |z_j| = (1-r)^{\frac{1}{2(|J|t+(1-t))}}; \\ |z_q| = ((1-t) + rt)^{\frac{1}{2(|I|-|J|)}},\ q \in \{I \setminus J\} \setminus \{i\}; \\ |z_p| = ((1-t) + (1-r)t)^{\frac{1}{2|J|}},\ p \in J \setminus \{j\}; \\ z_k = -1,\ k \notin I;\ r \in [0,1],\ t \in [0,1] \end{array} \right\}.$$

Граница β_I^{ij} равна $\partial\beta_I^{ij} = \alpha_I^J - \gamma_I^{ij}$. Получили, что $\int\limits_{\gamma_I^J} \omega_I^J = \int\limits_{\alpha_I^J} \omega_I^J = 1$. Теорема доказана.

§ 3. Старшая группа когомологий $H^{d+2}(\mathbb{C}^d \setminus Z)$

В работе [8] предъявлена конструкция образующей группы когомологий де Рама $H^{d+n}(\mathbb{C}^d \setminus Z_P)$ для случая, когда P является n-мерным простым многогранником. В случае $n = 2$, т. е. когда P является многоугольником, построим иную конструкцию образующей данной группы $H^{d+2}(\mathbb{C}^d \setminus Z)$. Обозначим через $c(I)$ число связных компонент $F_I = \bigcup\limits_{i \in I} F_i$. Напомним, что C_I обозначает совокупность связных компонент множества F_I.

Теорема 8. *Пусть даны наборы* $I \subset [d]$, $c(I) \geq 2$ *и* $\widehat{I} = [d] \setminus I$. *Тогда для любых* $J \in C_I, J' \in C_{\widehat{I}}$ *таких, что* $F_{J \cup J'}$ — *связное множество,* $(d, 2)$*-форма* $\omega_I^J \wedge \omega_{\widehat{I}}^{J'}$ *порождает группу* $H^{d+2}(\mathbb{C}^d \setminus Z)$.

Замечание. Фактически теорема 8 описывает все нетривиальные умножения в кольце $H^*(\mathbb{C}^d \setminus Z)$, этот факт нетрудно вывести из [11]. В действительности все нетривиальные умножения в когомологиях $\mathbb{C}^d \setminus Z$ получаются из двойственности Пуанкаре на многообразии $\mathscr{Z}_{\mathscr{K}(P)}$.

Доказательство. По замечанию к теореме 3 группа $H^{d+2}(\mathbb{C}^d \setminus Z)$ однопорожденная. Для того чтобы показать, что $\omega_I^J \wedge \omega_{\widehat{I}}^{J'}$ порождает группу

$H^{d+2}(\mathbb{C}^d \setminus Z)$, достаточно убедиться, что интеграл этого произведения форм по некоторому $(d+2)$-мерному циклу отличен от нуля. Форма $\omega_I^J \wedge \omega_{\widehat{I}}^{J'}$ регулярна в дополнении к набору плоскостей:

$$\mathbb{C}^d \setminus \left(Z_I^J \cup Z_{\widehat{I}}^{J'}\right) = \left(\mathbb{C}_I \setminus Z_I^J \times \mathbb{C}_{\widehat{I}}\right) \cap \left(\mathbb{C}_I \times \mathbb{C}_{\widehat{I}} \setminus Z_{\widehat{I}}^{J'}\right) = \left(\mathbb{C}_I \setminus Z_I^J\right) \times \left(\mathbb{C}_{\widehat{I}} \setminus Z_{\widehat{I}}^{J'}\right),$$

где $\mathbb{C}_I$ есть $|I|$-мерное комплексное пространство координат z_i, $i \in I$. По предложению 1 знаем, что $H_{|I|+1}\left(\mathbb{C}_I \setminus Z_I^J\right)$, $H_{d-|I|+1}\left(\mathbb{C}_{\widehat{I}} \setminus Z_{\widehat{I}}^{J'}\right)$ однопорожденные и являются старшими группами гомологий, следовательно, по формуле Кюннета имеем

$$H_{d+2}\left(\mathbb{C}^d \setminus \left(Z_I^J \cup Z_{\widehat{I}}^{J'}\right)\right) \simeq \mathbb{Z}.$$

Рассмотрим в $\mathbb{C}^d \setminus \left(Z_I^J \cup Z_{\widehat{I}}^{J'}\right)$ цикл

$$\alpha_I^{J,J'} = \left\{ \begin{array}{c} |z_{p_1}| = (1-r_1)^{\frac{1}{2(|I|-|J|)}},\ p_1 \in J; \\ |z_{q_1}| = r_1^{\frac{1}{2|J|}},\ q_1 \in I \setminus J,\ r_1 \in [0,1]; \\ |z_{p_2}| = (1-r_2)^{\frac{1}{2(|\widehat{I}|-|J'|)}},\ p_2 \in J'; \\ |z_{q_2}| = r_2^{\frac{1}{2|J'|}},\ q_2 \in \widehat{I} \setminus J',\ r_2 \in [0,1] \end{array} \right\},$$

ориентированный порядком следования координат $r_1, \theta_{i_1}, \dots, \theta_{i_{|I|}}, r_2, \theta_{\hat{i}_1}, \dots, \theta_{\hat{i}_{|\widehat{I}|}}$, $i_q \in I$, $\hat{i}_p \in \widehat{I}$. Согласно предложению 2

$$\int\limits_{\alpha_I^{J,J'}} \omega_I^J \wedge \omega_{\widehat{I}}^{J'} = 1.$$

Теорема доказана.

Замечание. На самом деле можно доказать, что цикл $\alpha_I^{J,J'}$ с точностью до знака гомологичен многообразию $\mathscr{Z}_{\mathscr{K}(P)}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Айзенберг Л. А., Южаков А. П.* Интегральные представления и вычеты в многомерном комплексном анализе. Новосибирск: Наука, 1979.
2. *Цих А. К.* Многомерные вычеты и их применения. Новосибирск: Наука, 1988.
3. *Kirwan F. C.* Cohomology of quotients in symplectic and algebraic geometry. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1984. (Math. Notes; V. 31).
4. *Cox D. A.* The homogeneous coordinate ring of toric variety // J. Algebr. Geom. 1995. V. 4. P. 17–50.
5. *Cox D. A.* Recent developments in toric geometry // Algebraic geometry (Santa Cruz, 1995). Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1997. P. 389–435. (Proc. Symp. Pure Math.; V. 62, part 2).
6. *Tsikh A. K.* Toriska residyer (Swedish) // Proc. Conf. «Nordan 3». Stockholm: Stockholm Univ., 1999. P. 16.
7. *Кытманов А. А.* Об аналоге формы Фубини — Штуди для двумерных торических многообразий // Сиб. мат. журн. 2003. Т. 44, № 2. С. 358–371.
8. *Shchuplev A., Tsikh A. K., Yger A.* Residual kernels with singularities on coordinate planes // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 2006. V. 253. P. 277–295.
9. *Goresky M., MacPherson R.* Stratified Morse theory.. Berlin: Springer-Verl., 1988.
10. *Васильев В. А.* Топология наборов плоскостей и их дополнений // Успехи мат. наук. 2001. Т. 56, № 2. С. 167–203.
11. *Бухштабер В. М., Панов Т. Е.* Торические действия в топологии и комбинаторике. М.: МЦНМО, 2004.
12. *Бухштабер В. М., Панов Т. Е.* Действия тора и комбинаторика многогранников // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 1999. Т. 225. С. 96–131.

13. *Sorani G.* Integral representations of holomorphic functions // Amer. J. Math. 1966. V. 88. P. 737–746.
14. *Панов Т. Е.* Торические множества типа Кемпфа — Несс // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 2008. Т. 263. С. 159–172.
15. *Bosio F., Meersseman L.* Real quadrics in $\mathbb{C}^n$, complex manifolds and convex polytopes // Acta Math. 2006. V. 197, N 1. P. 53–127.
16. *Казанова А. В., Элияшев Ю. В.* О гомологиях наборов комплексных плоскостей коразмерности два // Изв. вузов. Математика. 2009. № 10. С. 33–39.

Статья поступила 22 сентября 2009 г.

Элияшев Юрий Валерьевич
Сибирский федеральный университет,
пр. Свободный, 79, Красноярск 660041
eliyashev@mail.ru, eliyashev@gmail.com