Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2011. Том 52, № 3

УДК 512.57

УСЛОВНЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ШКАЛЫ ДИСКРИМИНАТОРНЫХ МНОГООБРАЗИЙ

А. Г. Пинус

Аннотация. Приводится классификация дискриминаторных многообразий универсальных алгебр на основе строения их условных геометрических шкал.

Ключевые слова: многообразие универсальных алгебр, дискриминаторное многообразие, условная геометрическая шкала, скелет вложимости многообразий.

Понятие условной алгебраической геометрии и основанное на нем отношение условной геометрической сравнимости $\leq^{\Delta,c}$ алгебр произвольного многообразия $\mathscr{M}$ универсальных алгебр (аналоги алгебраической геометрии и геометрической сравнимости $\leq^{\Delta}$ алгебр (см., к примеру, в [1–5]) введены в работе автора [6]. Эти понятие и отношение связаны с изучением структуры формульных (определимых системами бескванторных формул) подмножеств универсальных алгебр. Там же был доказан следующий критерий для отношения $\leq^{\Delta,c}$: *для любого многообразия $\mathscr{M}$ универсальных алгебр и любых $\mathscr{M}$-алгебр $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2$ отношение $\mathscr{A}_1 \leq^{\Delta,c} \mathscr{A}_2$ имеет место тогда и только тогда, когда любая неодноэлементная конечно порожденная подалгебра алгебры $\mathscr{A}_2$ изоморфно вложима в алгебру $\mathscr{A}_1$.*

В [6] предложены определения *условной геометрической квазишкалы многообразия $\mathscr{M}$* как квазиупорядоченной совокупности $\langle \mathscr{M}; \leq^{\Delta,c}\rangle$ и *условной геометрической шкалы* $\langle \mathscr{M}/_{\underset{\sim}{\Delta,c}}; \leq^{\Delta,c}\rangle$ многообразия $\mathscr{M}$ как фактора квазишкалы $\langle \mathscr{M}; \leq^{\Delta,c}\rangle$ по естественной эквивалентности $\underset{\sim}{\Delta,c}$, порожденной квазипорядком $\leq^{\Delta,c}$. В настоящей работе показана принципиальная разница в строении условно геометрических шкал (тем самым и бескванторных формульных подмножеств) алгебр, конечно порожденных и не локально конечных дискриминаторных многообразий.

В [6] отмечается двойственность шкалы $\langle \mathscr{M}/_{\underset{\sim}{\Delta,c}}; \leq^{\Delta,c}\rangle$ и частично упорядоченного множества $1 \oplus \langle IJ\mathscr{M}_{f,g}; \subseteq\rangle$. Здесь $\langle J\widetilde{\mathscr{M}}_{f,g}; \leq\rangle$ — совокупность типов изоморфизма конечно порожденных $\mathscr{M}$-алгебр с отношением $\leq$ изоморфной вложимости (скелет вложимости класса $\mathscr{M}_{f.g}$ конечно порожденных $\mathscr{M}$-алгебр), $\langle IA; \subseteq\rangle$ — частично упорядоченная отношением теоретико-множественного включения $\subseteq$ совокупность идеалов (замкнутых вниз и направленных вверх подмножеств) квазиупорядоченного множества $\langle A; \leq\rangle$, а $1 \oplus \langle B; \leq\rangle$ означает добавление внешнего (не входящего в B) наименьшего элемента к упорядоченному множеству $\langle B; \leq\rangle$.

Дискриминаторные многообразия универсальных алгебр (определение, примеры и свойства см., к примеру, в [7–9]) играют принципиальную роль в универсальной алгебре. Простейшим примером подобных многообразий служит многообразие булевых алгебр. В настоящей работе получен ряд результатов, связанных со строением шкал $\langle \mathscr{M}/_{\underset{\sim}{\Delta,c}}; \leq^{\Delta,c}\rangle$ для дискриминаторных многообразий $\mathscr{M}$. Заметим, что, как отмечено в работе [6], условная геометрическая шкала $\langle \mathscr{B}A/_{\underset{\sim}{\Delta,c}}; \leq^{\Delta,c}\rangle$ многообразия BA булевых алгебр имеет порядковый тип ω^*, двойственный порядковому типу ω натуральных чисел.

В силу отмеченной выше взаимосвязи частично упорядоченных множеств $\langle \mathscr{M}/_{\underset{\sim}{\Delta,c}}; \leq^{\Delta,c}\rangle$ и $\langle IJ\mathscr{M}_{f,g}; \subseteq\rangle$ для описания строения шкал $\langle \mathscr{M}/_{\underset{\sim}{\Delta,c}}; \leq^{\Delta,c}\rangle$ достаточно разобраться со строением скелетов вложимости $\langle J\mathscr{M}_{f,g}; \leq\rangle$ для дискриминаторных многообразий $\mathscr{M}$.

Для любого класса $\mathscr{K}$ универсальных алгебр через $J\mathscr{K}$ будем обозначать совокупность типов изоморфизма $\mathscr{K}$-алгебр. Отношение $\leq$ определим на $J\mathscr{K}$ следующим образом: $a \leq b$ для $a, b \in J\mathscr{K}$ тогда и только тогда, когда алгебра типа изоморфизма a изоморфно вложима в алгебру типа изоморфизма b. Непустое подмножество B квазиупорядоченного множества $\langle A; \leq\rangle$ называется *идеалом* в $\langle A; \leq\rangle$, если для любых $a, b \in A$ таких, что $a \leq b$, включение b в B влечет включение в B и элемента a и, кроме того, для любых $a, b \in B$ существует $c \in B$ такое, что $a, b \leq c$.

Прежде всего рассмотрим случай не локально конечного дискриминаторного многообразия $\mathscr{M}$. В [10] доказано, что любое счетное частично упорядоченное множество изоморфно вложимо в счетный скелет вложимости $\langle J\mathscr{M}_{\aleph_0}; \leq\rangle$ любого не локально конечного дискриминаторного многообразия $\mathscr{M}$ конечной сигнатуры и что в $\langle J\mathscr{M}_{\aleph_0}; \leq\rangle$ содержится континуум попарно не сравнимых элементов. Здесь $\mathscr{M}_{\aleph_0} = \langle \mathscr{A} \in \mathscr{M} \mid |\mathscr{A}| \leq \aleph_0\rangle$. Важную роль в этом доказательстве играют конечно порожденные алгебры. Тем не менее доказательство аналогичных фактов для шкалы $\langle \mathscr{M}/_{\underset{\sim}{\Delta,c}}; \leq^{\Delta,c}\rangle$ требует некоторой коррекции доказательства из [10], что и будет предпринято ниже в доказательстве следующего утверждения.

Теорема 1. *Для любого не локально конечного дискриминаторного многообразия $\mathscr{M}$ конечной сигнатуры*

1) *любое счетное частично упорядоченное множество изоморфно вложимо в $\langle \mathscr{M}/_{\underset{\sim}{\Delta,c}}; \leq^{\Delta,c}\rangle$,*

2) *в $\langle \mathscr{M}/_{\underset{\sim}{\Delta,c}}; \leq^{\Delta,c}\rangle$ существует континуум попарно не сравнимых элементов.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{M}$ — некоторое не локально конечное дискриминаторное многообразие конечной сигнатуры. Прежде всего отметим, что в силу утверждения леммы 1 из [10] $\mathscr{M}$ содержит бесконечную простую конечно порожденную алгебру $\mathscr{A}$. Для простоты будем считать, что $\mathscr{A}$ порождена двумя элементами a_0, a_1. Через $\mathscr{A}_0$ обозначим диагональную подалгебру прямой степени $\mathscr{A}^\omega$ алгебры $\mathscr{A}$, т. е. подалгебру алгебры $\mathscr{A}^\omega$, образованную постоянными функциями из $\mathscr{A}^\omega$. Пусть $\mathscr{A} = \{a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$, через f_i будем обозначать элемент алгебры $\mathscr{A}^\omega$ такой, что $f_i(m) = a_i$ для любого $m \in \omega$. Таким образом, $\mathscr{A}_0 = \{f_0, f_1, f_2, \dots, f_n, \dots\}$, и элементы f_0, f_1 порождают алгебру $\mathscr{A}_0$. Через g обозначим элемент алгебры $\mathscr{A}^\omega$ такой, что $g(m) = a_m$ для любого $m \in \omega$.

Пусть $\mathscr{A}_1$ — подалгебра алгебры $\mathscr{A}^\omega$, порожденная элементами f_0, f_1, g. Для любого множества $P \subseteq \omega$ через k_p обозначим элемент алгебры $\mathscr{A}^\omega$ такой, что $k_p(m) = a_0$ для $m \in P$ и $k_p(m) = a_1$ для $m \in \omega \backslash P$. Пусть $\mathscr{A}(P)$ — подалгебра алгебры $\mathscr{A}^\omega$, порожденная элементами f_0, f_1, g, k_p.

Все понятия, связанные с гиперарифметической иерархией подмножеств множества ω, можно найти в [11]. Для любого $P \subseteq \omega$ через $\overline{P}$ обозначим гиперстепень множества P, а через $\leq$ — отношение порядка (сводимость) в гиперарифметической иерархии. Пусть σ — сигнатура алгебры $\mathscr{A}$. Через $\mathscr{D}_{a_0,a_1}(x_0,x_1)$ обозначим $\{a_0,a_1\}$-диаграмму алгебры $\mathscr{A}$, т. е. совокупность всех тождеств $t_1(x_0,x_1) = t_2(x_0,x_1)$ сигнатуры σ, истинных на алгебре $\mathscr{A}$ на элементах $\langle a_0, a_1\rangle$. Пусть V — совокупность номеров формул из $\mathscr{D}_{a_0,a_1}(x_0,x_1)$ при некоторой фиксированной нумерации сигнатуры σ.

Согласно [12, замечание вслед за теоремой 1] существует совокупность P_1, $P_2, \dots, P_n, \dots$ подмножеств множества ω таких, что для любых $i, i_1, \dots, i_n \in \omega$ имеем $\overline{P}_i \geq \overline{V}$ и если $i \notin \{i_1, \dots, i_n\}$, то $\overline{P}_i \nleq \overline{P}_{i_1} \vee \dots \vee \overline{P}_{i_n}$.

Через $P(A)$ $(P_\omega(A))$ обозначим совокупность всех (всех конечных) подмножеств множества A. Для $B \in P_\omega(\omega)$ через $\mathscr{A}_B$ обозначим алгебру $\prod\limits_{i \in B} \mathscr{A}(P_i)$.

Так как в дискриминаторном многообразии прямое произведение конечного числа конечно порожденных алгебр конечно порождено, $\mathscr{A}_B \in \mathscr{M}_{f,g}$ для любого $B \in P_\omega(\omega)$. Согласно доказательству леммы 3 в [10] вложимость алгебры $\mathscr{A}_{B_1}$ в алгебру $\mathscr{A}_{B_2}$ для $B_1, B_2 \in P_\omega(\omega)$ равносильна включению $B_1 \subseteq B_2$. Для любых $B_1, B_2 \in P_\omega(\omega)$ таких, что $B_1 \subseteq B_2$, через φ_{B_1,B_2} обозначим некоторое фиксированное вложение алгебры $\mathscr{A}_{B_1}$ в $\mathscr{A}_{B_2}$. Для произвольного $I \subseteq \omega$ через $\mathscr{A}_I$ обозначим прямой предел прямого спектра $\{\mathscr{A}_B, \varphi_{B_1B_2} \mid B, B_1, B_2 \in P_\omega(\omega), B_1 \subseteq B_2\}$. В силу замеченного выше об алгебрах $\mathscr{A}_B$ $(B \in P_\omega(\omega))$ для $I, J \subseteq P(\omega)$ отношение $\mathscr{A}_J \leq^{\Delta,c} \mathscr{A}_I$ равносильно включению $I \subseteq J$. Из этого очевидным образом и следует утверждение теоремы.

Рассмотрим ситуацию со шкалой $\langle \mathscr{M}/_{\underset{\sim}{\Delta,c}}; \leq^{\Delta,c}\rangle$ для локально конечных дискриминаторных многообразий $\mathscr{M}$.

В [13] доказано, что для любого конечно порожденного дискриминаторного многообразия $\mathscr{M}$, все алгебры которого содержат одноэлементную подалгебру, счетный скелет $\langle J\mathscr{M}_{\aleph_0}; \leq\rangle$ является лучшим квазипорядком. Мы не будем напоминать здесь непростое комбинаторное определение «лучшего квазипорядка», введенное в работе Нэш-Вильямса [14] (см. его определение также в [15, 16]). Отметим лишь, что любой лучший квазипорядок $\langle A; \leq\rangle$ является вполне квазиупорядоченным множеством, т. е. не содержит бесконечных попарно не сравнимых и бесконечных строго убывающих последовательностей элементов.

Отметим, что если $\langle A; \leq\rangle$ — лучший квазипорядок и $B \subseteq A$, то и $\langle B; \leq\rangle$ также лучший квазипорядок. Для любого квазиупорядоченного множества $\langle A; \leq\rangle$ на совокупности $P(A)$ определим квазипорядок $\leq_1$ следующим образом: $B \leq_1 (C)$ для $B, C \in P(A)$ тогда и только тогда, когда для некоторого отображения h множества B в C для любого $b \in B$ имеет место $b \leq h(b)$. В частности, для идеалов B, C квазипорядка $\langle A; \leq\rangle$ отношение $B_1 \leq_1 C$ совпадает с отношением включения.

В [17] доказано, что для любого лучшего квазипорядка $\langle A; \leq\rangle$ квазипорядок $\langle P(A); \leq_1\rangle$ также лучший. В силу этого и замеченного выше о порядке $\leq_1$ на идеалах квазипорядка $\langle A; \leq\rangle$ имеем: если $\langle A; \leq\rangle$ — лучший квазипорядок, то лучшим квазипорядком является и $\langle IA; \subseteq\rangle$.

Тем самым в силу приведенных выше результатов из [13, 17] для любого конечно порожденного дискриминаторного многообразия $\mathscr{M}$ не более чем счетной сигнатуры, все алгебры которого содержат одноэлементную подалгебру, лучшими квазипорядками являются скелеты $\langle J\mathscr{M}_{\aleph_0}; \leq\rangle, \langle J\mathscr{M}_{f,g}; \leq\rangle$ и совокупности $\langle IJ\mathscr{M}_{f,g}; \subseteq\rangle, 1 \oplus \langle IJ\mathscr{M}_{f,g.}; \subseteq\rangle$.

Таким образом, ввиду отмеченной выше связи шкалы $\langle \mathscr{M}/_{\underset{\sim}{\Delta,c}}; \leq^{\Delta,c}\rangle$ с порядком $1 \oplus \langle IJ\mathscr{M}_{f,g.}; \subseteq\rangle$ имеет место

Теорема 2. *Для любого конечно порожденного дискриминаторного многообразия $\mathscr{M}$ не более чем счетной сигнатуры, все алгебры которого содержат одноэлементную подалгебру, условная геометрическая шкала $\langle \mathscr{M}/_{\underset{\sim}{\Delta,c}}; \leq^{\Delta,c}\rangle$ двойственна лучшему квазипорядку $1 \oplus \langle IJ\mathscr{M}_{f,g.}; \subseteq\rangle$ и, в частности, не содержит ни бесконечных попарно не сравнимых, ни бесконечных строго возрастающих последовательностей элементов.*

Квазиупорядоченное множество $\langle A; \leq\rangle$ называется *линейно фактор-упорядоченным*, если его соответствующий частично упорядоченный фактор линеен. Напомним, что многообразие $\mathscr{M}$ *полупросто*, если все его подпрямо неразложимые алгебры просты, $\mathscr{M}$ *имеет продолжимые конгруэнции*, если для любой $\mathscr{M}$-алгебры $\mathscr{A}_1$, любой ее подалгебры $\mathscr{A}_2$ и любой конгруэнции θ алгебры $\mathscr{A}_2$ существует конгруэнция θ' алгебры $\mathscr{A}_1$, ограничение которой на $\mathscr{A}_2$ совпадает с θ. В [18] доказано, что если $\mathscr{M}$ — нетривиальное полупростое (либо локально конечное) конгруэнц-дистрибутивное многообразие с продолжимыми конгруэнциями, то счетный скелет $\langle J\mathscr{M}_{\aleph_0}; \leq\rangle$ вложимости $\mathscr{M}$ линейно фактор-упорядочен тогда и только тогда, когда $\mathscr{M}$ порождено квазипримальной алгеброй $\mathscr{A}$ без собственных неодноэлементных подалгебр, для любых одноэлементных подалгебр которой существует автоморфизм алгебры $\mathscr{A}$, переводящий одну из этих подалгебр в другую.

Внимательный анализ доказательства этого утверждения в [18] позволяет заменить счетный скелет $\langle J\mathscr{M}_{\aleph_0}; \leq\rangle$ скелетом $\langle J\mathscr{M}_{f.g.}; \leq\rangle$. Тем самым имеет место следующая

Теорема 3. *Если $\mathscr{M}$ — нетривиальное полупростое (либо локально конечное) конгруэнц-дистрибутивное многообразие с продолжимыми конгруэнциями, то условная геометрическая шкала $\langle \mathscr{M}/_{\underset{\sim}{\Delta,c}}; \leq^{\Delta,c}\rangle$ многообразия $\mathscr{M}$ линейна тогда и только тогда, когда $\mathscr{M}$ порождено некоторой квазипримальной алгеброй $\mathscr{A}$, не имеющей собственных неодноэлементных подалгебр, любые одноэлементные подалгебры которой переводятся друг в друга автоморфизмами алгебры $\mathscr{A}$.*

Из описания $\langle J\mathscr{M}_{\aleph_0}; \leq\rangle$ в этом случае (см. [18]) следует, что для подобных многообразий $\mathscr{M}$ имеем $\langle \mathscr{M}/_{\underset{\sim}{\Delta,c}}; \leq^{\Delta,c}\rangle \cong \omega^*$. В связи с приведенными здесь утверждениями теорем 1 и 2 представляют интерес: описание условных геометрических шкал локально конечных не конечно порожденных дискриминаторных многообразий конечной сигнатуры, а также вопрос о необходимости в формулировке теоремы 2 наличия одноэлементных подалгебр у $\mathscr{M}$-алгебр.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Plotkin B. I.* Some notions of algebraic geometry in universal algebra // Algebra Anal. 1997. V. 9, N 4. P. 224–248.
2. *Plotkin B. I.* Algebras with the same (algebraic) geometry // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. 2003. Т. 242. С. 165–196.

3. *Plotkin B. I.* Some results and problems related to universal algebra geometry // Int. J. Algebra Comput. 2007. V. 17, N 5/6. P. 1133–1164.
4. *Пинус А. Г.* Геометрические шкалы многообразий алгебр и квазитождества // Мат. тр. 2009. Т. 14, № 2. С. 160–169.
5. *Блудов В. В., Гусев Б. В.* О геометрической эквивалентности групп // Тр. ин-та математики и механики УрО РАН. 2007. Т. 13, № 1. С. 56–77.
6. *Пинус А. Г.* Новые алгебраические инварианты для формульных подмножеств универсальных алгебр // Алгебра и логика. 2011. Т. 50, № 2.
7. *Burris S., Sankappanavar H. P.* A course in universal algebra. New York; Heidelberg; Berlin: Springer-Verl., 1981.
8. *Werner H.* Discriminator algebras. Berlin: Acad.-Verl., 1978.
9. *Пинус А. Г.* Основы универсальной алгебры. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2005.
10. *Пинус А. Г.* О счетных скелетах вложимости дискриминаторных многообразий // Алгебра и логика. 1989. Т. 28, № 5. С. 597–607.
11. *Роджерс Х.* Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М.: Мир, 1972.
12. *Spector C.* Measure-theoretic constructions of incomparable hyperdegrees // J. Symbol. Logic. 1958. V. 23, N 3. P. 280–288.
13. *Пинус А. Г.* Счетные скелеты конечно порожденных дискриминаторных многообразий // Сиб. мат. журн. 1992. Т. 33, № 2. С. 190–195.
14. *Nash-Williams G. St. J. A.* On well-quasi-ordering infinite trees // Proc. Camb. Phil. Soc. 1965. V. 61, N 4. P. 697–720.
15. *Fraisse R.* Theory of relations. Amsterdam; New York; Oxford: North-Holland Publ. Comp., 1986.
16. *Pinus A. G.* Boolean constructions in universal algebra. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Acad. Publ., 1993.
17. *Nash-Williams G. St. J. A.* On better quasi-ordering transfinite sequences // Proc. Camb. Phil. Soc. 1962. V. 64, N 2. P. 279–290.
18. *Пинус А. Г.* Многообразия с простым счетным скелетом вложимости // Сиб. мат. журн. 1990. Т. 31, № 1. С. 127–134.

Статья поступила 1 февраля 2010 г.

Пинус Александр Георгиевич
Новосибирский гос. технический университет,
пр. К. Маркса, 20, Новосибирск 630092
ag.pinus@gmail.com