Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2011. Том 52, № 3

УДК 517.95

СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЙ РЕЗОНАНСНЫХ КРАЕВЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ С РАЗРЫВНЫМИ НЕОГРАНИЧЕННЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

М. Г. Лепчинский

Аннотация. Рассматривается ситуация, когда резонансная эллиптическая краевая задача с разрывной неограниченной нелинейностью является идеализацией распределенной системы с непрерывными по фазовой переменной нелинейностями, имеющими узкие участки в области изменения фазовой переменной, где отследить изменения нелинейных параметров невозможно. Изучается вопрос о существовании решений подобных задач.

Ключевые слова: резонансная эллиптическая задача, разрывные нелинейности, подлинейный рост, условия Ландесмана — Лазера, вариационный метод.

Введение

Решение любой физической задачи начинается с построения математической модели предметной области. Числовые характеристики, определяющие модель, находятся посредством анализа результатов замеров или экспериментов. Сама процедура составления и проведения этих измерений опосредована теориями и приборами, которые описывают физическую реальность лишь с некоторой долей правдоподобия. Таким образом, имеется целое множество моментов, накладывающих отпечаток неточности в получаемой модели. Это только одна сторона.

Другая сторона заключается в том, что элемент неточности сознательно закладывается в модель, чаще всего с целью ее упрощения.

Многие задачи теории управления, механики и математической физики в своих математических моделях содержат разрывные нелинейности. Например, такие нелинейности могут возникать как идеализация непрерывных процессов, в которых наблюдаются короткие промежутки с резким изменением тех или иных параметров. Так как структуру такого изменения отследить довольно сложно, в уравнениях просто считают, что некоторая функция имеет разрыв, и решают задачу в таком предположении.

В данной работе изучаются краевые эллиптические задачи, содержащие нелинейные слагаемые, разрывно зависящие от фазовой переменной.

Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) с границей $\partial\Omega$ класса $C^{2,\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$,

$$Lu(x) \equiv -\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}u_{x_i})_{x_j} + c(x)u(x)$$

— равномерно эллиптический формально сопряженный дифференциальный оператор с коэффициентами $a_{ij} \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$ на $\overline{\Omega}$, $c \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$.

Рассматривается нелинейная краевая задача

$$Lu(x) + g_0(x, u(x)) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

$$Bu|_{\partial\Omega} = f, \tag{2}$$

где (2) — одно из следующих основных краевых условий:

• условие Дирихле, если $Bu = u$;

• условие Неймана, если

$$Bu = \frac{\partial u}{\partial n_L} \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_i} \cos(n, x_j),$$

где $\cos(n, x_j)$ — направляющие косинусы внешней нормали n к границе $\partial\Omega$;

• третье краевое условие, если

$$Bu = \frac{\partial u}{\partial n_L} + \sigma(x) u(x),$$

где функция $\sigma \in C^{1,\alpha}(\Gamma)$ неотрицательна на $\partial\Omega$ и не равна тождественно нулю.

Будем предполагать, что нелинейность $g_0(x, u)$ удовлетворяет условию $(*)$:

$(*1)$ функция $g_0 : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ борелева $(\operatorname{mod} 0)$ [1], что означает существование множества $l \subset \Omega \times \mathbb{R}$, проекция которого на Ω имеет меру нуль, и борелевой на $\Omega \times \mathbb{R}$ функции, совпадающей с $g_0(x, u)$ на $(\Omega \times \mathbb{R}) \setminus l$;

$(*2)$ для почти всех $x \in \Omega$ сечение $g_0(x, \cdot)$ имеет на $\mathbb{R}$ разрывы только первого рода и для произвольного $u \in \mathbb{R}$ верно включение $g_0(x, u) \in [g_-(x, u), g_+(x, u)]$, $g_-(x, u) = \liminf\limits_{s \to u} g_0(x, s)$, $g_+(x, u) = \limsup\limits_{s \to u} g_0(x, s)$;

$(*3)$ существуют постоянная $b \geq 0$ и функция $a \in L_q(\Omega)$, $q \geq 2$, такие, что для почти всех $x \in \Omega$ верно неравенство

$$g_0(x, u)| \leq b|u|^r + a(x) \quad \forall u \in \mathbb{R},\ 0 \leq r,\ 0 < r < \frac{n+2}{n-2}.$$

Предполагается, что функция $f(s)$, определенная на границе $\partial\Omega$, лежит в пространстве Бесова $B_q^{2-1/q}(\partial\Omega)$, если рассматриваем краевую задачу Дирихле; $B_q^{1-1/q}(\partial\Omega)$, если рассматриваем краевую задачу Неймана или третью краевую задачу.

Обобщенным решением задачи (1), (2) будем называть функцию $u \in W_q^2(\Omega)$, удовлетворяющую граничному условию (2) и для почти всех $x \in \Omega$ включению

$$-Lu(x) \in [g_-(x, u(x)), g_+(x, u(x))].$$

Сильным решением задачи (1), (2) называется обобщенное решение, удовлетворяющее для почти всех $x \in \Omega$ уравнению (1). Сильное решение u задачи (1), (2) называют *полуправильным*, если для почти всех $x \in \Omega$ значение $u(x)$ является точкой непрерывности $g_0(x, \cdot)$.

К задачам, допускающим постановку в таком виде, относится известная модель отрывных течений несжимаемой жидкости, предложенная М. А. Гольдштиком [2]. В работах [3, 4] рассматривалась задача Дирихле с нулевым граничным условием и с положительной разрывной нелинейностью, к которой сводилась задача о нагреве проводника при постоянном напряжении и постоянной температуре на поверхности проводника в случае, когда электропроводность материала при переходе через определенные температуры меняется скачком. В работе [5] Френкель и Берже описали математическую модель вихревых колец в идеальной жидкости, также имеющую вид (1), (2).

Данная работа посвящена теоремам существования полуправильных решений для резонансных эллиптических задач с разрывной нелинейностью. Под такими задачами понимаем следующее:

• $\lambda_1 = 0$ является наименьшим собственным значением оператора L, соответствующим граничному условию (2) с $f \equiv 0$;

• параметр r из условия $(*3)$ удовлетворяет неравенству $0 \le r < 1$ (в этом случае будем говорить, что нелинейность g_0 имеет *подлинейный рост*).

Далее через $N(L)$ будем обозначать ядро оператора L, т. е. множество решений однородной краевой задачи

$$Lu(x) = 0,\ x \in \Omega, \quad Bu|_{\partial\Omega} = 0.$$

Систематическое изучение резонансных краевых задач началось с основополагающей работы Ландесмана и Лазера [6], где предполагалось, что нелинейность $g_0(x,u) \equiv g(u)$ непрерывна на $\mathbb{R}$, существуют $\lim\limits_{u\to\pm\infty} g(u) = g_\pm$ и $g_- < g(u) < g_+$ для любых $u \in \mathbb{R}$, а размерность ядра $N(L)$ равна единице. При таких допущениях было доказано, что решение задачи (1), (2) с нулевым граничным условием ($f \equiv 0$) существует тогда и только тогда, когда верно неравенство

$$g_+ \int\limits_{\psi<0} \psi(x)\,dx + g_- \int\limits_{\psi>0} \psi(x)\,dx < 0 < g_+ \int\limits_{\psi>0} \psi(x)\,dx + g_- \int\limits_{\psi<0} \psi(x)\,dx,$$

где ψ — базисная функция $N(L)$.

В дальнейшем было придумано множество подобных условий, которые теперь носят название *условия типа Ландесмана — Лазера.*

Например, в [7] указан следующий критерий существования решения. Пусть нелинейность $g(x,u)$ ограничена,

$$g_+(x) = \liminf_{s\to+\infty} g(x,s), \quad g^-(x) = \limsup_{s\to-\infty} g(x,s).$$

Тогда выполнение следующего неравенства для любой ненулевой функции $\psi(x)$ из ядра $N(L)$:

$$0 < \int\limits_{\psi>0} g_+(x)\psi(x)\,dx + \int\limits_{\psi<0} g^-(x)\psi(x)\,dx, \tag{3}$$

гарантирует существование решения краевой задачи (1), (2). Покажем, что это соотношение является следствием условия из предложения 1.1 при $r = 0$. Это означает, что в данной работе требуем выполнения более слабых ограничений на нелинейность, которые гарантируют существование решений.

В работе [8] на основе понятия обобщенного градиента Кларка для локально липшицевых функций и обобщения для них условия Пале — Смейла (PS-условия) и деформационной леммы развит вариационный подход применительно к краевым задачам для уравнения эллиптического типа с разрывными нелинейностями. В частности, там доказана теорема о существовании $u \in W_2^{2m}(\Omega) \cap W_2^{m,0}(\Omega)$, удовлетворяющей включению

$$-Au(x) \in [g_-(x,u), g_+(x,u)]$$

для почти всех $x \in \Omega$, где A — формально самосопряженный равномерно эллиптический линейный дифференциальный оператор порядка $2m$ с достаточно гладкими коэффициентами, функция $g_0(x,s)$ суперпозиционно измеримая и ограниченная на $\Omega \times \mathbb{R}$ и для нее выполнено условие

$$\lim_{\substack{u \in N(A),\\ \|u\| \to \infty}} \int\limits_{\Omega} dx \int\limits_{0}^{u(x)} g_0(x,s)\,ds = \pm\infty,$$

$N(A)$ — множество решений $Au(x) = 0$, удовлетворяющих нулевым граничным условиям Дирихле.

Основным результатом данной работы является теорема о существовании полуправильного решения для задачи (1), (2) с неограниченной нелинейностью, имеющей подлинейный рост. Условие, которое предлагаем в качестве обобщения условий типа Ландесмана — Лазера для неограниченных нелинейностей, имеет вид

$$\lim_{\substack{\|\psi\| \to \infty,\\ \psi(x) \in N(L)}} \frac{1}{\|\psi\|^{2r}} \int\limits_{\Omega} dx \int\limits_{0}^{\psi(x)} g_0(x,s)\,ds = +\infty, \tag{4}$$

где параметр r — скорость роста нелинейности g_0 из условия $(*3)$. Заметим, что при $r = 0$ получится условие, предложенное в [8], которое является наиболее общим из рассматриваемого класса условий типа Ландесмана — Лазера.

Также рассмотрены неоднородные задачи и приведены достаточные легко проверяемые условия для проверки соотношения (4).

1. Формулировка основных результатов

Далее будем предполагать, что для исходной краевой задачи выполнено одно из двух следующих условий.

Определение 1.1. Говорят, что для уравнения (1) *выполнено* А-*условие*, если найдется не более чем счетное семейство поверхностей

$$\{S_i,\ i \in I\}, \quad S_i = \{(x,u) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid u = \varphi_i(x),\ x \in \Omega\}, \quad \varphi_i \in W^2_{1,\mathrm{loc}}(\Omega),$$

таких, что для почти всех $x \in \Omega$ неравенство $g_0(x,u-) < g_0(x,u+)$ влечет существование $i \in I$, для которого $u = \varphi_i(x)$ и

$$0 \notin [L\varphi_i(x) + g_0(x,\varphi_i(x)-),\ L\varphi_i(x) + g_0(x,\varphi_i(x)+)].$$

Определение 1.2. Говорят, что для уравнения (1) *выполнено* А1-*условие*, если найдется не более чем счетное семейство поверхностей

$$\{S_i,\ i \in I\}, \quad S_i = \{(x,u) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid u = \varphi_i(x),\ x \in \Omega\}, \quad \varphi_i \in W^2_{1,\mathrm{loc}}(\Omega),$$

таких, что для почти всех $x \in \Omega$ неравенство $g_0(x,u-) < g_0(x,u+)$ влечет существование $i \in I$, для которого $u = \varphi_i(x)$ и либо

$$0 \notin [L\varphi_i(x) + g_0(x,\varphi_i(x)-),\ L\varphi_i(x) + g_0(x,\varphi_i(x)+)],$$

либо

$$L\varphi_i(x) + g(x,\varphi_i(x)) = 0.$$

А-условие запрещает при почти всех x «выход» решения $u(x)$ краевой задачи на поверхности разрывов нелинейности g_0 в точках так называемых «прыгающих» разрывов по фазовой переменной (т. е. точках, для которых $g_0(x,u-) < g_0(x,u+)$).

В свою очередь, А1-условие позволяет решению находиться на поверхности разрыва на множестве ненулевой меры, однако в этом случае уравнение поверхности разрыва должно удовлетворять исходному эллиптическому уравнению.

Замечание 1.1. В ситуации, когда разрывы нелинейности «падающие» (т. е. для любого $u \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство $g_0(x,u-) \geq g_0(x,u+)$), А- и А1-условия автоматически выполняются.

Рассмотрим описанную выше нелинейную краевую эллиптическую задачу. Свяжем с оператором L оператор $\mathscr{L}$, определенный на пространстве $H_0^1(\Omega)$ в случае граничного условия Дирихле и на $H^1(\Omega)$ в случае граничного условия Неймана или третьего краевого условия.

Везде в дальнейшем будем обозначать через X то пространство, на котором определен оператор $\mathscr{L}$.

Сам оператор $\mathscr{L}$ определяется равенством: для любых u и v из X

$$(\mathscr{L}u,v) = \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Omega} a_{ij}(x)u_{x_i}v_{x_j}\,dx + \int\limits_{\Omega} c(x)u(x)v(x)\,dx + \int\limits_{\Gamma} \sigma(s)u(s)v(s)\,ds,$$

где $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в X, а $\sigma(x) \equiv 0$ для граничных условий Дирихле и Неймана.

Сопоставим краевой задаче (1), (2) вариационный функционал

$$J_{g_0}(u) = \frac{1}{2}(\mathscr{L}u,u) + \int\limits_{\Omega} dx \int\limits_{0}^{u(x)} g_0(x,s)\,ds.$$

Перейдем к формулировкам утверждений, которые будут доказаны в данной работе.

Теорема 1.1. *Предположим, что*

1) *функция $g_0(x,u)$ в уравнении (1) удовлетворяет условию $(*)$ с параметром $r < \frac{n+2}{n-2}$ (для $n = 2$ подразумеваем, что r — произвольное конечное положительное число);*

2) *$u_0(x)$ — точка локального минимума функционала $J_{g_0}(u)$ на X;*

3) *функция f тождественно нулевая.*

Тогда $u_0(x)$ принадлежит $W_q^2(\Omega)$, удовлетворяет (2) и для почти всех $x \in \Omega$ имеет место включение

$$0 \in [Lu(x) + g_-(x,u(x)), Lu(x) + g_+(x,u(x))].$$

Если дополнительно для уравнение (1) выполнено А-условие, то $u_0(x)$ — полуправильное решение задачи (1), (2).

Основным результатом данной работы о существовании решений резонансных краевых задач является

Теорема 1.2. *Пусть выполняются следующие условия:*

1) *оператор $\mathscr{L}$ неотрицательно определенный, т. е. $(\mathscr{L}u,u) \geq 0$ для любого $u \in X$;*

2) *нелинейность* g_0 *удовлетворяет условию* $(*)$ *с параметром* $0 \le r < 1$*;*

3) *выполняется соотношение* (4).

Тогда если $f \equiv 0$, *то существует* $u_0 \in X$ *такое, что*

$$J_{g_0}(u_0) = \inf_{u \in X} J_{g_0}(u),$$

причем любое такое u *принадлежит пространству* $W_q^2(\Omega)$, *удовлетворяет включению*

$$0 \in [Lu(x) + g_-(x, u(x)), Lu(x) + g_+(x, u(x))]$$

и граничному условию (2) (*т. е. является обобщенным решением* (1), (2)).

Кроме того, если выполнено A*-условие* (A1*-условие*), *то такое* u_0 *является полуправильным* (*сильным*) *решением задачи* (1), (2).

Замечание 1.2. Условие 3 в теореме 1.2 напрямую обобщает соответствующее условие 4 теоремы 1.3 из [9] на случай неограниченных нелинейностей с подлинейным ростом. Отметим, что в [9] нелинейность $g_0(x, u)$ ограниченная.

Теперь сформулируем аналогичный результат, касающийся задач с ненулевыми граничными условиями.

Теорема 1.3. *Пусть выполняются следующие условия:*

1) *оператор* $\mathscr{L}$ *неотрицательно определенный, т. е.* $(\mathscr{L}u, u) \ge 0$ *для любого* $u \in X$*;*

2) *нелинейность* g_0 *удовлетворяет условию* $(*)$ *с параметром* $\frac{1}{2} \le r < 1$*;*

3) *выполняется соотношение* (4).

Тогда для любого $f \in B_q^{1-1/q}(\partial\Omega)$ (*для краевого условия Неймана и третьего краевого условия* $f \in B_q^{2-1/q}(\partial\Omega)$) *краевая задача* (1), (2) *имеет по крайней мере одно обобщенное решение* $u_0 \in W_q^2(\Omega)$.

Кроме того, если все разрывы нелинейности g_0 *падающие* (*см. замечание* 1.1), *то у краевой задачи* (1), (2) *найдется полуправильное решение* $u_0 \in W_q^2(\Omega)$.

Замечание 1.3. В непрерывном случае, т. е. когда нелинейность g_0 каратеодориева (что является предметом обсуждения во многих работах), немедленно получаем теорему о существовании сильного решения.

При использовании сформулированных теорем в какой-то конкретной ситуации возникает естественный вопрос о том, как проверить условие 3 этих теорем. Мы приведем результат, позволяющий сделать это для достаточно широкого класса нелинейностей.

Пусть для нелинейности g_0 выполняется условие $(*)$. Определим функции

$$G_\pm(x) = \liminf_{t \to \pm\infty} \frac{1}{|t|^{r+1}} \int_0^t g_0(x, s)\, ds.$$

Заметим, что для п. в. $x \in \Omega$ выполняются соотношения:

$$|G_+(x)| \le b, \quad |G_-(x)| \le b, \quad \text{если } r > 0;$$

$$|G_+(x)| \le b + a(x), \quad |G_-(x)| \le b + a(x), \quad \text{если } r = 0.$$

Поэтому заведомо функции G_+ и G_- ограничены на Ω некоторой суммируемой со степенью q функцией. Более того, функции G_+ и G_- измеримы на Ω. Действительно, рассмотрим функцию

$$G(x, t) = \frac{1}{t^{r+1}} \int_0^t g_0(x, s)\, ds.$$

Она непрерывна по t (при $t > 0$) и измерима по x на Ω. В частности, измеримы все функции $G(x,q)$, $q \in \mathbb{Q}$, и для любого $t_0 > 0$ выполняется равенство

$$\inf_{t \geq t_0} G(x,t) = \inf_{q \geq t_0,\, q \in \mathbb{Q}} G(x,q) \equiv G_{t_0}(x).$$

Это означает, что $G_{t_0}(x)$ — измеримая функция, так как инфимум счетного числа измеримых функций измерим. Далее, поскольку

$$G_+(x) = \lim_{n \to +\infty} G_n(x),$$

функция $G_+(x)$ измерима как поточечный предел измеримых функций. Аналогично доказывается измеримость функции $G_-(x)$.

Таким образом, G_+ и G_- измеримы и ограничены суммируемой со степенью q функцией, поэтому по теореме Лебега это функции из пространства $L_q(\Omega)$. Этот факт необходим нам, чтобы корректно сформулировать следующий результат.

Предложение 1.1. *Пусть для каждой ненулевой функции $\varphi \in N(L)$ выполняется неравенство*

$$0 < \int\limits_{\varphi(x)<0} |\varphi(x)|^{r+1} G_-(x)\, dx + \int\limits_{\varphi(x)>0} |\varphi(x)|^{r+1} G_+(x)\, dx. \tag{5}$$

Тогда условие 3 *теорем* 1.3 *и* 1.2 *выполняется.*

Замечание 1.4. Указанное достаточное условие является обобщением условия Ландесмана — Лазера на случай неограниченных нелинейностей со степенным ростом. Это новое условие может быть подвергнуто проверке для любой нелинейности $g_0(x,u)$, удовлетворяющей условию $(*)$. В то же время условие Ландесмана — Лазера дополнительно требует существование пределов на $\pm\infty$, причем нелинейность должна быть строго зажата между этими пределами.

Замечание 1.5. Во введении мы привели условие (3), гарантирующее существование решения краевой задачи с ограниченной нелинейностью. Покажем, что аналогичное условие (5) при $r = 0$ является более слабым ограничением. Действительно, это немедленно следует из неравенств

$$g_+(x) = \liminf_{t \to +\infty} g_0(x,t) \leq \liminf_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \int\limits_0^t g_0(x,s)\, ds = G_+(x),$$

$$g^-(x) = \limsup_{t \to -\infty} g_0(x,t) \geq -\liminf_{t \to -\infty} \frac{1}{|t|} \int\limits_0^t g_0(x,s)\, ds = -G_-(x),$$

которые означают, что правая часть неравенства в условии (5) оказывается больше, чем правая часть условия (3).

2. Доказательство основных результатов

Для доказательства теоремы 1.1 докажем вспомогательную лемму, показывающую, как можно «повысить» гладкость решения.

Лемма 2.1. *Пусть функция* $v \in W^2_{2n/(n+2)}(\Omega)$ *удовлетворяет уравнению*

$$Lv + g(x, v) = 0, \quad Bv|_{\partial\Omega} = 0,$$

и g *удовлетворяет условию* $(*)$. *Тогда* $v \in W^2_q(\Omega)$, *причем*

$$\|v\|_{W^2_q(\Omega)} \le C = C(\|v\|_X, q, b, r, a),$$

где константы q, b, r *и функция* $a(x) \in L_q(\Omega)$ *взяты из условия* $(*)$.

Доказательство. Запишем уравнение в виде

$$Lv = -g(x, v).$$

Если необходимо, то прибавим к обеим частям слагаемое Kv, где $K > 0$ достаточно велико, чтобы обеспечить положительность оператора L. Переобозначим полученную правую часть равенства $Lv + Kv = Kv - g(x, v)$ через $-g(x, v)$. Заметим, что при этом оценка на степень роста $g(x, u)$ будет иметь следующий вид:

$$|g(x, u)| \le b|u|^s + a'(x),$$

где $s = \max\{1, r\}$ и a', возможно, отличается от a на некоторую константу, поэтому $a' \in L_q(\Omega)$.

Определим $k_1 = \frac{2n}{n+2}$. Покажем, что можно шаг за шагом построить возрастающую конечную последовательность чисел $\{k_l\}$ такую, что

$$\text{либо } k_1 < k_2 < \dots < k_m = q, \quad \text{либо } n - 2k_m \le 0,$$

и $v \in W^2_{k_i}(\Omega)$, $k_i = 1, 2, 3, \dots, m$, причем m зависит только от параметров n, q, s.

Оба возможных исхода означают справедливость утверждения леммы. Если $k_m = q$, то это понятно, а если $n - 2k_m \le 0$, то пространство $W^2_{k_m}(\Omega)$ непрерывно вложено в пространство $L_\infty(\Omega)$, стало быть, $|g(x, v(x))| \in L_q(\Omega)$. Утверждение теперь следует из теорем о регулярности решений эллиптических краевых задач.

Итак, пусть к некоторому моменту получили, что $v \in W^2_{k_l}(\Omega)$. Допустим, что $k_l < q$ и $n - 2k_l > 0$. Согласно теоремам вложения Соболева пространство $W^2_{k_l}(\Omega)$ непрерывно вложено в пространство $L_{nk_l/(n-2k_l)}(\Omega)$. Обозначим

$$k_{l+1} = \frac{nk_l}{s(n - 2k_l)}.$$

Из вышесказанного следует, что $|v|^s \in L_{k_{l+1}}(\Omega)$. Покажем, что $k_{l+1} > k_l$.

Действительно, это неравенство равносильно

$$\frac{nk_l}{s(n - 2k_l)} > k_l.$$

Отсюда получаем $\frac{n}{s} > n - 2k_l$. По сделанным предположениям $s < \frac{n+2}{n-2}$ и $k_l \ge k_1 = \frac{2n}{n+2}$, поэтому $\frac{n}{s} > \frac{n(n-2)}{n+2}$ и $n - 2k_l \le n - \frac{4n}{n+2} = \frac{n(n-2)}{n+2}$, откуда вытекает справедливость неравенства $k_{l+1} > k_l$.

Осталось показать, что найдется такой номер m, что либо $k_{m+1} \ge q$, либо $n - 2k_m < 0$. Допустим противное, тогда из монотонности последовательности k_l следует существование конечного предела k. Но в таком случае, переходя к пределу в равенстве $k_{l+1} = \frac{nk_l}{s(n-2k_l)}$, получим $\frac{n}{s} = n - 2k$. Однако выше уже установили, что $\frac{n}{s} > \frac{n(n-2)}{n+2}$ и $n - 2k_l \le \frac{n(n-2)}{n+2}$, что влечет $\frac{n}{s} > n - 2k$; противоречие. $\square$

Доказательство теоремы 1.1. Положим $s = \max\{r, 1\}$. Пусть $Y = L_{s+1}(\Omega)$. Так как $s + 1 < \frac{n+2}{n-2} + 1 = \frac{2n}{n-2}$, пространство X компактно вложено в Y. Обозначим через P оператор вложения X в Y. Поскольку функция $g(x,u)$ удовлетворяет условию $(*)$, она порождает оператор Немыцкого $Hu = g(x, u(u))$ $\forall u \in Y$ из Y в $Y^* = L_{1+1/s}(\Omega)$ (где $1 + \frac{1}{s} > \frac{2n}{n+2}$). Заметим, что H переводит ограниченные множества из Y в ограниченные множества из Y^*.

Определим оператор $T_1 : X \to X^*$ равенством

$$\langle T_1 u, v\rangle = \int\limits_\Omega g(x, u(x))v(x)\,dx \quad \forall u, v \in X.$$

Заметим, что $T_1 = P^*HP$ — компактный оператор (т. е. образ любого ограниченного множества из X предкомпактен в X^*), поскольку P компактен.

Оператор $A : X \to X^*$, определяемый формулой

$$\langle Au, v\rangle = \sum_{i,j=1}^n \int\limits_\Omega a_{ij}(x)u_{x_i}(x)v_{x_j}(x)\,dx \quad \forall u, v \in X,$$

самосопряженный, так как $\langle Au, v\rangle = \langle Av, u\rangle$ $\forall u, v \in X$, что влечет потенциальность A [10], причем его потенциал равен $\frac{1}{2}\langle Au, u\rangle$. Кроме того, A монотонный, поскольку

$$\langle Au - Av, u - v\rangle \ge \xi\|u - v\|^2 \quad \forall u, v \in X.$$

Наконец, определим оператор $T_2 : X \to X^*$ равенством

$$\langle T_2 u, v\rangle = \int\limits_\Omega c(x)u(x)v(x)\,dx + \int\limits_{\partial\Omega} \sigma(s)u(s)v(s)\,ds \quad \forall u, v \in X.$$

Здесь $\sigma(s) \equiv 0$ для краевых условий Дирихле и Неймана. Оператор T_2 линейный, самосопряженный и компактный, поскольку X компактно вложено в $L_2(\Omega)$ и оператор следа на $L_2(\partial\Omega)$ компактен. Более того, оператор T_2 потенциален, и его потенциал равен $\frac{1}{2}\langle T_2 u, u\rangle$.

Известно [11], что оператор T_1 квазипотенциален и его квазипотенциал есть

$$\int\limits_\Omega dx \int\limits_0^{u(x)} g(x, s)\,ds$$

для произвольного $u \in X$.

Таким образом, оператор $T = A + T_2 + T_1$ квазипотенциален, его квазипотенциал равен $J_{g_0}(u)$. Так как T представим в виде суммы монотонного и компактного оператора, то T локально ограниченный, а функционал $J_{g_0}(u)$ слабо полунепрерывен снизу на X [11].

Поскольку u_0 — точка локального минимума $J_{g_0}(u)$, то, как показано в [12, теорема 1.3],

$$0 \in STu_0, \tag{6}$$

где ST — секвенциальное замыкание оператора T.

Включение (6) равносильно тому, что

$$Au_0 + T_2u_0 \in -ST_1u_0 = S(P^*HP)u_0. \tag{7}$$

Так как $S(P^*HP)u_0 \subset P^*SH(Pu_0)$ [12, лемма 1.1], то (7) влечет

$$Au_0 + T_2u_0 \in -P^*SH(Pu_0). \tag{8}$$

Из (8) следует существование $z \in SH(Pu_0)$ такого, что u_0 — слабое решение задачи

$$Lu(x) + z(x) = 0,\ x \in \Omega, \quad Bu|_\Gamma = 0.$$

Последнее означает, что для любого $v \in X$ верно равенство

$$\langle Au_0 + T_2u_0, v\rangle + \int\limits_\Omega z(x)v(x)\,dx = 0.$$

В силу условия (*3) функция z принадлежит $L_{2n/s(n-2)}(\Omega)$. Из теоремы о регулярности решений [13] следует принадлежность u_0 пространству $W^2_{2n/s(n-2)}(\Omega)$. Так как $\frac{2n}{s(n-2)} > \frac{2n}{n+2}$ (в силу неравенства $s < \frac{n+2}{n-2}$), то $u_0 \in W^2_{2n/(n+2)}(\Omega)$.

Так же, как в [9] при доказательстве теоремы 1.3, устанавливается

1) принадлежность z пространству $SH(Pu_0)$ равносильна включению

$$z(x) \in [g_-(x, u_0(x)), g_+(x, u_0(x))]$$

для почти всех $x \in \Omega$;

2) если для уравнения (1) выполнено A-условие, то u_0 — полуправильное решение задачи (1), (2).

Итак, доказали, что $u_0 \in W^2_{2n/(n+2)}(\Omega)$ — решение задачи (1), (2). Применяя лемму 2.1, получаем, что $u_0 \in W^2_q(\Omega)$.

На этом доказательство теоремы 1.1 завершается. □

2.2. Доказательство теоремы 1.2. Согласно теореме 1.1 достаточно доказать лишь то, что функционал $J_{g_0}(u)$ достигает в некоторой точке u_0 пространства X своего наименьшего значения.

Пусть $\{u_k\}$ — минимизирующая последовательность функционала $J_{g_0}(u)$. Докажем сначала, что последовательность $\{u_k\}$ ограничена в пространстве X. Мы можем представить u_k как сумму $v_k + w_k$, где $v_k \in N(L)$ и $w_k \in N(L)^\perp$.

Заметим, что, используя самосопряженность оператора $\mathscr{L}$, а также тот факт, что $Lu = 0$ влечет $\mathscr{L}u = 0$, мы можем записать

$$(\mathscr{L}u_k, u_k) = (\mathscr{L}(v_k + w_k), v_k + w_k) = (\mathscr{L}w_k, w_k).$$

Так как w_k ортогонально ядру $N(L)$, найдется такая константа C, что $(\mathscr{L}w_k, w_k) \geq C\|w_k\|^2$ (например, в качестве C можно взять первое ненулевое собственное значение оператора L). Также мы можем записать

$$\int\limits_\Omega dx \int\limits_0^{u_k(x)} g_0(x,s)\,ds = \int\limits_\Omega dx \int\limits_0^{v_k(x)} g_0(x,s)\,ds + \int\limits_\Omega dx \int\limits_{v_k(x)}^{v_k(x)+w_k(x)} g_0(x,s)\,ds.$$

Сосредоточимся теперь на оценке интеграла

$$I_k = \int\limits_\Omega dx \int\limits_{v_k(x)}^{v_k(x)+w_k(x)} g_0(x,s)\,ds.$$

Используя условие ($*3$), можем оценить величину I_k следующим образом:

$$|I_k| \le \int\limits_{\Omega} dx \left| \int\limits_{v_k(x)}^{v_k(x)+w_k(x)} \big(b|s|^r + a(x)\big)\, ds \right|.$$

Эта оценка может быть продолжена так:

$$|I_k| \le \int\limits_{\Omega} b\frac{(|v_k(x)| + |w_k(x)|)^{r+1} - |v_k(x)|^{r+1}}{r+1} + |a(x)w_k(x)|\, dx$$

$$\frac{b}{r+1}\int\limits_{\Omega} ((|v_k(x)| + |w_k(x)|)^{r+1} - |v_k(x)|^{r+1})\, dx + \int\limits_{\Omega} |a(x)w_k(x)|\, dx. \quad (9)$$

Используя неравенство Коши — Буняковского и учитывая тот факт, что $q \ge 2$ в условии ($*3$), немедленно получаем следующую оценку:

$$\int\limits_{\Omega} |a(x)w_k(x)|\, dx \le \|a\|_2 \|w_k\|_2.$$

Чтобы оценить первый интеграл в (9), сначала установим некоторое вспомогательное числовое неравенство, а именно

$$(a+b)^{r+1} - a^{r+1} \le 4(b^{r+1} + ba^r) \quad (10)$$

для любых неотрицательных чисел a и b, число r удовлетворяет все тем же ограничениям: $0 \le r < 1$.

На самом деле возможны два случая:

пусть $a \le b$, тогда $(a+b)^{r+1} \le (2b)^{r+1} < 4b^{r+1}$, что доказывает неравенство (10);

пусть $a > b$, тогда, отбрасывая слагаемое b^{r+1} и деля обе части (10) на a^{r+1}, получаем неравенство $(1+t)^{r+1} - 1 \le 4t$, где $0 \le t = \frac{b}{a} < 1$; заметим в таком случае, что

$$(1+t)^{r+1} \le (1+t)^2 = 1 + 2t + t^2 \le 1 + 4t,$$

и это опять же доказывает неравенство (10).

Возвращаемся к оценке интегралов в (9).

В силу только что доказанного неравенства имеем

$$\int\limits_{\Omega} ((|v_k(x)| + |w_k(x)|)^{r+1} - |v_k(x)|^{r+1})\, dx \le \int\limits_{\Omega} 4(|w_k(x)|^{r+1} + |w_k(x)||v_k(x)|^r)\, dx.$$

Далее, используя неравенство Гёльдера, получаем

$$\int\limits_{\Omega} |w_k(x)|^{r+1}\, dx \le \left(\int\limits_{\Omega} w_k^2(x)\, dx\right)^{\frac{r+1}{2}} \left(\int\limits_{\Omega} 1\, dx\right)^{1-\frac{r+1}{2}}.$$

Так как $\frac{r+1}{2} < 1$, эта оценка показывает, что данный интеграл $\int\limits_{\Omega} |w_k(x)|^{r+1}\, dx$ есть величина бесконечно малая по сравнению с $\|w_k\|^2$ при $\|w_k\| \to +\infty$.

Для оценки $\int\limits_{\Omega} |w_k(x)||v_k(x)|^r\, dx$ воспользуемся неравенством Коши — Буняковского:

$$\int\limits_{\Omega} |w_k(x)||v_k(x)|^r\, dx \le \|w_k\|_2 \left(\int\limits_{\Omega} |v_k(x)|^{2r}\, dx\right)^{1/2}.$$

Поскольку все нормы в $N(L)$ эквивалентны, можем подобрать такую положительную константу C', что

$$\left(\int\limits_{\Omega} |v_k(x)|^{2r}\,dx\right)^{1/2} \leq C'\|v_k\|^r.$$

Таким образом, получаем неравенство

$$\int\limits_{\Omega} |w_k(x)||v_k(x)|^r\,dx \leq C'\|w_k\|_2\|v_k\|^r.$$

Здесь же учтем, что $\|w_k\|_2 \leq C''\|w_k\|$, и сделаем соответствующую замену в оценке.

Окончательно величину

$$J_{g_0}(u_k) = \frac{1}{2}(\mathscr{L}w_k, w_k) + \int\limits_{\Omega} dx \int\limits_{0}^{u_k(x)} g_0(x,s)\,ds$$

с учетом всех полученных неравенств можно оценить снизу следующим образом:

$$J_{g_0}(u_k) \geq (C_1\|w_k\|^2 - C_2\|w_k\|^{r+1} - C_3\|w_k\|) - C_4\|w_k\|\|v_k\|^r + \int\limits_{\Omega} dx \int\limits_{0}^{v_k(x)} g_0(x,s)\,ds, \tag{11}$$

где C_1–C_4 — положительные константы.

Теперь поступим следующим образом: расщепим константу C_1 на две положительные константы, одну из которых по-прежнему оставим в первой скобке, а вторую объединим со внескобочными членами. Пусть эта вторая константа будет C_5.

Первая скобка в этой оценке будет величина, ограниченная снизу, причем в силу замечания, сделанного чуть выше, все отрицательные слагаемые бесконечно малы по сравнению с первым слагаемым при $\|w_k\| \to +\infty$.

Рассмотрим сумму

$$S_k = C_5\|w_k\|^2 - C_4\|w_k\|\|v_k\|^r + \int\limits_{\Omega} dx \int\limits_{0}^{v_k(x)} g_0(x,s)\,ds.$$

Покажем ограниченность $\|v_k\|$. Действительно, предположим противное. Без ограничения общности будем считать $\|v_k\| \to +\infty$. Тогда из условия 3 при достаточно большой $\|v_k\|$ получим

$$\int\limits_{\Omega} dx \int\limits_{0}^{v_k(x)} g_0(x,s)\,ds > \left(1 + \frac{C_4^2}{4C_5}\right)\|v_k\|^{2r},$$

поэтому для S_k начиная с некоторого номера k получаем неравенство

$$S_k \geq \left(C_5\|w_k\|^2 - C_4\|w_k\|\|v_k\|^r + \frac{C_4^2}{4C_5}\|v_k\|^{2r}\right) + \|v_k\|^{2r}.$$

Заметим, что большая скобка в полученном неравенстве есть просто полный квадрат, тем самым $S_k \ge \|v_k\|^2$, т. е. если $\{\|v_k\|\}$ не ограничена, то из вышесказанного следует, что правая часть выражения (11) есть сумма ограниченной снизу величины и бесконечно возрастающей величины. Поэтому $J_{g_0}(u_k)$ может принимать сколь угодно большие значения. Но последовательность $\{u_k\}$ минимизирующая, т. е. мы заведомо можем предполагать $J_{g_0}(u_k) \le 0$ ввиду того, что $J_{g_0}(0(x)) = 0$, где $0(x)$ — нулевая в Ω функция. Противоречие с предположением о неограниченности $\{v_k\}$. Значит, последовательность $\{v_k\}$ ограничена. Следовательно, из той же оценки для S_k вытекает ограниченность и последовательности $\{w_k\}$.

Мы доказали, что $\{u_k\}$ — ограниченная последовательность в пространстве X. Но X — рефлексивное пространство, поэтому можем без ограничения общности считать, что $u_k \rightharpoonup u_0$. Пользуясь полунепрерывностью снизу функционала J_{g_0} [11] и тем, что $\{u_k\}$ — минимизирующая последовательность, немедленно получаем, что

$$\inf_{u\in X} J_{g_0}(u) = \lim_{k\to\infty} J_{g_0}(u_k) \ge J_{g_0}(u_0).$$

Это влечет равенство

$$J_{g_0}(u_0) = \inf_{u\in X} J_{g_0}(u).$$

В силу теоремы 1.1 заключаем, что u_0 — искомое решение исходной краевой задачи. $\square$

Доказательство теоремы 1.3. Получим доказательство как следствие теоремы 1.2. Действительно, подберем произвольную функцию $h(x) \in W_q^2(\Omega)$, удовлетворяющую граничному условию (2). Такая функция найдется в силу следующего соображения. Рассмотрим краевую задачу $-\Delta u + u = 0$ с граничным условием (2). Эта задача удовлетворяет условиям теоремы о разрешимости эллиптических краевых задач, поэтому в качестве $h(x)$ можем взять решение этой задачи.

Будем теперь искать решение исходной краевой задачи (1), (2) в виде суммы $\hat{u}(x) + h(x)$, где $\hat{u} \in W_q^2(\Omega)$ удовлетворяет следующей краевой задаче:

$$L\hat{u}(x) + (g_0(x, \hat{u}(x) + h(x)) + Lh(x)) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{12}$$

$$B\hat{u}|_{\partial\Omega} = 0. \tag{13}$$

Осталось проверить для этой модифицированной задачи условия теоремы 1.2, чтобы заключить о существовании решения этой краевой задачи.

Условие 1 выполняется. Для проверки условия 2 заметим, что

$$\begin{aligned}|g_0(x, u+h(x)) + Lh(x)| &\le |g_0(x, u+h(x))| + |Lh(x)| \le b|u+h(x)|^r + a(x) + |Lh(x)| \\ &\le b(|u|^r + |h(x)|^r) + a(x) + |Lh(x)| \le b|u|^r + (b|h(x)|^r + a(x) + |Lh(x)|),\end{aligned}$$

где $b|h(x)|^r + a(x) + |Lh(x)| \in L_q(\Omega)$. Мы воспользовались неравенством $(a+b)^r \le a^r + b^r$, которое справедливо для произвольных неотрицательных $a, b \in \mathbb{R}$ и числа $r \in (0,1)$.

Таким образом, осталось установить, что условие 3 также выполняется для модифицированной задачи (12), (13). Для этого оценим разность

$$\int_\Omega dx \int_0^{\psi(x)} (g_0(x, s + h(x)) + Lh(x))\, ds - \int_\Omega dx \int_0^{\psi(x)} g_0(x, s)\, ds. \tag{14}$$

Если окажется, что она при $\|\psi\| \to +\infty$ ($\psi \in N(L)$) по порядку не больше, чем величина

$$\int\limits_{\Omega} |\psi(x)|^{2r}\, dx, \tag{15}$$

то это будет означать, что условие 3 теоремы 1.2 действительно выполняется для модифицированной задачи.

Сразу выделим в (14) слагаемое

$$\int\limits_{\Omega} dx \int\limits_{0}^{\psi(x)} Lh(x)\, ds = \int\limits_{\Omega} \psi(x) Lh(x)\, dx,$$

которое имеет порядок роста 1, поэтому в дальнейшем его можно не рассматривать ввиду того, что $2r \geq 1$. Тем самым (15) имеет порядок роста, больший чем 1. Дальнейшие рассуждения будут подчинены той идее, что порядок роста величины (14) не превосходит 1.

Обратим внимание на то, что рассуждения о порядке роста идут безотносительно к конкретной норме, по которой мы измеряем ψ, так как ψ лежит в конечномерном подпространстве $N(L)$, а там все нормы эквивалентны.

Сделаем следующее преобразование:

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega} dx \int\limits_{0}^{\psi(x)} g_0(x, s + h(x))\, ds &= \int\limits_{\Omega} dx \int\limits_{h(x)}^{\psi(x)+h(x)} g_0(x,s)\, ds \\ &= \int\limits_{\Omega} dx \int\limits_{0}^{\psi(x)+h(x)} g_0(x,s)\, ds - \int\limits_{\Omega} dx \int\limits_{0}^{h(x)} g_0(x,s)\, ds.\end{aligned}$$

Отбрасываем вычитаемое, так как это постоянная величина, не влияющая на скорость роста. Итак, для оценки скорости роста величины (14) необходимо оценить

$$I = \int\limits_{\Omega} dx \int\limits_{0}^{\psi(x)+h(x)} g_0(x,s)\, ds - \int\limits_{\Omega} dx \int\limits_{0}^{\psi(x)} g_0(x,s)\, ds = \int\limits_{\Omega} dx \int\limits_{\psi(x)}^{\psi(x)+h(x)} g_0(x,s)\, ds.$$

Подобная оценка уже проводилась для величины I_k в доказательстве теоремы 1.2. Однако нам придется повторить эти шаги, так как не всё, что там делалось, пригодится и в этом случае.

Имеем

$$\begin{aligned}|I| &\leq \int\limits_{\Omega} dx \left| \int\limits_{\psi(x)}^{\psi(x)+h(x)} g_0(x,s)\, ds \right| \leq \int\limits_{\Omega} dx \left| \int\limits_{\psi(x)}^{\psi(x)+h(x)} (b|s|^r + a(x))\, ds \right| \\ &\leq \int\limits_{\Omega} \left(b\frac{(|\psi(x)| + |h(x)|)^{r+1} - |\psi(x)|^{r+1}}{r+1} + |a(x)h(x)| \right) dx.\end{aligned}$$

Второе слагаемое под интегралом сразу может быть отброшено: это постоянная величина. Для дроби же под интегралом применяем неравенство (10), что дает оценку для этой дроби вида

$$C \int\limits_{\Omega} (|h(x)|^{r+1} + |h(x)\psi^r(x)|)\, dx.$$

Отсюда видно, что эта величина имеет порядок роста r, т. е. меньше, чем 1.

Таким образом, доказано, что все условия теоремы 1.2 для краевой задачи (12), (13) выполнены, поэтому существует решение $\hat{u} \in W_q^2(\Omega)$. Это завершает доказательство теоремы 1.3. $\square$

Доказательство предложения 1.1. Будем использовать следующее

Утверждение 2.1. *Пусть для последовательности $f_k \in L_1(\Omega)$ и функции $g \in L_1(\Omega)$ выполняется неравенство $|f_k(x)| \leq g(x)$ для п. в. $x \in \Omega$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Тогда функция $f(x) = \liminf\limits_{k\to\infty} f_k(x)$ суммируема, причем*

$$\liminf_{k\to\infty} \int\limits_\Omega f_k(x)\,dx \geq \int\limits_\Omega \liminf_{k\to\infty} f_k(x)\,dx.$$

Доказательство этого утверждения может быть легко получено из теоремы Беппо Леви. На самом деле для этого необходимо лишь определить монотонную последовательность $\hat{f}_k(x) = \inf\limits_{l\geq k} f_l(x)$ и воспользоваться заключением упомянутой теоремы.

Предположим, что предложение 1.1 неверно. Это подразумевает существование последовательности элементов ядра $\{\psi_k(x)\} \in N(L)$ такой, что имеет место неравенство

$$\frac{1}{\|\psi_k\|^{2r}} \int\limits_\Omega dx \int\limits_0^{\psi_k(x)} g_0(x,s)\,ds \leq M \tag{16}$$

для некоторого числа M и $\|\psi_k\| \to +\infty$ при $k \to \infty$.

Можно считать, что ядро $N(L)$ состоит из функций класса $C(\overline{\Omega})$, так как коэффициенты дифференциального оператора и граница $\partial\Omega$ достаточно гладкие. К тому же известно, что ядро конечномерно. Значит, все нормы, определенные на элементах этого ядра, эквивалентны, поэтому будем использовать норму пространства $C(\overline{\Omega})$.

Рассмотрим последовательность $\varphi_k(x) = \frac{\psi_k(x)}{\|\psi_k\|_{C(\overline{\Omega})}}$. Это ограниченная последовательность в конечномерном пространстве $N(L)$. Поэтому без ограничения общности будем считать, что $\varphi_k(x)$ сходится к некоторой функции $\varphi(x) \in N(L)$, причем эта функция ненулевая в силу соотношения $\|\varphi_k\|_{C(\overline{\Omega})} = 1$.

Поделим множитель $\int\limits_\Omega dx \int\limits_0^{\psi_k(x)} g_0(x,s)\,ds$ из неравенства (16) на $\|\psi_k\|^{r+1}_{C(\overline{\Omega})}$ и устремим k к $+\infty$. Сразу заметим, что $r+1 > 2r$, поэтому если мы покажем, что полученное отношение сходится к некоторой положительной константе, то это будет означать, что наше исходное предположение (16) неверно.

Теперь рассмотрим

$$\int\limits_\Omega \frac{dx}{\|\psi_k\|^{r+1}} \int\limits_0^{\psi_k(x)} g_0(x,s)\,ds = \int\limits_\Omega \frac{|\psi_k(x)|^{r+1}}{\|\psi_k\|^{r+1}} \frac{dx}{|\psi_k(x)|^{r+1}} \int\limits_0^{\psi_k(x)} g_0(x,s)\,ds.$$

Перейдем в этом равенстве к нижнему пределу, используя утверждение 2.1, и немедленно получаем следующую величину:

$$\int\limits_{\varphi(x)<0} |\varphi(x)|^{r+1} G_-(x)\,dx + \int\limits_{\varphi(x)>0} |\varphi(x)|^{r+1} G_+(x)\,dx,$$

которая по условию есть положительное число. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красносельский М. А., Покровский А. В.* Системы с гистерезисом. М.: Наука, 1983.
2. *Гольдштик М. А.* Математическая модель отрывных течений несжимаемой жидкости // Докл. АН СССР. 1962. Т. 147, № 6. С. 1310–1313.
3. *Kuiper H. J.* On positive solutions of nonlinear elliptic eigenvalue problems // Rend. Circ. Mat. Palermo. Ser 2. 1971. V. 20, N 2–3. P. 113–138.
4. *Kuiper H. J.* Eigenvalue problems for noncontinuous operators associated with quasilinear elliptic equations // Arch. Rat. Mech. Anal. 1974. V. 53, N 2. P. 178–186.
5. *Frankel L. E., Berger M. S.* A global theory of steady vortex rings in an ideal fluid // Acta Math. 1974. V. 132. P. 14–51.
6. *Landesman E., Lazer A.* Nonlinear perturbations of linear elliptic boundary value problems at resonance // J. Math. Mech. 1970. V. 19, N 7. P. 609–623.
7. *Скрыпник И. В.* Нелинейные эллиптические уравнения высшего порядка. Современные проблемы математики. М.: ВИНИТИ, 1990. Т. 37. (Итоги науки и техники).
8. *Chang K. C.* Variational methods for non-differentiable functionals and their applications to partial differential equations // J. Math. Anal. Appl. 1981. V. 80, N 1. P. 102–129.
9. *Павленко В. Н., Винокур В. В.* Резонансные краевые задачи для уравнений эллиптического типа с разрывными нелинейностями // Изв. вузов. Математика. 2001. № 5. С. 45–58.
10. *Вайнберг М. М.* Вариационный метод и метод монотонных операторов. М.: Наука, 1972.
11. *Павленко В. Н.* Теоремы существования для эллиптических вариационных неравенств с квазипотенциальными операторами // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24, № 8. С. 1397–1402.
12. *Павленко В. Н.* Управление распределенными системами эллиптического типа с разрывными нелинейностями // Вестн. Челябинск. ун-та. Математика. Механика. 1999. № 2. С. 56–67.
13. *Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л.* Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.

Статья поступила 24 сентября 2007 г.

Лепчинский Михаил Германович,
Челябинский гос. университет,
ул. Братьев Кашириных, 21, Челябинск 454021
myth@csu.ru