Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2011. Том 52, № 3

УДК 517.982+517.988

УНИВЕРСАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА ДЛЯ СУБДИФФЕРЕНЦИАЛОВ СУБЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ СО ЗНАЧЕНИЯМИ В ПРОСТРАНСТВАХ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Ю. Э. Линке

Аннотация. Доказано, что субдифференциал в нуле ∂P каждого непрерывного сублинейного оператора $P : V \to C(X)$, где V — сепарабельное хаусдорфово локально выпуклое пространство, а $C(X)$ — банахово пространство непрерывных функций на компакте X, операторно-аффинно гомеоморфен компактному субдифференциалу $\partial^c Q$, т. е. субдифференциалу, состоящему только из компактных линейных операторов, некоторого компактного сублинейного оператора $Q : \ell^2 \to C(X)$, если ℓ^2 — сепарабельное гильбертово пространство, а пространства операторов наделяются топологией простой сходимости. С топологической точки зрения это означает универсальность пространства $L^c(\ell^2, C(X))$ линейных компактных операторов с топологией простой сходимости относительно вложения субдифференциалов рассматриваемого класса сублинейных операторов.

Ключевые слова: сублинейный оператор, субдифференциал, компактный субдифференциал, компактный сублинейный оператор, многозначное отображение, непрерывный селектор, гомеоморфизм, аффинный гомеоморфизм, операторно-аффинный гомеоморфизм, вложение.

Введение

Универсальное пространство — это топологическое пространство, которое содержит гомеоморфные образы топологических пространств определенного класса. Задачу об универсальных пространствах поставил еще Фреше, и он имел в виду класс простых (открытых) кривых Жордана, заданных абстрактным образом как метрические пространства. В первоначальной постановке она относилась именно к гильбертову или какому-то банахову пространству. Первые ее решения получил П. С. Урысон в 1924 г. Сначала он доказал в [1], что сепарабельное гильбертово пространство ℓ^2 или даже гильбертов параллелепипед, состоящий из точек $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in \ell^2$ и определяемый неравенствами $0 \leq x_n \leq 1/n$, содержит гомеоморфные образы всех сепарабельных метрических пространств. Ясно, что при таком вложении кривых Жордано может измениться их длина. Поэтому в следующей работе [2] П. С. Урысон нашел универсальное пространство, которое теперь называют его именем, содержащее изометрические образы всех сепарабельных полных метризуемых пространств. В универсальном пространстве Урысона при вложениях кривых сохраняется такая их важнейшая характеристика, как длина кривой. После работ П. С. Урысона было обнаружено много универсальных в том или ином смысле пространств. Отметим только доказанную Банахом и Мазуром в 1933 г.

© 2011 Линке Ю. Э.

[3] универсальность банахова пространства $C([0,1])$, в которое изоморфно и изометрично может быть вложено любое сепарабельное банахово пространство. Предъявленные примеры универсальных пространств показывают, что к гомеоморфизмам, фигурирующим в определении универсального пространства, могут быть предъявлены те или иные дополнительные условия.

В предлагаемой статье решена задача Фреше для описываемого ниже класса сублинейных операторов, если образами субдифференциалов в универсальном пространстве снова будут субдифференциалы сублинейных операторов.

Изучается следующий класс непрерывных сублинейных операторов $P : V \to C(X)$, где V — хаусдорфово сепарабельное локально выпуклое пространство, $C(X)$ — банахово пространство непрерывных функций, определенных на компактном топологическом пространстве X, со стандартной нормой и частичным порядком. Известно, что сублинейные операторы этого класса субдифференцируемы, т. е. их субдифференциалы ∂P в нуле являются непустыми, операторно выпуклыми и замкнутыми множествами в пространстве линейных операторов $L(V, C(X))$ с топологией простой сходимости [4, 5]. Известно также, что вне класса сепарабельных банаховых пространств V непрерывные сублинейные операторы могут быть не субдифференцируемыми, т. е. их субдифференциал в нуле может быть пустым множеством [6]. Отметим теперь, что сублинейные операторы изучаемого класса полностью определяются своим субдифференциалом в нуле, а именно $Pv = \sup\{uv : u \in \partial P\}$ для каждого $v \in V$. Следовательно, с топологической точки зрения сублинейные операторы можно было бы отождествлять, если бы их субдифференциалы были бы гомеоморфными. Однако при гомеоморфном отображении субдифференциал не всегда переводится в субдифференциал. Простейший пример к сказанному следующий: отрезок на плоскости является субдифференциалом в нуле сублинейного функционала, в то же время его гомеоморфный образ, скажем дуга окружности, не является субдифференциалом никакого сублинейного функционала, так как не является выпуклым множеством.

Поэтому с прикладной точки зрения важно, чтобы при вложении субдифференциала сублинейного оператора в универсальное пространство его образ снова был бы субдифференциалом какого-то сублинейного оператора. Таким образом, будем искать универсальные пространства среди пространств линейных операторов, определенных на сепарабельных банаховых пространствах. Первым претендентом среди них является гильбертово пространство ℓ^2.

В статье предлагается находить универсальные пространства линейных операторов топологическим методом. Суть метода заключается в том, что непрерывные сублинейные операторы могут быть представлены или отождествлены с непрерывными (в топологии Вьеториса) двойственными многозначными отображениями, действующими в сопряженное пространство V' к области определения сублинейного оператора V, а его субдифференциал — с непрерывным селекторами этого многозначного отображения. Этот метод ранее эффективно применялся автором для решения ряда задач о свойствах субдифференциалов непрерывных сублинейных операторов. Предлагаемый подход к решению задачи об универсальных пространствах заключается в том, что с помощью одной теоремы Кли будут построены аффинные гомеоморфизмы, которые назовем *аффинными гомеоморфизмами Кли,* шаров сопряженных пространств для случая нормированных пространств (или, более общо в случае локально выпуклых пространств, для равностепенно непрерывных, выпуклых и замкнутых множеств) в гильбертово сепарабельное пространство, в котором рассматривается сильная топология, определяемая стандартной нормой этого пространства. Такая конструкция позволит нам «переходить» последовательно от субдифференциалов исследуемого класса непрерывных сублинейных операторов к двойственным многозначным отображениям, а затем с помощью аффинных гомеоморфизмов Кли перейти к многозначным отображениям, действующим в сепарабельное гильбертово пространство ℓ^2, и далее перейти сначала к компактному сублинейному оператору и, наконец, от него перейти к субдифференциалу этого оператора, состоящему из компактных линейных операторов. Обосновав непрерывность каждого «перехода», докажем, что пространство линейных компактных операторов $L^c(\ell^2, C(X))$, определенных на сепарабельном гильбертовом пространстве ℓ^2, универсально.

Проведенное доказательство и теорема Кли подсказывают также направление поиска пространств, отличных от ℓ^2 и обладающих отмеченными выше свойствами универсальности. Этим универсальным пространствам будут посвящены отдельные публикации.

Статья, состоящая из четырех разделов, организована следующим образом. В разд. 1 приведены основные обозначения и определения. В разд. 2 собраны необходимые основные топологические пространства и базовые теоремы Гельфанда и Кли, необходимые для доказательства основного результата статьи. Основной результат — теорема 1 и ее доказательство — помещены в разд. 3. В разд. 4 доказаны теоремы 2–6, в которых изучаются свойства операторно-аффинных вложений в универсальное пространство, в частности, доказано, что можно выбрать такое вложение, чтобы при его действии субдифференциал суммы сублинейных операторов переводился в сумму субдифференциалов и т. п. Здесь же в теореме 6 доказано, что если пространства $L^c(\ell^2, C(X))$ универсальны для любого компакта X или даже для одноточечного компакта X, то всегда существует аффинный гомеоморфизм Кли. В этой же теореме установлено, что если пространства $L^c(\ell^2, C(X))$ универсальны относительно аффинных вложений, то они универсальны и в смысле операторно-аффинных вложений. В теореме 5 изучена универсальность пространства линейных компактных операторов $L^c(\ell^2, C([0,1]))$.

1. Основные обозначения и определения

Далее $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ — натуральный ряд, $\mathbb{R}$ — поле вещественных чисел или числовая прямая. *Компактом* называем компактное хаусдорфово топологическое пространство. Выпуклый компакт, если не оговорено особо, — компакт, аффинно гомеоморфный выпуклому компактному подмножеству хаусдорфова локально выпуклого пространства. Для удобства считаем, что выпуклый компакт всегда содержится в хаусдорфовом локально выпуклом пространстве (ЛВП). Все ЛВП далее хаусдорфовы и рассматриваются над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$.

Обозначим символом $C(X)$ банахово пространство непрерывных вещественнозначных функций на компакте X со стандартным частичным порядком с топологией равномерной сходимости, т. е. наделенное sup-нормой. Норму в пространстве $C(X)$ обозначим через $\|\cdot\|_{C(X)}$, а функцию, тождественно равную 1 на всем компакте X, — символом 1_X.

Далее V — ЛВП, а V' — его топологически сопряженное пространство. Рассмотрим непрерывный сублинейный оператор $P : V \to C(X)$. Здесь сублинейность означает субаддитивность и положительную однородность отображения V в $C(X)$, т. е. для всех $v_1, v_2 \in V$ и $\lambda \geq 0$

$$P(v_1 + v_2) \leq P(v_1) + P(v_2); \quad P(\lambda v_1) = \lambda P(v_1).$$

Всюду далее все сублинейные операторы непрерывны. Если пространство V нормировано, то его норму будем обозначать через $\|\cdot\|$. Напомним, что непрерывность сублинейного оператора в этом случае, как и линейного оператора, равносильна условию ограниченности его нормы. Норма сублинейного оператора P по определению равна

$$\|P\| = \sup\{\|Pv\|_{C(X)} : v \in V,\ \|v\| \leq 1\}. \tag{1}$$

Общий критерий непрерывности в случае ЛВП V следует из теоремы двойственности, которая будет приведена в разд. 2.

Пространство $L = L(V, C(X))$ всех непрерывных линейных операторов $u : V \to C(X)$, а также его подпространство $L^c = L^c(V, C(X))$, состоящее из компактных линейных операторов, наделим топологией простой сходимости [7], базу топологии которой в точке $u_0 \in L$ определяют множества следующего вида:

$$O(u_0; \varepsilon; v_1, v_2, \ldots, v_n) = \{u \in L = L(V, C(X)) : \|(u - u_o)(v_i)\|_{C(X)} < \varepsilon\}, \tag{2}$$

где $\varepsilon > 0$, а $v_1, v_2, \ldots, v_n$ — конечный набор точек из V.

Субдифференциал в нуле или, для краткости, субдифференциал ∂P сублинейного оператора P по определению равен

$$\partial P := \{u \in L : uv \leq Pv\ (\forall v \in V)\}.$$

Если V — сепарабельное локально выпуклое пространство, то субдифференциал ∂P всякого непрерывного сублинейного оператора P является непустым, замкнутым и операторно выпуклым множеством [4, 5]. Последнее свойство субдифференциала является обобщением понятия выпуклости в пространствах линейных операторов и означает следующее. Пусть $\mathrm{Id}_{C(X)}$ — тождественный оператор в $C(X)$. *Мультипликатором* в пространстве $C(X)$ назовем линейный оператор $\lambda : C(X) \to C(X)$ такой, что $0 \leq \lambda \leq \mathrm{Id}_{C(X)}$ [4]. Нетрудно видеть, что в $C(X)$ любой мультипликатор имеет вид $\lambda(f) = \tilde{\lambda} f$ $(\forall f \in C(X))$, где функция $\tilde{\lambda} \in C(X)$ и $0 \leq \tilde{\lambda}(x) \leq 1$ для всех $x \in X$. Множество $U \subset L$ назовем *операторно выпуклым,* если для всяких $u_1, u_2 \in U$ их операторно выпуклая комбинация $\lambda \circ u_1 + (\mathrm{Id}_{C(X)} - \lambda) \circ u_2$ с любым мультипликатором λ входит в U. Пусть U и W операторно выпуклые множества в $L(V_1, C(X))$ и $L(V_2, C(X))$ соответственно, где V_1 и V_2 — ЛВП. Под *операторно-аффинным отображением* будем понимать непрерывное отображение $h : U \to W$, которое сохраняет операторно выпуклые комбинации:

$$h\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \circ u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \circ h(u_i), \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \mathrm{Id}_{C(X)}. \tag{3}$$

Назовем множества U и W в пространствах линейных операторов *операторно-аффинно гомеоморфными*, если существует гомеоморфизм h множества U на W, который является операторно-аффинным (h^{-1} при этом тоже операторно-аффинно).

Напомним, что *гомеоморфизм* топологических пространств A и B есть взаимно однозначное непрерывное отображение $h : A \to B$ множества A на B такое, что обратное отображение h^{-1} тоже непрерывно. Отображение $h : A \to B$ называется *гомеоморфным вложением* или, кратко, *вложением*, если h является гомеоморфизмом между A и $h(A)$.

Если множества A и B являются выпуклыми множествами, возможно, в различных ЛВП, то будем, как обычно, говорить об их *аффинном гомеоморфизме*, заменяя в предыдущем определении мультипликаторы числами, оператор $Id_{C(X)}$ — единицей, а операцию суперпозицию — умножением.

Если $P : V \to C(X)$ — компактный сублинейный оператор (т. е. отображает ограниченные множества в относительно компактные), то наряду с обычным субдифференциалом ∂P рассмотрим его *компактный субдифференциал* $\partial^c P := \partial P \cap L^c$. Отметим, что, вообще говоря, $\partial^c P \neq \partial P$. Действительно, если V — бесконечномерное банахово пространство, то определенный на нем сублинейный оператор $P : v \longmapsto \|v\| 1_X$ компактен. Пусть $V := C(X)$, тогда тождественный на V оператор Id_V входит в ∂P, но не входит в $\partial^c P$. Напомним также, что для любого банахова пространства (не обязательно сепарабельного) V и для всякого компакта X компактный субдифференциал любого компактного сублинейного оператора $P : V \to C(X)$ является непустым, операторно выпуклым и замкнутым множеством [4].

2. Базовые пространства и результаты

В топологически сопряженном к V пространстве V' рассмотрим две топологии: сильную топологию β сопряженного пространства и $*$-слабую топологию или $\sigma(V', V)$-топологию, определяемую двойственностью между V и V'. Использование этих топологий подчеркивается, если это необходимо, прилагательными «слабая» или «сильная», а также наречиями «слабо» или «сильно» или значками σ и β в соответствующих обозначениях. Всюду далее $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — каноническая билинейная форма, устанавливающая двойственность между V и V'.

Обозначим через $\mathrm{conv}(V'_\sigma)$ совокупность всех непустых, выпуклых, равностепенно непрерывных и замкнутых в топологии V'_σ подмножеств из V'_σ. Она совпадает, как известно из теоремы Хермандера [8], с субдифференциалами в нуле непрерывных сублинейных функционалов $p : V \to \mathbb{R}$. Для бочечных ЛВП, в частности, для нормированных пространств эта совокупность состоит из непустых, выпуклых, $\sigma(V', V)$-компактных подмножеств. Нам потребуется также его подмножество $\mathrm{conv}(B)$, состоящее из тех элементов $\mathrm{conv}(V'_\sigma)$, которые содержатся в фиксированном $B \in \mathrm{conv}(V'_\sigma)$.

Топологию в $\mathrm{conv}(B)$ индуцируем из $\mathrm{conv}(V'_\sigma)$, а $\mathrm{conv}(V'_\sigma)$ будем наделять четырьмя топологиями: слабой или сильной топологиями Веториса (см. [9, 2.7.20]) и слабой или сильной топологиями Хаусдорфа (см. [10, II, § 1, упражнение 5]), порождаемыми соответственно слабой или сильной топологией в V'.

Напомним, что слабая топология Хаусдорфа на $\mathrm{conv}(V'_\sigma)$ вводится с помощью базиса открытых окрестностей точки $B_1 \in \mathrm{conv}(V'_\sigma)$, имеющего следующий вид:

$$\{B \in \mathrm{conv}(V'_\sigma) : B \subset B_1 + W,\ B_1 \subset B + W\} \quad (W \in \mathscr{W}_{V'_\sigma}), \tag{4}$$

где $\mathscr{W}_{V'_\sigma}$ — базис открытых выпуклых окрестностей нуля пространства V'_σ.

Аналогично определяется сильная топология Хаусдорфа в $\mathrm{conv}(V'_\sigma)$, если в предыдущем определении заменить базис открытых окрестностей нуля $\mathscr{W}_{V'_\sigma}$ соответствующим базисом открытых выпуклых окрестностей нуля в сильной топологии сопряженного пространства $\mathscr{W}_{V'_\beta}$.

Через $\exp S$ обозначаем пространство непустых замкнутых подмножеств топологического пространства S, наделенное топологией Вьеториса. По определению ее базу образуют семейства множеств вида

$$O\langle U_1, U_2, \dots, U_n\rangle = \{F \in \exp S : F \subset U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_n,\\ F \cap U_k \neq \varnothing \text{ для } k = 1, 2, \dots, n\}, \quad (5)$$

где $n \in \mathbb{N}$ и $U_1, U_2, \dots, U_n$ — открытые подмножества S. В дальнейшем топология Вьеториса индуцируется на все подпространства в $S := V'$, в частности, на все подпространства в $\operatorname{conv}(V'_\sigma)$. Отметим, что если такое подпространство состоит из компактов, то топологии Вьеториса и Хаусдорфа совпадают (см. [10, II, § 1, упражнение 5]).

Через ℓ^2 далее обозначается сепарабельное гильбертово пространство последовательностей $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$, для которых сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^2$ конечна. Всюду далее топология в ℓ^2 определяется нормой $\|x\| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^2$.

Нам потребуются также вспомогательные топологические пространства, которые также использовались и изучались в [5, 11].

Обозначим через $\mathfrak{R} := \mathfrak{R}(V, C(X))$ совокупность всех непрерывных сублинейных операторов $P : V \to C(X)$, где пока V и X фиксированы. Для введения в $\mathfrak{R}$ топологии рассмотрим систему множеств $\mathscr{U}$, состоящую из выпуклых уравновешенных оболочек всех конечных множеств из V. Наделим $\mathfrak{R}$ топологией равномерной сходимости на $\mathscr{U}$. Тогда фундаментальную систему открытых окрестностей точки $P_1 \in \mathfrak{R}$ образуют множества вида

$$\{P \in \mathfrak{R} : \|Pv - P_1 v\|_{C(X)} < \varepsilon \ \forall v \in U\}, \quad (6)$$

где $U \in \mathscr{U}$, $\varepsilon > 0$ произвольны. Поскольку сублинейные операторы положительно однородны, то, очевидно,

$$\{P \in \mathfrak{R} : \|Pv - P_1 v\|_{C(X)} < 1 \ \forall v \in U\} \quad (U \in \mathscr{U}) \quad (7)$$

также образуют фундаментальную систему окрестностей точки $P_1 \in \mathfrak{R}$.

Символом $\mathscr{F}$ обозначим пространство всех непрерывных отображений $F : X \to \operatorname{conv}(V'_\sigma)$ с топологией равномерной сходимости. Базис открытых окрестностей точки $F_1 \in \mathscr{F}$ в этой топологии образуют множества вида

$$\{F \in \mathscr{F} : F(x) \subset F_1(x) + W,\ F_1(x) \subset F(x) + W \ \forall x \in X\} \quad (W \in \mathscr{W}_{V'_\sigma}), \quad (8)$$

где, напомним, $\mathscr{W}_{V'_\sigma}$ — базис открытых выпуклых окрестностей нуля пространства V'_σ.

Пространство $C(X, V'_\sigma)$ всех непрерывных отображений X в V'_σ будем считать подпространством в $\mathscr{F}$ с индуцированной топологией.

Наделим пространства $\mathfrak{R}$ и $\mathscr{F}$ естественными операциями сложения и умножения на неотрицательные числа. Тогда эти пространства, как и $\operatorname{conv}(V'_\sigma)$, являются полулинейными топологическими пространствами. Упорядочим $\mathfrak{R}$ и $\mathscr{F}$ следующим образом:

$$P_1 \leq P_2 \Leftrightarrow P_1(v) \leq P_2(v) \ (\forall v \in V); \quad F_1 \leq F_2 \Leftrightarrow F_1(x) \subseteq F_2(x) \ (\forall x \in X).$$

В дальнейшем нам понадобятся три теоремы.

Теорема Кли [12; 13, III, § 2, теорема 2.1]. *Пусть B — выпуклое компактное подмножество в хаусдорфовом линейном топологическом пространстве E и существует счетное множество $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ непрерывных линейных функционалов на E, разделяющих точки B (т. е. если $x, y \in B$ и $f_n(x) = f_n(y)$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то $x = y$). Тогда B аффинно гомеоморфно выпуклому компакту K из ℓ_2.*

Теорема Гельфанда [14; 15, VI, § 7, теорема 1]. *Пусть X — компакт, а u — непрерывный линейный оператор, отображающий банахово пространство V в $C(X)$. Тогда существует такое слабо непрерывное отображение $f : X \to V'$, что*

$$uv(x) = \langle v, f(x)\rangle, \quad v \in V, \ x \in X; \tag{9}$$

$$\|u\| = \sup\{\|f(x)\| : x \in X\}. \tag{10}$$

Обратно, если задано такое отображение f, то оператор u, определяемый равенством (9)*, есть непрерывный линейный оператор, отображающий V в $C(X)$, с нормой, определяемой равенством* (10)*. Для того чтобы оператор u был компактным, необходимо и достаточно, чтобы f было непрерывно в топологии, определяемой нормой пространства V'.*

Прежде чем формулировать третью теорему, напомним о связях между сублинейными операторами и многозначными отображениями [4]. Поставим в соответствие непрерывному сублинейному оператору $P : V \to C(X)$ единственное отображение (многозначное в V'_σ) $F_P : X \to \mathrm{conv}(V'_\sigma)$, при котором $F_P(x)$ для каждого $x \in X$ есть субдифференциал в нуле ∂p_x непрерывного сублинейного функционала $p_x : V \to \mathbb{R}$, действующего по формуле $p_x(v) := Pv(x)$ ($\forall x \in X$, $v \in V$).

Отображение $F_P : X \to \mathrm{conv}(V'_\sigma)$ называется *представлением* сублинейного оператора P или *двойственным отображением*.

Следующая теорема обобщает теорему Гельфанда на сублинейные операторы и изучает свойства двойственных отображений. Прежде чем привести их характеристику, напомним определение.

Отображение $F : X \to \mathrm{conv}(V'_\sigma)$ называется *ограниченным*, если существует множество $B \in \mathrm{conv}(V'_\sigma)$ такое, что $F(x) \subseteq B$ для всех $x \in X$ [5].

Теорема двойственности. *Пусть X — компакт, а P — непрерывный сублинейный оператор, отображающий банахово пространство V в $C(X)$. Тогда существует непрерывное в слабой топологии Хаусдорфа отображение $F : X \to \mathrm{conv}(V'_\sigma)$, для которого*

$$Pv(x) = \sup\{\langle v, v'\rangle : v' \in F(x)\} \quad (v \in V, \ x \in X), \tag{11}$$

$$\|P\| = \sup\{\|v'\| : v' \in F(x), \ x \in X\}. \tag{12}$$

Обратно, если задано такое отображение F, то оператор P, определенный формулой (11)*, есть непрерывный сублинейный оператор, отображающий V в $C(X)$, с нормой, определяемой равенством* (12)*. При этом оператор компактен тогда и только тогда, когда отображение F непрерывно в сильной топологии Хаусдорфа.*

Если V — ЛВП, *то для непрерывного сублинейного оператора $P : V \to C(X)$ отображение $F_P : X \to \mathrm{conv}(V'_\sigma)$ непрерывно в слабой топологии Хаусдорфа и ограничено. Обратно, если отображение $F : X \to \mathrm{conv}(V'_\sigma)$ непрерывно в* *слабой топологии Хаусдорфа и ограничено, то существует непрерывный сублинейный оператор* $P : V \to C(X)$*, определяемый по формуле* (11)*, для которого* F *является его представлением.*

Теорема двойственности для банаховых пространств получена в [4], а для локально выпуклых пространствах — в [5].

Условимся отображение $P \longmapsto F_P$ пространств $\mathfrak{R}$ в $\mathscr{F}$ обозначать символом χ. Если из контекста ясно, какие пространства V и какой компакт X имеются при этом в виду, то не будем сопровождать это отображение и пространства $\mathfrak{R}$ и $\mathscr{F}$ дополнительными индексами. Отображение χ осуществляет алгебраический изоморфизм полулинейного пространства $\mathfrak{R}$ в $\mathscr{F}$, т. е.

$$\chi(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) = \lambda_1 \chi(P_1) + \lambda_2 \chi(P_2) \quad (\forall \lambda_1 \geq 0,\ \lambda_2 \geq 0;\ P_1, P_2 \in \mathfrak{R}). \tag{13}$$

Топологические свойства отображения χ изучались в [11] для бочечных ЛВП V. Для этих пространств оно биективно отображает $\mathfrak{R}$ на $\mathscr{F}$, поэтому существует $\chi^{-1} : F \longmapsto P$. Кроме того, отображение χ осуществляет топологический изоморфизм полулинейных пространств $\mathfrak{R}$ и $\mathscr{F}$.

Особо отметим, что сужение $\chi|_{L(V,C(X))}$ совпадает с известным представлением Гельфанда непрерывных линейных операторов, действующих из V в $C(X)$, и является непрерывным отображением для любых ЛВП V (а не только для бочечных ЛВП!) и компакта X. Заметим также, что в формуле (13) можно неотрицательные числа $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$ заменить неотрицательными функциями. При этом в левой части (13) умножение на неотрицательную функцию означает суперпозицию сублинейного оператора и оператора умножения на неотрицательную функцию, а в правой части — это обычное умножение многозначного отображения на неотрицательную функцию.

Используя представление Гельфанда, можно субдифференциал ∂P или компактный субдифференциал $\partial^c P$ любого непрерывного или компактного сублинейного оператора отождествлять с множеством всех слабо или сильно непрерывных селекторов F_P, рассматриваемого как многозначное отображение в V' со слабой или сильной топологией (т. е. непрерывными однозначными отображениями $f : X \to V'$ такими, что $f(x) \in F_P(x)$ для всех $x \in X$). Иными словами, верны формулы

$$\partial P = \{\chi^{-1}(f) : f \in cs\sigma(F_P)\}, \tag{14}$$

$$\partial^c P = \{\chi^{-1}(f) : f \in cs\beta(F_P)\}, \tag{15}$$

где через $cs\sigma(F_P)$ и $cs\beta(F_P)$ обозначены соответственно слабо или сильно непрерывные селекторы F_P.

3. Основной результат

Всюду ниже термин ЛВП будет обозначать хаусдорфово сепарабельное локально выпуклое пространство.

Основным результатом статьи является следующая

Теорема 1. *Пусть* V *— любое* ЛВП, *а компакт* X *фиксирован. Пространство* $L^c(\ell^2, C(X))$ *компактных линейных операторов, действующих из сепарабельного гильбертова пространства* ℓ^2 *в банахово пространство* $C(X)$*, в топологии простой сходимости универсально в следующем смысле. Для каждого непрерывного сублинейного оператора* $P : V \to C(X)$*, отображающего* V *в* $C(X)$*, найдется компактный сублинейный оператор* $Q : \ell^2 \to C(X)$ *такой, что* *их субдифференциалы ∂P и $\partial^c Q$ будут операторно-аффинно гомеоморфными. При этом значениями двойственного отображения F_Q являются непустые выпуклые и компактные подмножества в ℓ^2.*

Доказательство. Возьмем пока любой элемент $B \in \operatorname{conv}(V'_\sigma)$. Так как равностепенно непрерывное и замкнутое множество является компактом, то B — выпуклый компакт. Применим к нему теорему Кли. Для этого возьмем счетное плотное в V множество $\{v_n : n \in \mathbb{N}\}$, существующее в силу сепарабельности V. Определим на V' непрерывные в слабой топологии функционалы $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ формулой $f_n(v') = \langle v_n, v'\rangle$ для $n \in \mathbb{N}$ и $v' \in V'$. Тогда они разделяют точки B и, следовательно, в гильбертовом пространстве ℓ^2 найдется выпуклый компакт K, аффинно гомеоморфный B. Обозначим этот аффинный гомеоморфизм через $h_B : B \to K$.

Напомним, что $\operatorname{conv}(B)$ составляют те множества из $\operatorname{conv}(V'_\sigma)$, которые лежат в B. Индуцируем топологию Вьеториса в $\operatorname{conv}(B)$ из $\operatorname{conv}(V'_\sigma)$. Аналогично рассмотрим $\operatorname{conv}(K)$ как совокупность выпуклых подкомпактов в K с индуцированной из $\exp(K)$ топологией Вьеториса. Очевидно, что $\operatorname{conv}(B)$ и $\operatorname{conv}(K)$ являются выпуклыми компактами. Локально выпуклые пространства, в которых они содержатся, несложно построить, следуя идеям А. Г. Пинскера (см., например, [16]). Аффинный гомеоморфизм h_B индуцирует аффинный гомеоморфизм $H_B : \operatorname{conv}(B) \to \operatorname{conv}(K)$, действующий для $C \in \operatorname{conv}(B)$ согласно формуле $H_B(C) = h_B(C)$. Непосредственно проверяется, что отображение H_B аффинно. Непрерывность H_B вытекает из формулы (5) и формулы

$$H_B^{-1} O\langle U_1, \dots, U_n\rangle = O\big\langle h_B^{-1} U_1, \dots, h_B^{-1} U_n\big\rangle.$$

Фиксируем далее сублинейный оператор $P : V \to C(X)$ и рассмотрим двойственное ему отображение $F_P : X \to \operatorname{conv}(V'_\sigma)$. В силу непрерывности P отображение F_P ограничено, т. е. значения $F_P(x)$ для всех $x \in X$ содержатся в некотором B, где $B \in \operatorname{conv}(V'_\sigma)$. Фиксируем в дальнейших рассуждениях этот выпуклый компакт и соответствующие ему отображения h_B и H_B, построенные выше.

Теперь изучим суперпозицию $F = H_B \circ F_P$. Так как значения $F_P(x)$ слабо компактны для всех точек $x \in X$, отображение F_P непрерывно в топологии Вьеториса в силу теоремы двойственности и, следовательно, отображение F непрерывно в топологии Вьеториса как суперпозиция непрерывных отображений. Далее замечаем, что значениями $F(x)$ для всех $x \in X$ являются непустые выпуклые компакты в ℓ^2. Подчеркнем, что ℓ^2 наделено топологией, определяемой нормой этого пространства. Используя еще раз совпадение топологий Хаусдорфа и Вьеториса на подпространствах, состоящих из компактных множеств, заключаем, что $F : X \to \operatorname{conv}(\ell_2)$ непрерывно в сильной топологии Хаусдорфа. Применяя теорему двойственности к отображению F, находим компактный сублинейный оператор $Q : \ell^2 \to C(X)$ по формуле (11), т. е., иными словами, $Q := \chi_{\ell^2}^{-1}(F)$. Здесь нижний индекс ℓ^2 у отображения χ подчеркивает, что оно действует на гильбертовом пространстве ℓ^2.

Рассмотрим субдифференциал ∂P сублинейного оператора P и компактный субдифференциал $\partial^c Q$ компактного сублинейного оператора Q и докажем, что оператор Q является искомым оператором. Таким образом, необходимо определить взаимно однозначное и взаимно непрерывное операторно-выпуклое отображение G субдифференциала ∂P на компактный субдифференциал $\partial^c Q$. Для этого введем множество L^B в пространстве линейных операторов

$$L^B := \{u \in L(V, C(X)) : \chi(u)(x) \in B \ (\forall x \in X)\}.$$

Это множество является субдифференциалом сублинейного оператора, действующего из V в $C(X)$ по формуле

$$v \mapsto \sup\{\langle v, v'\rangle : v' \in B\}1_X.$$

Заметим, что $\partial P \subseteq L^B$. Определим на L^B отображение g_B, действующее по формуле

$$g_B(u) := \chi_{\ell^2}^{-1}(h_B \circ \chi_V(u)) \quad (u \in L^B). \tag{16}$$

Формула (16) корректна. Суперпозиция $h_B \circ \chi_V(u)$ в силу свойств h_B и теоремы Гельфанда является непрерывным отображением X в ℓ^2. Поэтому, вновь применяя теорему Гельфанда, заключаем, что отображение g_B является вложением L^B в пространство компактных линейных операторов $L^c = L^c(\ell^2, C(X))$.

Обратное отображение g_B^{-1}, очевидно, определено на образе $g_B(L^B)$ формулой

$$g_B^{-1}(u_0) := \chi_V^{-1}\bigl(h_B^{-1} \circ \chi_{\ell^2}(u_0)\bigr) \quad (u_0 \in g_B(L^B)). \tag{17}$$

Заметим, что все отображения в (16) и (17) взаимно однозначны и непрерывны в соответствующих топологических пространствах.

Действительно, во-первых заметим, что сужение $\chi_V|_L$ на пространство $L := L(V, C(X))$ непрерывно отображает L в $C := C(X, V'_\sigma)$. Этот факт следует из теоремы Гельфанда, формулы (9), а также вида базисных окрестностей (2) и (8) соответственно пространства L в топологии простой сходимости и пространства $C(X, V'_\sigma)$ в топологии равномерной сходимости. По тем же соображениям непрерывно и сужение обратного отображения χ_V^{-1} на образе $\chi_V(C)$.

Во-вторых, отображения $f \mapsto h_B \circ f$ пространства $C(X, B)$ в $C(X, \ell^2)$ и $f \mapsto h_B^{-1} \circ f$ пространства $C(X, h_B(B))$ в $C(X, B)$, очевидно, непрерывны.

Осталось проверить, что g_B и g_B^{-1} сохраняют операторно выпуклые комбинации. Заметим сначала, что из формулы (9) и свойств канонических билинейных форм для всех $u_1, u_2 \in L^B$ и $f_1, f_2 \in C(X, B)$ следуют равенства

$$\chi(\lambda \circ u_1 + (I_{C(X)} - \lambda) \circ u_2) = \tilde\lambda\chi(u_1) + (1_X - \tilde\lambda)\chi(u_2), \tag{18}$$

$$\chi^{-1}(\tilde\lambda f_1 + (1_X - \tilde\lambda) f_2) = \lambda \circ \chi^{-1}(f_1) + (I_{C(X)} - \lambda) \circ \chi^{-1}(f_2), \tag{19}$$

где λ — мультипликатор, а $\tilde\lambda$ — соответствующая ему числовая функция.

Операторная аффинность отображения g_B вытекает теперь из следующей цепочки равенств, где $u_1, u_2 \in L^B$ и λ — мультипликатор:

$$\begin{aligned} g_B(\lambda \circ u_1 + (I_{C(X)} - \lambda) \circ u_2) &= \chi_{\ell^2}^{-1}(h_B \circ \chi_V(\lambda \circ u_1 + (I_{C(X)} - \lambda) \circ u_2) \\ = \chi_{\ell^2}^{-1}(h_B \circ (\tilde\lambda\chi_V(u_1) + (1_X - \tilde\lambda)\chi_V(u_2))) &= \chi_{\ell^2}^{-1}(\tilde\lambda(h_B \circ \chi_V(u_1)) + (1_X - \tilde\lambda) h_B \circ \chi_V(u_2)) \\ = \lambda \circ \chi_{\ell^2}^{-1}(h_B \circ \chi_V(u_1)) &+ (I_{C(X)} - \lambda) \circ \chi_{\ell^2}^{-1}(h_B \circ \chi_V(u_2)) \\ &= \lambda \circ g_B(u_1) + (I_{C(X)} - \lambda) \circ g_B(u_2). \end{aligned}$$

Аналогично проверяем операторную аффинность g_B^{-1}.

Определим отображение G субдифференциала ∂P на компактный субдифференциал $\partial^c Q$ как сужение g_B на ∂P, т. е.

$$G := g_B|_{\partial P}. \tag{20}$$

Из отмеченных выше свойств отображения g_B, а также формул (14) и (15) вытекает, что отображение G отображает субдифференциал ∂P на компактный субдифференциал $\partial^c Q$ взаимно однозначно и взаимно непрерывно. Из операторной выпуклости g_B и g_B^{-1} следует операторная выпуклость G и G^{-1}. Теорема 1 доказана.

Замечание. Если V — сепарабельное нормированное пространство, то в доказательстве теоремы 1 вместо выпуклого компакта B можно взять любой шар B^r в сопряженном пространстве V'_σ с центром в нуле и радиуса r, если $r \geq \|P\|$.

4. Вокруг основного результата

Доказательство теоремы 1 подсказывает, как можно находить вложения субдифференциалов сублинейных операторов в универсальное пространство, чтобы сохранить некоторые операции над субдифференциалами и сублинейными операторами.

Рассмотрим $C(X)$ как банахову алгебру со стандартным поточечным умножением функций и ее естественное вложение $C(X) \hookrightarrow L(C(X), C(X))$, при котором функции $\lambda \in C(X)$ соответствует линейный непрерывный оператор $f \mapsto \lambda \cdot f$. Отождествляем далее функции из $C(X)$ и соответствующие им операторы. Если λ — неотрицательная функция из $C(X)$, то ей соответствует положительный линейный оператор. Если функция λ из $C(X)$ удовлетворяет неравенствам $0 \leq \lambda(x) \leq 1$ для всех $x \in X$, то соответствующий ей оператор, напомним, называется *мультипликатором.*

Пусть λ — неотрицательная функция из $C(X)$. Условимся символом λP обозначать суперпозицию положительного линейного оператора, который соответствует функции λ, с непрерывным сублинейным оператором $P : V \to C(X)$. Очевидно, что λP является непрерывным сублинейным оператором.

Из формул (14) и (15) следует, что $\partial(\lambda P) = \lambda \partial P$.

Допустим, что задано конечное множество сублинейных операторов $P_i : V \to C(X)$ и неотрицательных функций λ_i из $C(X)$, где $1 \leq i \leq n$. Тогда $P := \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i P_i$, очевидно, является непрерывным сублинейным оператором. Можно ли указать вложение в универсальное пространство, определенное на всех субдифференциалах указанных сублинейных операторов, их произведениях на неотрицательные функции и их сумме, сохраняющее операции над сублинейными операторами и субдифференциалами? Положительный ответ дает следующая

Теорема 2. *Фиксируем ЛВП V и компакт X. Пусть $P := \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i P_i$ — непрерывный сублинейный оператор, где λ_i — неотрицательные функции из $C(X)$ и $P_i : V \to C(X)$ — непрерывные сублинейные операторы. Тогда существует операторно-аффинное вложение φ множества*

$$\partial P \cup \partial P_1 \cup \partial P_2 \ldots \cup \partial P_n \cup \partial(\lambda_1 P_1) \cup \partial(\lambda_2 P_2) \ldots \cup \partial(\lambda_n P_n) \tag{21}$$

в универсальное пространство $L^c(\ell^2, C(X))$ такое, что

$$\varphi(\partial P) = \partial^c Q, \quad \varphi(\partial P_i) = \partial^c Q_i \quad (1 \leq i \leq n)$$

для некоторых компактных сублинейных операторов

$$Q : \ell^2 \to C(X), \quad Q_i : \ell_2 \to C(X) \quad (1 \leq i \leq n).$$

Кроме того, верны следующие формулы:

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i Q_i; \quad \varphi(\partial P) = \varphi\left(\partial\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i\right)\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi(\partial P_i). \tag{22}$$

Доказательство. Не умаляя общности, можно считать, что множество B, фигурирующее в определении ограниченности отображения $F : X \to \mathrm{conv}(V'_\sigma)$, уравновешенное, т. е. вместе с точкой b содержит и противоположную точку $-b$. Действительно, замкнутая выпуклая и уравновешенная оболочка любого множества $B \in \mathrm{conv}(V'_\sigma)$ лежит в этом же множестве. Отметим также, что уравновешенное множество B всегда содержит нулевой элемент пространства.

Пусть далее уравновешенное множество B_i из $\mathrm{conv}(V'_\sigma)$ выбрано таким, что $F_{P_i}(x) \subseteq B_i$ для всех $1 \le i \le n$ и $x \in X$. Существование таких B_i обеспечивает теорема двойственности. Тогда множество B из $\mathrm{conv}(V'_\sigma)$:

$$B := \sum_{i=1}^{n} (1 + \|\lambda_i\|_{C(X)}) B_i,$$

уравновешенное и содержит все $F_{P_i}(x)$, $F_P(x)$, $F_{\lambda_i P_i}(x)$ для $1 \le i \le n$ и $x \in X$. При этом множество L^B содержит все множества, входящие в (21). Для завершения доказательства теоремы теперь достаточно в качестве φ взять сужение построенного в доказательстве теоремы 1 отображения g_B на множества, входящие в объединение множеств (21). Формула (22) следует из формул (13) и (16). Теорема 2 доказана.

Пусть задано семейство $\mathscr{P}$ непрерывных сублинейных операторов $P : V \to C(X)$. Назовем это семейство *ограниченным*, если найдется такое множество $B_0 \in \mathrm{conv}(V'_\sigma)$, что $F_P(x) \subseteq B_0$ для всех $P \in \mathscr{P}$ и $x \in X$. Зададим также ограниченное (по норме) семейство Λ неотрицательных функций λ из $C(X)$, т. е. для всех $\lambda \in \Lambda$ выполнено неравенство $0 \le \|\lambda\|_{C(X)} \le d$ для некоторого числа d. Можно ли указать вложение φ, «обслуживающее» субдифференциалы ∂P и $\partial(\lambda P)$ всех сублинейных операторов P и λP, где λ и P выбраны из указанных выше ограниченных семейств? Положительный ответ на этот вопрос дает

Теорема 3. *Фиксируем* ЛВП V *и компакт* X. *Для любого ограниченного семейства* $\mathscr{P}$ *сублинейных операторов* $P : V \to C(X)$ *и ограниченного семейства* Λ *неотрицательных функций* λ *из* $C(X)$ *можно выбрать операторно-аффинное вложение* φ *в универсальное пространство* $L^c(\ell^2, C(X))$, *определенное на множестве, содержащем объединение всех множеств*

$$\partial P \cup \partial(\lambda P) : \lambda \in \Lambda, \quad P \in \mathscr{P}.$$

При этом сужение φ *на каждый субдифференциал является вложением в универсальное пространство* $L^c(\ell^2, C(X))$, *причем таким, что*

$$\varphi(\partial P) = \partial^c Q_P; \quad \varphi(\partial(\lambda P)) = \lambda \partial^c Q_P \quad (\lambda \in \Lambda,\ P \in \mathscr{P})$$

для компактных сублинейных операторов $Q_P : \ell^2 \to C(X)$, *выбор которых зависит от* $P \in \mathscr{P}$ *и не зависит от* $\lambda \in \Lambda$.

Доказательство. Фиксируем множество $B_0 \in \mathrm{conv}(V'_\sigma)$, для которого $F_P(x) \subseteq B_0$ для всех $P \in \mathscr{P}$ и $x \in X$. Существование этого множества гарантирует ограниченность семейства $\mathscr{P}$. Не умаляя общности, считаем множество B_0 уравновешенным. Рассмотрим далее множество $B := (1 + d)B_0$, где число d —

любая верхняя граница для норм ограниченного семейства Λ. Множество L^B, которое построено в доказательстве теоремы 1, содержит субдифференциалы P и λP для указанных семейств $\lambda \in \Lambda$ и $P \in \mathscr{P}$. Достаточно в качестве φ взять сужение построенного в доказательстве теоремы 1 отображения g_B на объединение множества всех субдифференциалов исследуемого семейства сублинейных операторов. Теорема 3 доказана.

Для каждого множества $B \in \mathrm{conv}(V'_\sigma)$ в пространстве сублинейных операторов $\mathfrak{R}(V, C(X))$ рассмотрим подпространство $\mathfrak{R}_B$, состоящее из операторов P, для которых $F_P(x) \subseteq B$. В теореме 1 построено отображение $\gamma : P \mapsto Q$ подпространства $\mathfrak{R}_B$ в пространство компактных сублинейных операторов $\mathfrak{R}^c(\ell^2, C(X))$. Свойства этого отображения отражает

Теорема 4. *Если V — бочечное* ЛВП *и X — компакт, то отображение γ подпространства $\mathfrak{R}_B$ в пространство компактных сублинейных операторов $\mathfrak{R}^c(\ell^2, C(X))$ является гомеоморфным вложением.*

Доказательство. В новых обозначениях формулы из доказательства теоремы 1 принимают вид

$$\gamma(P) := \chi_{\ell^2}^{-1}(H_B \circ \chi_V(P)) \quad (P \in \mathfrak{R}_B).$$

Так как пространство V бочечно, отображения χ_V и $\chi_{\ell_2}^{-1}$ непрерывны [11], если в пространствах множеств рассматривается топология Хаусдорфа. Поскольку пространства значений всех многозначных отображений состоят из компактов в соответствующих пространствах множеств, можно вместо топологии Хаусдорфа рассматривать топологию Веториса. Для доказательства непрерывности γ достаточно заметить, что операция суперпозиции с H_B непрерывно переводит пространство $C(X, \mathrm{conv}(B))$ в пространство $C\big(X, \mathrm{conv}\big(\ell^2_\beta\big)\big)$, где B — множество из $\mathrm{conv}(V'_\sigma)$, фигурирующее в определении ограниченности отображения F_P. Непрерывность отображения γ^{-1} доказывается так же, если заметить, что

$$\gamma^{-1}(Q) := \chi_V^{-1}\big(H_B^{-1} \circ \chi_{\ell^2}(Q)\big) \quad (Q \in \gamma(\mathfrak{R}_B)).$$

Теорема 4 доказана.

Для формулировки следующий теоремы потребуется определение, которое уточняет термин универсального пространства для субдифференциалов, который фактически введен в формулировке теоремы 1.

Определение. Пусть $\mathscr{R}$— некоторое семейство непрерывных сублинейных операторов. Пространство $E := L^c(W, C(T))$, где W — банахово пространство, а T — компакт, назовем *универсальным пространством* для семейства субдифференциалов ∂R, где $R \in \mathscr{R}$, если ∂R операторно-аффинно гомеоморфно операторно-выпуклому замкнутому подмножеству из E.

Это определение универсальности согласуется с обычной трактовкой, когда некоторый класс или семейство топологических пространств гомеоморфно вкладывается в универсальное пространство, но несколько отличается от понятия универсального пространства, используемого в теореме 1.

Теорема 5. *Пространство $E := L^c(\ell^2, C([0,1]))$ является универсальным для семейства субдифференциалов всех непрерывных сублинейных операторов $R : V \to C(X)$, где V —* ЛВП, *а X — метризуемый компакт.*

Доказательство. Согласно теореме М. Г. Крейна и С. Г. Крейна, дополняющей теорему Банаха — Мазура, для любого сепарабельного банахова пространства Y, полуупорядоченного нормальным и замкнутым конусом положительных элементов Y_+, существует взаимно однозначное линейное и непрерывное отображение e пространства Y на подпространство пространства $C([0,1])$, при котором элементы из Y_+ и только они переходят в неотрицательные функции [17]. Банахово пространство $C(X)$, как известно, сепарабельно тогда и только тогда, когда компакт X метризуем. Конус положительных элементов в $C(X)$ нормален. Напомним, что конус K в банаховом пространстве Y называется *нормальным*, если существует такое число $\delta > 0$, что для любых $y_1, y_2 \in K$, $\|y_1\| = \|y_2\| = 1$, выполняется неравенство $y_1 + y_2 \geq \delta$ [18].

Далее через e обозначим взаимно однозначное линейное и непрерывное отображение пространства $C(X)$ на подпространство пространства $C([0,1])$, при котором элементы из $C(X)_+$ и только они переходят в неотрицательные функции. Возьмем непрерывный сублинейный оператор $R : V \to C(X)$ и рассмотрим суперпозицию $P := e \circ R$, которая является непрерывным сублинейным оператором, действующим из V в $C([0,1])$, так как оператор e положителен. Субдифференцируем P по подпространству $e(V)$, т. е. включаем в субдифференциал только операторы, действующие в $e(V)$, и обозначим его символом $\partial_{e(V)}P$, чтобы отличать от ∂P. Очевидны следующие равенства:

$$\partial_{e(V)}P = \{e \circ w : w \in \partial R\}; \quad \partial R = \{e^{-1} \circ u : u \in \partial_{e(V)}P\},$$

из которых следует, что отображение $\widetilde{G} : w \longmapsto g \circ w$ пространства $L(V, C(X))$ в пространство $L(V, C([0,1]))$ осуществляет операторно-аффинный гомеоморфизм субдифференциала ∂R на субдифференциал $\partial_{e(V)}P$. Теперь заметим, что субдифференциал $\partial_{e(V)}P$ содержится в ∂P как операторно-выпуклое и замкнутое подмножество. Применим теорему 1 для $X := [0,1]$ и для оператора P найдем компактный сублинейный оператор Q и операторно-аффинный гомеоморфизм G. Суперпозиция $\widetilde{G} \circ G$ осуществляет искомый операторно-аффинный гомеоморфизм ∂R на операторно-выпуклую и замкнутую часть из $\partial^c Q$. Теорема доказана.

В теореме 1 универсальность $L^c(\ell^2, C(X))$ относительно операторно-аффинных вложений доказана с помощью аффинных гомеоморфизмов Кли. В следующей теореме обосновано, что существование аффинных гомеоморфизмов Кли является необходимым условием универсальности.

Теорема 6. *Относительно любого компакта X рассмотрим класс непрерывных сублинейных операторов $P : V \to C(X)$, где V — ЛВП. Тогда следующие условия равносильны.*

(1) *Для любого компакта X пространство $L^c(\ell^2, C(X))$ в топологии простой сходимости универсально в смысле теоремы 1, т. е. среди прочего вложения субдифференциалов рассматриваемого класса сублинейных операторов операторно-аффинны.*

(2) *То же, что и в п. 1, но для аффинных вложений.*

(3) *То же, что и п. 2, но для одноточечных компактов X.*

(4) *Существует аффинный гомеоморфизм Кли $h : B \to K$ для каждого выпуклого замкнутого равностепенно непрерывного множества $B \in \operatorname{conv}(V'_\sigma)$, где K — выпуклый компакт в ℓ^2, а V — ЛВП.*

Доказательство. Импликации (1) $\Rightarrow$ (2) и (2) $\Rightarrow$ (3) очевидны. Импликация (4) $\Rightarrow$ (1) доказана в теореме 1. Для доказательства импликации

(3) $\Rightarrow$ (4) заметим, что для одноточечных компактов X рассматриваемый класс сублинейных операторов состоит из непрерывных сублинейных функционалов $p : V \to \mathbb{R}$. В силу теоремы Хермандера [8] их субдифференциалы исчерпываются $\mathrm{conv}(V'_\sigma)$. Теорема доказана.

Автор признателен рецензенту за более точные формулировки теорем 2–5.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Урысон П. С.* Гильбертово пространство как прообраз метрических пространств // П. С. Урысон. Труды по топологии и другим областям математики. М.; Л.: ГИТТЛ, 1951. Т. I. С. 147–150.
2. *Урысон П. С.* Об универсальном метрическом пространстве // П. С. Урысон. Труды по топологии и другим областям математики. М.; Л: ГИТТЛ, 1951. Т. II. С. 747–777.
3. *Banach S., Mazur S.* Zur Theorie der linear Dimension // Studia Math. 1933. V. 4. P. 110–112.
4. *Линке Ю. Э.* Об опорных множествах сублинейных операторов // Докл. АН СССР. 1972. Т. 207, № 3. С. 531–533.
5. *Линке Ю. Э., Толстоногов А. А.* Представление сублинейных операторов многозначными отображениями // Докл. АН СССР. 1977. Т. 234, № 2. С. 294–297.
6. *Линке Ю. Э.* Сублинейные операторы со значениями в пространствах непрерывных функций // Докл. АН СССР. 1976. Т. 228, № 3. С. 540–542.
7. *Бурбаки Н.* Топологические векторные пространства. М.: Изд-во иностр. лит., 1959.
8. *Hörmander L.* Sur la fonction d'appui des ensembles convexes dans une espace lokalement convexe // Arkiv Math. 1955. V. 3, N 2. P. 181–186.
9. *Энгелькинг Р.* Общая топология. М.: Мир, 1986.
10. *Бурбаки Н.* Общая топология, основные структуры. М.: Наука, 1968.
11. *Линке Ю. Э., Толстоногов А. А.* Свойства пространств сублинейных операторов // Сиб. мат. журн. 1979. Т. 20, № 4. С. 792–806.
12. *Klee V. L.* Some topological properties of convex sets // Trans. Amer. Math. Soc. 1955. V. 78, N 1. P. 30–45.
13. *Bessaga Cz., Pełczyński A.* Selected topics in infinite-dimensional topology. Warszawa: PWN MM, 1975. V. 58.
14. *Гельфанд И. М.* Abstrakte Funktionen und lineare Operatoren // Мат. сб. 1938. Т. 4, № 2. С. 235–286.
15. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Общая теория. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
16. *Bazylevych L., Repovš D., Zarichnyi M.* Hyperspace of convex compacta of nonmetrizable compact convex subspaces of locally convex spaces // Topology Appl. 2008. V. 155, N 8. P. 764–722.
17. *Крейн М. Г., Крейн С. Г.* Sur l'espace des fonctions continues définies sur un bicompact de Hausdorff et ses sousespaces semiordonnés // Мат. сб. 1943. Т. 13, № 1. С. 3–38.
18. *Функциональный анализ* / под ред. С. Г. Крейна М.: Наука, 1972. (Справочная математическая библиотека).

Статья поступила 16 декабря 2008 г.

Линке Юрий Эрниевич
Институт динамики систем и теории управления СО РАН,
ул. Лермонтова, 134, Иркутск 664033
linke@icc.ru