Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2011. Том 52, № 3

УДК 514.13+514.135

ФОРМУЛА ОБЪЕМА $\mathbb{Z}_2$–СИММЕТРИЧНОГО СФЕРИЧЕСКОГО ТЕТРАЭДРА

А. А. Колпаков, А. Д. Медных, М. Г. Пашкевич

Аннотация. Получены формулы объема сферического тетраэдра с $\mathbb{Z}_2$-симметрией, реализованной вращением вокруг оси, проходящей через середины одной из пар скрещивающихся ребер. Показана зависимость формулы объема от длин ребер и двугранных углов тетраэдра. Результатом являются несколько различных формул, границы применимости которых определены через геометрические характеристики тетраэдра.

Ключевые слова: тетраэдр, сферическое пространство, объем, матрица Грама.

1. Введение

Вычисление объема многогранника является классической задачей, известной со времен Евклида и не потерявшей актуальность в наши дни. Вероятно, первый результат в данном направлении принадлежит Тарталье (1499–1557), который нашел объем евклидова тетраэдра. В настоящее время этот результат известен как формула Кэли — Менгера. И. Х. Сабитов [1] доказал, что объем любого евклидова многогранника является корнем алгебраического уравнения, коэффициенты которого представлены целочисленными многочленами, зависящими от длин ребер многогранника и его комбинаторного типа.

В случае тетраэдра в гиперболическом и сферическом пространствах ситуация более сложная. Формулы объема для тетраэдров специального вида в гиперболическом и сферическом пространствах известны еще со времен Н. И. Лобачевского и Л. Шлефли. Объемы гиперболического куба Ламберта и некоторых других многогранников получены Келлерхальс [2], А. Д. Медных [3], А. Ю. Весниным, А. Д. Медных и Паркером [4]. Объемы гиперболических многогранников, имеющих хотя бы одну вершину на бесконечности, найдены Э. Б. Винбергом [5]. Общая формула для объема неевклидова тетраэдра долгое время оставалась неизвестной. В последнее время Чо и Ким [6], Мураками и Яно [7], Ушиджима [8] получили указанную формулу в виде линейной комбинации шестнадцати дилогарифмических функций.

Позже Д. А. Деревнин и А. Д. Медных [9] предложили элементарную интегральную формулу для объема гиперболического тетраэдра. Удивительно, но еще более ста лет назад итальянский герцог Гаэтано Сфорца нашел формулу для вычисления объема неевклидова тетраэдра. К сожалению, выдающаяся

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов № 09–01–00255 и 10–01–00642) и программы Рособразования «Развитие научного потенциала высшей школы» (код проекта 2.1.1/3707).

работа Сфорца [10] была полностью забыта. Отметим, что в случае симметрического тетраэдра, двугранные углы которого при накрест лежащих ребрах попарно равны, формула объема существенно упрощается. Впервые этот замечательный факт установлен самим Н. И. Лобачевским для идеального гиперболического тетраэдра, т. е. тетраэдра, все вершины которого лежат на бесконечности. Милнор представил соответствующий результат в весьма элегантной форме [11]. В общем случае объем симметричного тетраэдра найден Д. А. Деревниным, А. Д. Медных и М. Г. Пашкевич [12]. Отметим, что идея использования симметрии оправдывает себя и для более сложных многогранников. Объемы октаэдров, обладающих различными симметриями, и двойственных к ним гексаэдров найдены Н. В. Абросимовым, Годоем-Молиной и А. Д. Медных [13].

Задача нахождения формулы объема в случае сферического тетраэдра представляется более сложной. Частично она решена в работах [7, 12]. Формулы объемов сферических октаэдров и гексаэдров с симметриями получены в [13]. Интегральная формула объема для куба Ламберта в сферическом пространстве найдена в [14]. Целью настоящей работы являются исследование геометрических соотношений и получение формулы объема для сферического тетраэдра с $\mathbb{Z}_2$-симметрией, сохраняющей ориентацию, т. е. с симметрией при полуповороте вокруг оси, проходящей через середины двух накрест лежащих ребер.

2. Предварительные результаты

Обозначим через $\mathbb{R}^{n+1} = \{\mathrm{x} = (x_0, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \dots, n\}$ евклидово пространство со стандартным скалярным произведением $\langle \mathrm{x}, \mathrm{y}\rangle = \sum\limits_{i=0}^{n} x_i y_i$ и нормой $\|\mathrm{x}\| = \sqrt{\langle \mathrm{x}, \mathrm{x}\rangle}$. Пусть $\mathrm{p}_0, \dots \mathrm{p}_n$ — набор векторов в $\mathbb{R}^{n+1}$. *Конусом* на векторах $\mathrm{p}_0, \dots, \mathrm{p}_n$ назовем множество

$$\operatorname{cone}\{\mathrm{p}_0, \dots, \mathrm{p}_n\} = \left\{ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \mathrm{p}_i : \lambda_i \geq 0,\ i = 1, \dots, n \right\}.$$

Сферическим симплексом $\mathscr{S}$ назовем пересечение конуса над набором линейно независимых векторов $\mathrm{p}_0, \dots, \mathrm{p}_n$ единичной длины и n-мерной сферы $\mathbb{S}^n = \{v \in \mathbb{R}^n : \langle v, v\rangle = 1\}$. Таким образом, $\mathscr{S} = \operatorname{cone}\{\mathrm{p}_0, \dots, \mathrm{p}_n\} \cap \mathbb{S}^n$. Векторы $\mathrm{p}_0, \dots, \mathrm{p}_n$ являются вершинами симплекса $\mathscr{S}$. Заметим, что $\{\mathrm{p}_0, \dots, \mathrm{p}_n\} \subset \mathbb{S}^n$. *Гранью симплекса $\mathscr{S}$ размерности $k-1$ или же, кратко, $(k-1)$-гранью*, назовем пересечение n-мерной сферы $\mathbb{S}^n$ и конуса над k-элементным набором линейно независимых векторов $\{\mathrm{p}_{i_1}, \dots, \mathrm{p}_{i_k}\} \subset \{\mathrm{p}_0, \dots, \mathrm{p}_n\}$, где $\{i_1 < \dots < i_k\} \subset \{0, \dots, n\}$. Непустое пересечение двух граней назовем *коньком симплекса $\mathscr{S}$*. Матрицу вида $G^\star = \{\langle \mathrm{p}_i, \mathrm{p}_j\rangle\}_{i,j=0}^{n}$ назовем *реберной матрицей симплекса $\mathscr{S}$*.

Пусть $M = \{m_{ij}\}_{i,j=0}^{n}$ — некоторая матрица. Через $M(i,j)$ обозначим ее подматрицу, полученную вычеркиванием i-й строки и j-го столбца, $i, j = 0, \dots, n$. Положим $M_{ij} = (-1)^{i+j} \det M(i,j)$. Величина M_{ij} называется *(i,j)-минором матрицы M*. Матрица $\operatorname{cof} M = \{M_{ij}\}_{i,j=0}^{n}$ называется *сопряженной матрицей* к M.

Вектор нормали единичной длины v_i, $i = 0, \dots, n$, к $(n-1)$-грани $\mathscr{S}_i =$

$\{\mathrm{p}_{i_1}, \ldots, \mathrm{p}_{i_n}\} \not\supseteq \{\mathrm{p}_i\}$ симплекса $\mathscr{S}$ равен [15]

$$\mathrm{v}_i = \frac{\sum\limits_{k=0, k\neq i}^{n} G^{\star}_{ik} \mathrm{p}_k}{\sqrt{G^{\star}_{ii}\, \det G^{\star}}}.$$

Матрицу $G = \{\langle \mathrm{v}_i, \mathrm{v}_j\rangle\}_{i,j=0}^n$ назовем *матрицей Грама симплекса* $\mathscr{S}$.

Пусть $\mathscr{S} \subset \mathbb{S}^n$ является симплексом с вершинами $\{\mathrm{p}_0, \ldots, \mathrm{p}_n\}$ и нормалями $\{\mathrm{v}_0, \ldots, \mathrm{v}_n\}$ к соответствующим граням. Определим длины его ребер при помощи равенств $\cos l_{ij} = \langle \mathrm{p}_i, \mathrm{p}_j\rangle$ и внутренние двугранные углы при помощи равенств $\cos\alpha_{ij} = -\langle \mathrm{v}_i, \mathrm{v}_j\rangle$, где $0 \le l_{ij}$, $\alpha_{ij} \le \pi$, $i, j = 0, \ldots, n$. Тогда матрица Грама симплекса $\mathscr{S}$ примет вид $G = \{-\cos\alpha_{ij}\}_{i,j=0}^n$, а реберная матрица будет записана как $G^\star = \{\cos l_{ij}\}_{i,j=0}^n$.

Сфера $\mathbb{S}^n$ может быть наделена метрикой постоянной секционной кривизны $+1$. Назовем *расстоянием* между двумя точками p и q из $\mathbb{S}^n$ вещественное число $d(P, Q)$, однозначно определяемое условиями

$$0 \le d(\mathrm{p}, \mathrm{q}) \le \pi \quad \text{и} \quad \cos d(\mathrm{p}, \mathrm{q}) = \langle \mathrm{p}, \mathrm{q}\rangle.$$

Полученное метрическое пространство назовем *n-мерным сферическим пространством* $\mathbb{S}^n$. Группа изометрии сферического пространства $\mathbb{S}^n$ является ортогональной группой $O(n+1)$. Изометрии, сохраняющие ориентацию, составляют ее подгруппу индекса 2, называемую *специальной ортогональной группой* $SO(n+1)$.

Приведенные ниже теоремы дают критерии существования сферического симплекса в терминах его двугранных углов и в терминах длин ребер [15].

Теорема 1. *Матрица Грама $\{-\cos\alpha_{ij}\}_{i,j=0}^n$ сферического n-симплекса является симметрической положительно определенной матрицей с единицами на главной диагонали. Обратно, всякая положительно определенная симметрическая матрица с элементами главной диагонали, равными 1, является матрицей Грама некоторого сферического n-симплекса. Такой симплекс единствен с точностью до изометрии пространства $\mathbb{S}^n$.*

Теорема 2. *Реберная матрица $\{\cos l_{ij}\}_{i,j=0}^n$ сферического n-симплекса является симметрической положительно определенной матрицей с единицами на главной диагонали. Обратно, всякая положительно определенная симметрическая матрица с элементами главной диагонали, равными 1, является реберной матрицей некоторого сферического n-симплекса. Такой симплекс единствен с точностью до изометрии пространства $\mathbb{S}^n$.*

Следующая теорема связывает объем симплекса в $\mathbb{S}^n$ с объемами его коньков и двугранными углами в этих коньках [16].

Теорема 3 (формула Шлефли). *Пусть $\mathscr{S}$ — симплекс в сферическом пространстве $\mathbb{S}^n$, $n \ge 2$, с вершинами $\mathrm{p}_0, \ldots, \mathrm{p}_n$ и двугранными углами $\alpha_{ij} = \angle \mathscr{S}_i \mathscr{S}_j$, $0 \le i < j \le n$, между гранями $\mathscr{S}_i$ и $\mathscr{S}_j$ с коньком $\mathscr{S}_{ij} = \mathscr{S}_i \cap \mathscr{S}_j$.*

Тогда дифференциал функции объема Vol_n на множестве всех симплексов $\mathbb{S}^n$ удовлетворяет равенству

$$(n-1)\, \mathrm{d}\,\mathrm{Vol}_n\, \mathscr{S} = \sum_{i<j=0}^{n} \mathrm{Vol}_{n-2}\, \mathscr{S}_{ij}\, \mathrm{d}\alpha_{ij},$$

где $\mathrm{Vol}_{n-2}\, \mathscr{S}_{ij}$ является функцией объема на множестве коньков $\mathscr{S}_{ij}$, $\mathrm{Vol}_0\, \mathscr{S}_{ij} = 1$, $0 \le i < j \le n$, и α_{ij} — двугранный угол в коньке $\mathscr{S}_{ij}$.

В случае сферического пространства $\mathbb{S}^3$ формула Шлефли имеет вид

$$\mathrm{d}\,\mathrm{Vol}\,\mathscr{S} = \frac{1}{2}\sum_{i<j=0}^{3} l_{ij}\,\mathrm{d}\alpha_{ij},$$

где $\mathrm{Vol} = \mathrm{Vol}_3$ — функция объема, $l_{ij} = \mathrm{Vol}_1\,\mathscr{S}_{ij}$ — длина ребра, соединяющего вершины p_i и p_j, и α_{ij} — двугранный угол в этом ребре. Таким образом, объем симплекса $\mathbb{S}^3$ связан с длинами его ребер и двугранными углами.

Для всякого симплекса $\mathscr{S} \subset \mathbb{S}^n$ с вершинами $\{\mathrm{p}_0, \dots, \mathrm{p}_n\}$ и единичными векторами нормалей $\{\mathrm{v}_0, \dots, \mathrm{v}_n\}$ определим двойственный ему симплекс $\mathscr{S}^\star \subset \mathbb{S}^n$ с вершинами $\{\mathrm{v}_0, \dots, \mathrm{v}_n\}$ и векторами нормалей $\{\mathrm{p}_0, \dots, \mathrm{p}_n\}$.

В случае сферического пространства $\mathbb{S}^3$ каждое ребро $\mathrm{p}_i\mathrm{p}_j$, $0 \le i < j \le 3$, симплекса $\mathscr{S}$ соответствует ребру $\mathrm{v}_{3-j}\mathrm{v}_{3-i}$ двойственного ему $\mathscr{S}^\star$. Приведенная ниже теорема была изначально открыта итальянским математиком Гаэтано Сфорца и может быть найдена в книге [11].

Теорема 4. *Обозначим через $\mathscr{S}$ симплекс в сферическом пространстве $\mathbb{S}^3$. Через $\mathscr{S}^\star$ обозначим двойственный ему симплекс. Тогда*

$$\mathrm{Vol}_3\ \mathscr{S} + \mathrm{Vol}_3\ \mathscr{S}^\star + \frac{1}{2}\sum_{E\subset\mathscr{S}} \mathrm{Vol}_1\,E\ \mathrm{Vol}_1\,E^\star = \pi^2,$$

где сумма берется по всем ребрам E симплекса $\mathscr{S}$, а $E^\star$ обозначает ребро двойственного ему симплекса $\mathscr{S}^\star$, соответствующее E.

При последующем изложении будем для краткости называть трехмерный симплекс тетраэдром.

3. Тригонометрические равенства для сферического тетраэдра

Через $\mathbf{T}$ обозначим тетраэдр в сферическом пространстве $\mathbb{S}^3$ с вершинами p_0, p_1, p_2, p_3, двугранными углами A, B, C, D, E, F и длинами ребер l_A, l_B, l_C, l_D, l_E, l_F. При этом нижние индексы в обозначениях ребер соответствуют двугранным углам в этих ребрах, а ребра $\mathrm{p}_0\mathrm{p}_1$ и $\mathrm{p}_2\mathrm{p}_3$ накрест лежащие. Как следует из определения тетраэдра, $0 \le A, B, C, D, E, F \le \pi$ и $0 \le l_A, l_B, l_C, l_D, l_E, l_F \le \pi$.

Обозначим через

$$G = \{g_{ij}\}_{i,j=0}^{3} = \begin{pmatrix} 1 & -\cos A & -\cos B & -\cos C \\ -\cos A & 1 & -\cos F & -\cos E \\ -\cos B & -\cos F & 1 & -\cos D \\ -\cos C & -\cos E & -\cos D & 1 \end{pmatrix}$$

матрицу Грама тетраэдра $\mathbf{T}$, а через

$$G^\star = \{g^\star_{ij}\}_{i,j=0}^{3} = \begin{pmatrix} 1 & \cos l_D & \cos l_E & \cos l_F \\ \cos l_D & 1 & \cos l_C & \cos l_B \\ \cos l_E & \cos l_C & 1 & \cos l_A \\ \cos l_F & \cos l_B & \cos l_A & 1 \end{pmatrix}$$

— его реберную матрицу. Через c_{ij} и $c^\star_{ij}$ обозначим соответствующие миноры матриц G и $G^\star$, где $i, j = 0, 1, 2, 3$.

Приведем также тригонометрические равенства, которые будут использованы в дальнейшем [12].

Теорема 5 (правило синусов). *Пусть* $\mathbf{T}$ *— сферический тетраэдр с матрицей Грама* G. *Обозначим* $\Delta = \det G$, $p = c_{00}c_{11}c_{22}c_{33}$, *а также* $\Delta^\star = \det G^\star$, $p^\star = c^\star_{00}c^\star_{11}c^\star_{22}c^\star_{33}$. *Тогда выполнены равенства*

$$\frac{\sin A \sin D}{\sin l_A \sin l_D} = \frac{\sin B \sin E}{\sin l_B \sin l_E} = \frac{\sin C \sin F}{\sin l_C \sin l_F} = \frac{\sqrt{p}}{\Delta} = \frac{\Delta^\star}{\sqrt{p^\star}}.$$

Теорема 6 (правило косинусов). *Для пар накрест лежащих ребер тетраэдра* $\mathbf{T}$ *выполнены следующие равенства:*

$$\frac{\cos A \cos D - \cos B \cos E}{\cos l_A \cos l_D - \cos l_B \cos l_E} = \frac{\cos B \cos E - \cos C \cos F}{\cos l_B \cos l_E - \cos l_C \cos l_F}$$
$$= \frac{\cos C \cos F - \cos A \cos D}{\cos l_C \cos l_F - \cos l_A \cos l_D} = \frac{\sqrt{p}}{\Delta} = \frac{\Delta^\star}{\sqrt{p^\star}}.$$

Приведем также следующую теорему, впервые доказанную Якоби (см. [17, с. 24]).

Теорема 7. *Пусть* $M = \{m_{ij}\}_{i,j=0}^n$ *— некоторая матрица,* $\operatorname{cof} M = \{M_{ij}\}_{i,j=0}^n$ *— ее сопряженная,* $0 < k < n$ *и* $\sigma = \begin{pmatrix} i_0 \dots i_n \\ j_0 \dots j_n \end{pmatrix}$ *— произвольная перестановка. Тогда выполнено равенство*

$$\det\{M_{i_p j_q}\}_{p,q=0}^k = (-1)^{\operatorname{sgn}\sigma} (\det M)^k \det\{m_{i_p j_q}\}_{p,q=k}^n.$$

4. Тригонометрические равенства для $\mathbb{Z}_2$-симметричного сферического тетраэдра

Рассмотрим сферический тетраэдр $\mathbf{T}$, который переводит в себя вращение на угол π вокруг оси, проходящей через середины ребер $\mathrm{p}_0\mathrm{p}_1$ и $\mathrm{p}_2\mathrm{p}_3$. Всякий такой тетраэдр будем называть $\mathbb{Z}_2$-*симметричным.* Отметим, что в этом случае без ограничения общности можно считать, что $B = E$, $C = F$ и $l_B = l_E$, $l_C = l_F$.

Лемма 1. *Для всякого* $\mathbb{Z}_2$*-симметричного сферического тетраэдра с двугранными углами* A, $B = E$, $C = F$, D *и длинами ребер* l_A, $l_B = l_E$, $l_C = l_F$, l_D *справедливы следующие утверждения:*

(i) $l_A = l_D$, *если и только если* $A = D$,

(ii) $l_A > l_D$, *если и только если* $A < D$.

Доказательство. Применив к матрице $G^\star$ теорему 7, получим

$$c^\star_{00}c^\star_{23} - c^\star_{01}c^\star_{22} = \det G^\star (g^\star_{01} - g^\star_{23}).$$

Также имеем

$$g_{01} = -\cos A = \frac{c^\star_{01}}{\sqrt{c^\star_{00}c^\star_{11}}}, \quad g_{23} = -\cos D = \frac{c^\star_{23}}{\sqrt{c^\star_{22}c^\star_{33}}},$$
$$g^\star_{01} = \cos l_D, \quad g^\star_{23} = \cos l_A.$$

В случае сферического $\mathbb{Z}_2$-симметричного тетраэдра из теоремы 2 следует, что $c^\star_{00} = c^\star_{11} > 0$, $c^\star_{22} = c^\star_{33} > 0$ и $\det G^\star > 0$. Таким образом,

$$\cos l_A - \cos l_D = -\frac{c^\star_{00}c^\star_{22}}{\det G^\star}(\cos A - \cos D).$$

Поскольку выполнены неравенства $0 \le A, D \le \pi$, $0 \le l_A, l_D \le \pi$, получим утверждение леммы. $\square$

В дальнейшем для определителей матрицы Грама G и реберной матрицы $G^\star$ используем обозначения $\Delta = \det G$ и $\Delta^\star = \det G^\star$.

Тригонометрические равенства, установленные в теоремах 5 и 6, позволяют сформулировать и доказать следующее

Предложение 1. *Пусть* $\mathbf{T}$ — *сферический* $\mathbb{Z}_2$*-симметричный тетраэдр с двугранными углами* A, $B = E$, $C = F$, D *и длинами ребер* l_A, $l_B = l_E$, $l_C = l_F$, l_D. *Тогда выполнены следующие равенства:*

$$u = \frac{\sin\frac{A+D}{2}}{\sin\frac{l_A+l_D}{2}} = \frac{\sin\frac{A-D}{2}}{\sin\frac{l_D-l_A}{2}} = \frac{\sin B}{\sin l_B} = \frac{\sin C}{\sin l_C} = v^{-1},$$

где величины

$$u = \sqrt{\frac{c_{00}c_{22}}{\Delta}}, \quad v = \sqrt{\frac{c^\star_{00}c^\star_{22}}{\Delta^\star}}$$

называются соответственно главным и дуальным параметрами тетраэдра $\mathbf{T}$.

Доказательство. Используем очевидное свойство дробей:

$$\text{если } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ то } \frac{a-c}{b-d} = \frac{a+c}{b+d},$$

а также тригонометрические равенства

$$\cos(\varphi+\psi) = \cos\varphi\cos\psi - \sin\psi\sin\varphi, \quad \cos(\varphi-\psi) = \cos\varphi\cos\psi + \sin\psi\sin\varphi.$$

Из теорем 5 и 6 получим

$$\frac{c_{00}c_{22}}{\Delta} = \frac{1-\cos(A+D)}{1-\cos(l_A+l_D)} = \frac{1-\cos(D-A)}{1-\cos(l_A-l_D)} = \frac{\sin^2 B}{\sin^2 l_B} = \frac{\sin^2 C}{\sin^2 l_C} = \frac{\Delta^\star}{c^\star_{00}c^\star_{22}}.$$

Положим $u = \sqrt{\frac{c_{00}c_{22}}{\Delta}}$ и $v = \sqrt{\frac{c^\star_{00}c^\star_{22}}{\Delta^\star}}$. Из теорем 1 и 2 следует, что величины u и v положительны. В дальнейшем будем называть u *главным параметром тетраэдра* $\mathbf{T}$. Величина v связана с главным параметром соотношением $uv = 1$. Назовем v *дуальным параметром тетраэдра* $\mathbf{T}$. В силу тригонометрического равенства $1 - \cos\varphi = 2\sin^2\frac{\varphi}{2}$ имеем

$$u^2 = \frac{\sin^2\frac{l_A+l_D}{2}}{\sin^2\frac{A+D}{2}} = \frac{\sin^2\frac{l_A-l_D}{2}}{\sin^2\frac{D-A}{2}} = \frac{\sin^2 l_B}{\sin^2 B} = \frac{\sin^2 l_C}{\sin^2 C} = v^{-2}.$$

Извлекая квадратные корни, завершим доказательство. При этом, используя лемму 1 и учитывая, что $0 \le l_A, l_B, l_C, l_D \le \pi$ по определению сферического тетраэдра, проследим за знаками подкоренных выражений. $\square$

5. Формула объема $\mathbb{Z}_2$-симметричного сферического тетраэдра

5.1. Дополнительные тригонометрические соотношения для $\mathbb{Z}_2$-симметричного сферического тетраэдра. Пусть $\mathbf{T}$ — сферический $\mathbb{Z}_2$-симметричный тетраэдр с двугранными углами A, $B = E$, $C = F$, D и длинами ребер l_A, $l_B = l_E$, $l_C = l_F$, l_D. Введем обозначения:

$$a_+ = \cos\frac{A+D}{2}, \quad a_- = \cos\frac{D-A}{2}, \quad b = \cos B, \quad c = \cos C,$$

$$\mathscr{A}_+ = \cos\frac{l_A+l_D}{2}, \quad \mathscr{A}_- = \cos\frac{l_A-l_D}{2}, \quad \mathscr{B} = \cos l_B, \quad \mathscr{C} = \cos l_C.$$

Приведенная ниже лемма следует из определения главного параметра u для данного тетраэдра $\mathbf{T}$.

Лемма 2. *Главный параметр тетраэдра* $\mathbf{T}$ *является положительным корнем квадратного уравнения*

$$u^2 - \frac{4\,(a_+a_- + bc)(a_+b + a_-c)(a_+c + a_-b)}{\Delta} = 1,$$

где $\Delta = (a_- - a_+ - b - c)(a_- - a_+ + b + c)(a_+ + a_- - b + c)(a_+ + a_- + b - c)$.

Доказательство. Подставим выражение для величины u из предложения 1. Произведение миноров c_{00} и c_{22} выражается как полином от переменных a_+, a_-, b, c. Проделав необходимые вычисления, убедимся, что равенство верно. $\square$

Аналогичное утверждение справедливо также для дуального параметра v.

Лемма 3. *Дуальный параметр тетраэдра* $\mathbf{T}$ *является положительным корнем квадратного уравнения*

$$v^2 + \frac{4\,(\mathscr{A}_+\mathscr{A}_- - \mathscr{B}\mathscr{C})(\mathscr{A}_+\mathscr{B} - \mathscr{A}_-\mathscr{C})(\mathscr{A}_+\mathscr{C} - \mathscr{A}_-\mathscr{B})}{\Delta^\star} = 1,$$

где

$$\Delta^\star = (\mathscr{A}_+ + \mathscr{A}_- + \mathscr{B} + \mathscr{C})(\mathscr{A}_+ + \mathscr{A}_- - \mathscr{B} - \mathscr{C})(\mathscr{A}_+ - \mathscr{A}_- - \mathscr{B} + \mathscr{C})(\mathscr{A}_+ - \mathscr{A}_- + \mathscr{B} - \mathscr{C}).$$

Сферический тетраэдр $\mathbf{T}$ с двугранными углами A, B, C, D, E, F и длинами ребер l_A, l_B, l_C, l_D, l_E, l_F назовем *симметрическим*, если $A = D$, $B = E$, $C = F$ или, что эквивалентно, $l_A = l_D$, $l_B = l_E$, $l_C = l_F$.

Положим

$$a = \cos A, \quad b = \cos B, \quad c = \cos C, \quad \mathscr{A} = \cos l_A, \quad \mathscr{B} = \cos l_B, \quad \mathscr{C} = \cos l_C.$$

Следующие тригонометрические равенства доказаны в работе [12].

Предложение 2. *Пусть* $\mathbf{T}$ — *симметрический сферический тетраэдр с двугранными углами* $A = D$, $B = E$, $C = F$ *и длинами ребер* $l_A = l_D$, $l_B = l_E$, $l_C = l_F$. *Тогда выполнены равенства*

$$\frac{\sin A}{\sin l_A} = \frac{\sin B}{\sin l_B} = \frac{\sin C}{\sin l_C} = u,$$

где положительный корень квадратного уравнения

$$u^2 - \frac{4(a + bc)(b + ac)(c + ab)}{\Delta} = 1$$

с учетом равенства $\Delta = (1 - a - b - c)(1 - a + b + c)(1 + a - b + c)(1 + a + b - c)$ *является главным параметром тетраэдра* $\mathbf{T}$.

Дуальный параметр v симметрического тетраэдра $\mathbf{T}$ является положительным корнем уравнения

$$v^2 + \frac{4(\mathscr{A} - \mathscr{B}\mathscr{C})(\mathscr{B} - \mathscr{A}\mathscr{C})(\mathscr{C} - \mathscr{A}\mathscr{B})}{\Delta^\star} = 1,$$

где $\Delta^\star = (1 + \mathscr{A} + \mathscr{B} + \mathscr{C})(1 + \mathscr{A} - \mathscr{B} - \mathscr{C})(1 - \mathscr{A} + \mathscr{B} - \mathscr{C})(1 - \mathscr{A} - \mathscr{B} + \mathscr{C})$. Величины Δ и $\Delta^\star$ являются соответственно определителями матрицы Грама симметрического тетраэдра $\mathbf{T}$ и его реберной матрицы. Связь между главным и дуальным параметрами симметрического тетраэдра устанавливает равенство $uv = 1$.

Следующая лемма демонстрирует геометрическое соответствие между $\mathbb{Z}_2$-симметричными и симметрическими сферическими тетраэдрами.

Лемма 4. *Пусть* $\mathbf{T}$ *— сферический* $\mathbb{Z}_2$*-симметричный тетраэдр с двугранными углами* A, $B = E$, $C = F$, D *и длинами ребер* l_A, $l_B = l_E$, $l_C = l_F$, l_D. *Тогда существует ассоциированный с ним симметрический тетраэдр* $\mathbf{T}_s$ *с матрицей Грама*

$$G_s = \begin{pmatrix} 1 & -\cos\alpha & -\cos\beta & -\cos\gamma \\ -\cos\alpha & 1 & -\cos\gamma & -\cos\beta \\ -\cos\beta & -\cos\gamma & 1 & -\cos\alpha \\ -\cos\gamma & -\cos\beta & -\cos\alpha & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a_+}{a_-} & -\frac{b}{a_-} & -\frac{c}{a_-} \\ -\frac{a_+}{a_-} & 1 & -\frac{c}{a_-} & -\frac{b}{a_-} \\ -\frac{b}{a_-} & -\frac{c}{a_-} & 1 & -\frac{a_+}{a_-} \\ -\frac{c}{a_-} & -\frac{b}{a_-} & -\frac{a_+}{a_-} & 1 \end{pmatrix}$$

и реберной матрицей

$$G_s^\star = \begin{pmatrix} 1 & \cos l_\alpha & \cos l_\beta & \cos l_\gamma \\ \cos l_\alpha & 1 & \cos l_\gamma & \cos l_\beta \\ \cos l_\beta & \cos l_\gamma & 1 & \cos l_\alpha \\ \cos l_\gamma & \cos l_\beta & \cos l_\gamma & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\mathscr{A}_+}{\mathscr{A}_-} & \frac{\mathscr{B}}{\mathscr{A}_-} & \frac{\mathscr{C}}{\mathscr{A}_-} \\ \frac{\mathscr{A}_+}{\mathscr{A}_-} & 1 & \frac{\mathscr{C}}{\mathscr{A}_-} & \frac{\mathscr{B}}{\mathscr{A}_-} \\ \frac{\mathscr{B}}{\mathscr{A}_-} & \frac{\mathscr{C}}{\mathscr{A}_-} & 1 & \frac{\mathscr{A}_+}{\mathscr{A}_-} \\ \frac{\mathscr{C}}{\mathscr{A}_-} & \frac{\mathscr{B}}{\mathscr{A}_-} & \frac{\mathscr{A}_+}{\mathscr{A}_-} & 1 \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Обозначим главные миноры матрицы G_s через s_{ii}, $i = 0, 1, 2, 3$. Поскольку тетраэдр $\mathbf{T}_s$ симметрический, данные миноры равны друг другу. Для доказательства существования тетраэдра $\mathbf{T}_s$ в силу теоремы 1 достаточно показать, что $\det G_s > 0$ и $s_{00} > 0$. Заметим, что выполнены равенства $\det G_s = \frac{\det G}{a_-^4} > 0$, а также

$$s_{00} - \frac{c_{00}}{a_-^2} = -\frac{2}{a_-^2}(a_+a_- + bc)\sin\frac{D-A}{2}\sin A,$$

$$s_{00} - \frac{c_{22}}{a_-^2} = \frac{2}{a_-^2}(a_+a_- + bc)\sin\frac{D-A}{2}\sin D.$$

В зависимости от правых частей двух последних равенств получим $s_{00} \geq \frac{c_{00}}{a_-^2}$ либо $s_{00} \geq \frac{c_{22}}{a_-^2}$. Поскольку тетраэдр $\mathbf{T}$ существует, $c_{00} > 0$ и $c_{22} > 0$. Следовательно, $s_{00} = s_{11} = s_{22} = s_{33} > 0$. Таким образом, ассоциированный симметрический тетраэдр $\mathbf{T}_s$ также существует.

Для двугранных углов симметричного сферического тетраэдра $\mathbf{T}_s$ имеем

$$\cos\alpha = \frac{a_+}{a_-}, \quad \cos\beta = \frac{b}{a_-}, \quad \cos\gamma = \frac{c}{a_-}.$$

Покажем, что

$$\cos l_\alpha = \frac{\mathscr{A}_+}{\mathscr{A}_-}, \quad \cos l_\beta = \frac{\mathscr{B}}{\mathscr{A}_-}, \quad \cos l_\gamma = \frac{\mathscr{C}}{\mathscr{A}_-}.$$

Используя предложение 1 и лемму 2, получим, что главные параметры u и u_s тетраэдров $\mathbf{T}$ и $\mathbf{T}_s$ соответственно связаны соотношением

$$u^2 - 1 = a_-^2\left(u_s^2 - 1\right).$$

Подставим $u = \frac{\sin\frac{A+D}{2}}{\sin\frac{l_A+l_D}{2}}$ из предложения 1 и $u_s = \frac{\sin\alpha}{\sin l_\alpha}$ из предложения 2 в приведенное выше равенство. Тогда

$$\cos^2 l_\alpha = \frac{\cos^2\frac{l_A+l_D}{2}}{1 - \frac{\sin^2\frac{l_A-l_D}{2}}{u^2}} = \frac{\cos^2\frac{l_A+l_D}{2}}{\cos^2\frac{l_A-l_D}{2}} = \frac{\mathscr{A}_+^2}{\mathscr{A}_-^2}.$$

Следовательно,

$$\cos l_\alpha = \pm \frac{\cos \frac{l_A + l_D}{2}}{\cos \frac{l_A - l_D}{2}} = \pm \frac{\mathscr{A}_+}{\mathscr{A}_-}.$$

В полученном равенстве необходимо выбрать знак перед дробью. Для этого заметим, что если тетраэдр $\mathbf{T}$ симметрический, т. е. $l_A = l_D$, то $G_s = G$. Следовательно, $\mathbf{T}$ изометричен своему ассоциированному симметрическому $\mathbf{T}_s$. Тогда реберные матрицы тетраэдров $\mathbf{T}$ и $\mathbf{T}_s$, приведенные в условии теоремы, совпадают. Для того чтобы равенство $G_s^\star = G^\star$ выполнялось в случае, когда тетраэдр $\mathbf{T}$ симметрический, положим

$$\cos l_\alpha = \frac{\cos \frac{l_A + l_D}{2}}{\cos \frac{l_A - l_D}{2}} = \frac{\mathscr{A}_+}{\mathscr{A}_-}.$$

Остальные равенства доказываются аналогично. $\square$

Обозначим

$$t^2 = u^2 - 1 = \frac{4\,(a_+a_- + bc)(a_+b + a_-c)(a_+c + a_-b)}{\Delta},$$

$$\tau^2 = 1 - v^2 = \frac{4\,(\mathscr{A}_+\mathscr{A}_- - \mathscr{B}\mathscr{C})(\mathscr{A}_+\mathscr{B} - \mathscr{A}_-\mathscr{C})(\mathscr{A}_+\mathscr{C} - \mathscr{A}_-\mathscr{B})}{\Delta^\star}.$$

В силу леммы 2 величина t является либо вещественным, либо мнимым числом. Мы выберем число t так, чтобы оно являлось либо неотрицательным вещественным, либо имело неотрицательную мнимую часть. Аналогично выберем число τ и заметим, что из предложения 1 следует равенство $\tau = t/u$. Следовательно, числа t и τ одновременно либо положительные вещественные, либо мнимые.

Величина t связана с параметрами a_+, a_-, b и c тетраэдра $\mathbf{T}$ следующим образом.

Лемма 5. *Пусть $\mathbf{T}$ — сферический $\mathbb{Z}_2$-симметричный тетраэдр с двугранными углами A, $B = E$, $C = F$, D и длинами ребер l_A, $l_B = l_E$, $l_C = l_F$, l_D. Тогда выполнены равенства*

(i) $a_-^2 + t^2 = a_-^6\,\frac{(s_{00})^2}{\Delta}$;

(ii) $a_+^2 + t^2 = a_-^6\,\frac{(s_{01})^2}{\Delta}$;

(iii) $b^2 + t^2 = a_-^6\,\frac{(s_{02})^2}{\Delta}$;

(iv) $c^2 + t^2 = a_-^6\,\frac{(s_{03})^2}{\Delta}$,

где величины s_{ij}, $i, j = 0, 1, 2, 3$, являются (i, j)-минорами матрицы

$$G_s = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a_+}{a_-} & -\frac{b}{a_-} & -\frac{c}{a_-} \\ -\frac{a_+}{a_-} & 1 & -\frac{c}{a_-} & -\frac{b}{a_-} \\ -\frac{b}{a_-} & -\frac{c}{a_-} & 1 & -\frac{a_+}{a_-} \\ -\frac{c}{a_-} & -\frac{b}{a_-} & -\frac{a_+}{a_-} & 1 \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Подставляя приведенное выше выражение для t^2 и производя необходимые вычисления, получим утверждение леммы. $\square$

Следующее предложение позволяет определить знаки соответствующих миноров c_{ij} и $c_{ij}^\star$, $i, j = 0, 1, 2, 3$, матрицы Грама $G = \{g_{ij}\}_{i,j=0}^3$ и реберной матрицы $G^\star = \{g_{ij}^\star\}_{i,j=0}^3$ тетраэдра $\mathbf{T}$ в зависимости от знаков их компонент.

Предложение 3. *Между соответствующими компонентами и минорами матрицы Грама и реберной матрицы сферического тетраэдра* $\mathbf{T}$ *выполнены соотношения*

- $g_{ij}c^\star_{ij} \geq 0$,
- $g^\star_{ij}c_{ij} \geq 0$,

где $i, j = 0, 1, 2, 3$.

Доказательство. По формулам сферической геометрии (см. [5])

$$g_{ij} = \frac{c^\star_{ij}}{\sqrt{c^\star_{ii}c^\star_{jj}}}, \quad g^\star_{ij} = \frac{c_{ij}}{\sqrt{c_{ii}c_{jj}}}$$

и $c_{ii} > 0$, $c^\star_{ii} > 0$ для $i, j = 0, 1, 2, 3$. Таким образом,

$$g_{ij}c^\star_{ij} = \frac{(c^\star_{ij})^2}{\sqrt{c^\star_{ii}c^\star_{jj}}} \geq 0, \quad g^\star_{ij}c_{ij} = \frac{c^2_{ij}}{\sqrt{c_{ii}c_{jj}}} \geq 0,$$

где $i, j = 0, 1, 2, 3$. $\square$

В лемме 6 приведены некоторые полезные соотношения, используемые в дальнейшем.

Лемма 6. *Выполнены равенства*

(i) $\operatorname{Re}\sinh^{-1}(x) + \operatorname{Re}\sinh^{-1}(y) = \operatorname{Re}\sinh^{-1}(x\sqrt{y^2+1} + y\sqrt{x^2+1})$, *где* $x, y \in \mathbb{R}$, $x, y \geq 0$,

(ii) $\operatorname{Re}\sinh^{-1}(x) - \operatorname{Re}\sinh^{-1}(y) = \operatorname{Re}\sinh^{-1}(x\sqrt{y^2+1} - y\sqrt{x^2+1})$, *где* $x, y \in \mathbb{R}$, $x, y \geq 0$,

(iii) $\operatorname{Re}\sinh^{-1}(x) + \operatorname{Re}\sinh^{-1}(y) = \operatorname{Re}\sinh^{-1}(x\sqrt{y^2-1} + y\sqrt{x^2-1})$, *где* $x, y \in i\mathbb{R}$, $\operatorname{Im} x, \operatorname{Im} y \geq 0$,

(iv) $\operatorname{Re}\sinh^{-1}(x) - \operatorname{Re}\sinh^{-1}(y) = \operatorname{Re}\sinh^{-1}(-x\sqrt{y^2-1} + y\sqrt{x^2-1})$, *где* $x, y \in i\mathbb{R}$, $\operatorname{Im} x, \operatorname{Im} y \geq 0$.

Доказательство. Равенства (i)–(iv) для вещественных частей соответствующих алгебраических выражений устанавливаются с использованием логарифмического представления функции $\sinh^{-1}(\circ)$ и свойства комплексного логарифма $\log(\circ)$. $\square$

Для доказательства формулы объема сферического $\mathbb{Z}_2$-симметричного тетраэдра нам понадобятся следующие соотношения.

Предложение 4. *Пусть* $\mathbf{T}$ — *сферический* $\mathbb{Z}_2$-*симметричный тетраэдр с двугранными углами* A, $B = E$, $C = F$, D *и длинами ребер* l_A, $l_B = l_E$, $l_C = l_F$, l_D. *Без потери общности рассмотрения предположим, что* $l_A \geq l_D$ *(эквивалентно* $D \geq A$*) и* $l_B \leq l_C$.

Тогда выполнены следующие равенства:

(i) *если* $l_A + l_D \leq \pi$, $l_B \leq \frac{\pi}{2}$, $l_C \leq \frac{\pi}{2}$ *и* $t^2 \geq 0$, *то*

$$\operatorname{Re}\left(\sinh^{-1}\frac{a_+}{t} + \sinh^{-1}\frac{b}{t} + \sinh^{-1}\frac{c}{t} - \sinh^{-1}\frac{a_-}{t}\right) = 0,$$

(ii) *если* $l_A + l_D \leq \pi$, $l_B \leq \frac{\pi}{2}$, $l_C \geq \frac{\pi}{2}$, *то* $t^2 \leq 0$ *и*

$$\operatorname{Re}\left(\sinh^{-1}\frac{a_+}{t} + \sinh^{-1}\frac{b}{t} - \sinh^{-1}\frac{c}{t} - \sinh^{-1}\frac{a_-}{t}\right) = 0,$$

(iii) *если* $l_A + l_D \leq \pi$, $l_B \geq \frac{\pi}{2}$, $l_C \geq \frac{\pi}{2}$ *и* $t^2 \geq 0$, *то*

$$\operatorname{Re}\left(\sinh^{-1}\frac{a_+}{t} - \sinh^{-1}\frac{b}{t} - \sinh^{-1}\frac{c}{t} - \sinh^{-1}\frac{a_-}{t}\right) = 0,$$

(iv) *если* $l_A + l_D \geq \pi$, $l_B \leq \frac{\pi}{2}$, $l_C \leq \frac{\pi}{2}$, *то* $t^2 \leq 0$ *и*

$$\mathrm{Re}\left(-\sinh^{-1}\frac{a_+}{t} + \sinh^{-1}\frac{b}{t} + \sinh^{-1}\frac{c}{t} - \sinh^{-1}\frac{a_-}{t}\right) = 0,$$

(v) *если* $l_A + l_D \geq \pi$, $l_B \leq \frac{\pi}{2}$, $l_C \geq \frac{\pi}{2}$ *и* $t^2 \geq 0$, *то*

$$\mathrm{Re}\left(-\sinh^{-1}\frac{a_+}{t} + \sinh^{-1}\frac{b}{t} - \sinh^{-1}\frac{c}{t} - \sinh^{-1}\frac{a_-}{t}\right) = 0,$$

(vi) *если* $l_A + l_D \geq \pi$, $l_B \geq \frac{\pi}{2}$, $l_C \geq \frac{\pi}{2}$, *то* $t^2 \leq 0$ *и*

$$\mathrm{Re}\left(\sinh^{-1}\frac{a_+}{t} + \sinh^{-1}\frac{b}{t} + \sinh^{-1}\frac{c}{t} + \sinh^{-1}\frac{a_-}{t}\right) = 0.$$

Доказательство. Рассмотрим случай (i). Для матрицы G_s верно следующее равенство:

$$\frac{c}{a_-}s_{00} + \frac{b}{a_-}s_{01} + \frac{a_+}{a_-}s_{02} - s_{03} = 0.$$

Из предложения 3 и леммы 4 следует, что

$$s_{00} \geq 0, \quad s_{01}\mathscr{A}_+ \geq 0, \quad s_{02}\mathscr{B} \geq 0, \quad s_{03}\mathscr{C} \geq 0,$$

где все величины

$$\mathscr{A}_+ = \cos\frac{l_A + l_D}{2}, \quad \mathscr{A}_- = \cos\frac{l_D - l_A}{2}, \quad \mathscr{B} = \cos l_B, \quad \mathscr{C} = \cos l_C$$

положительны в предположениях рассматриваемого случая (i). Таким образом,

$$s_{00} \geq 0, \quad s_{01} \geq 0, \quad s_{02} \geq 0, \quad s_{03} \geq 0,$$

и по лемме 5

$$\sqrt{a_-^2 + t^2} = a_-^3\frac{s_{00}}{\sqrt{\Delta}}, \quad \sqrt{a_+^2 + t^2} = a_-^3\frac{s_{01}}{\sqrt{\Delta}},$$

$$\sqrt{b^2 + t^2} = a_-^3\frac{s_{02}}{\sqrt{\Delta}}, \quad \sqrt{c^2 + t^2} = a_-^3\frac{s_{03}}{\sqrt{\Delta}}.$$

Следовательно, выполнено равенство

$$a_+\sqrt{b^2 + t^2} + b\sqrt{a_+^2 + t^2} = c\sqrt{a_-^2 + t^2} - a_-\sqrt{c^2 + t^2}.$$

Предположим, что $t \neq 0$, тогда

$$\frac{b}{t}\sqrt{\frac{a_+^2}{t^2} + 1} + \frac{a_+}{t}\sqrt{\frac{b^2}{t^2} + 1} = \frac{c}{t}\sqrt{\frac{a_-^2}{t^2} + 1} - \frac{a_-}{t}\sqrt{\frac{c^2}{t^2} + 1}.$$

Применив к обеим частям последнего равенства функцию $\sinh^{-1}(\circ)$ и используя соотношения (i), (ii) из леммы 6, получим равенство (i) из формулировки настоящего предложения. В случае $t \to 0$ равенство выполнено в смысле предельного перехода. Доказательство для случаев (iii) и (v) аналогично.

При рассмотрении случаев (ii), (iv), (vi) заметим, что в силу условий на параметры l_A, l_B, l_C, l_D величина τ является мнимым числом и $\mathrm{Im}\,\tau \geq 0$. Тогда величина t также чисто мнимая и $\mathrm{Im}\,t \geq 0$. Дальнейшие рассуждения проводятся аналогично случаям (i), (iii) и (v) с учетом соотношений (iii), (iv) из леммы 6. $\square$

Предложение 5. *Пусть* $\mathbf{T}$ — *сферический* $\mathbb{Z}_2$*-симметричный тетраэдр с двугранными углами* A, $B = E$, $C = F$, D *и длинами ребер* l_A, $l_B = l_E$, $l_C = l_F$, l_D. *Без потери общности рассмотрения предположим, что* $A \geq D$ (*эквивалентно* $l_D \geq l_A$) *и* $B \geq C$.

Тогда в случаях

(i)* $l_A + l_D \leq \pi$, $l_B \leq \frac{\pi}{2}$, $l_C \leq \frac{\pi}{2}$ *и* $t^2 \leq 0$,

(ii)* $l_A + l_D \leq \pi$, $l_B \geq \frac{\pi}{2}$, $l_C \geq \frac{\pi}{2}$ *и* $t^2 \leq 0$,

(iii)* $l_A + l_D \geq \pi$, $l_B \leq \frac{\pi}{2}$, $l_C \geq \frac{\pi}{2}$ *и* $t^2 \leq 0$

предложение 4 справедливо для тетраэдра $\mathbf{T}^\star$, *двойственного данному.*

Доказательство. В силу равенства

$$t^2 = \frac{4\,(a_+a_- + bc)(a_+b + a_-c)(a_+c + a_-b)}{\Delta},$$

где $a_+ = \cos\frac{A+D}{2}$, $b = \cos B$, $c = \cos C$, $a_- = \cos\frac{D-A}{2}$, параметр t может быть мнимым числом только в случае, когда не все три величины a_+, b, c положительны.

Без ограничения общности рассмотрим три случая:

(i)** $A + D \geq \pi$, $B \geq \frac{\pi}{2}$, $C \geq \frac{\pi}{2}$,

(ii)** $A + D \geq \pi$, $B \leq \frac{\pi}{2}$, $C \leq \frac{\pi}{2}$,

(iii)** $A + D \leq \pi$, $B \geq \frac{\pi}{2}$, $C \leq \frac{\pi}{2}$.

В каждом из них длины ребер двойственного тетраэдра $\mathbf{T}^\star$ удовлетворяют условиям (i), (iii), (v) предложения 4 соответственно. При этом для параметра $\tau^\star$ тетраэдра $\mathbf{T}^\star$, вычисленного по длинам его сторон, верно равенство $(\tau^\star)^2 = -t^2 \geq 0$. Тогда параметр $t^\star$ двойственного тетраэдра $\mathbf{T}^\star$, вычисленный по его двугранным углам, также удовлетворяет условию $(t^\star)^2 \geq 0$.

Таким образом, тетраэдр $\mathbf{T}^\star$, двойственный данному в условиях предложения, удовлетворяет одному из случаев (i), (iii), (v) предложения 4. $\square$

5.2. Формула объема для $\mathbb{Z}_2$**-симметричного сферического тетраэдра.** Пусть $\mathbf{T}$ — сферический $\mathbb{Z}_2$-симметричный тетраэдр с двугранными углами A, $B = E$, $C = F$, D и длинами ребер l_A, $l_B = l_E$, $l_C = l_F$, l_D. Введем обозначения:

$$A^+ = \frac{A+D}{2}, \quad A^- = \frac{D-A}{2}, \quad l_A^+ = \frac{l_A + l_D}{2}, \quad l_A^- = \frac{l_A - l_D}{2},$$
$$a_+ = \cos A^+, \quad a_- = \cos A^-, \quad b = \cos B, \quad c = \cos C.$$

Главный параметр тетраэдра $\mathbf{T}$ является положительным корнем квадратного уравнения

$$u^2 - \frac{4\,(a_+a_- + bc)(a_+b + a_-c)(a_+c + a_-b)}{\Delta} = 1,$$

где

$$\Delta = (a_- - a_+ - b - c)(a_- - a_+ + b + c)(a_- + a_+ - b + c)(a_- + a_+ + b - c).$$

Вспомогательный параметр t из соотношений предложения 4 удовлетворяет равенству

$$t^2 = u^2 - 1 = \frac{4\,(a_+a_- + bc)(a_+b + a_-c)(a_+c + a_-b)}{\Delta}.$$

Без потери общности предположим, что $l_A \leq l_D$ (эквивалентно $D \geq A$) и $l_B \leq l_C$. Тогда тетраэдр $\mathbf{T}$ удовлетворяет одному из перечисленных ниже условий:

(i) $l_A^+ \leq \frac{\pi}{2}$, $l_B \leq \frac{\pi}{2}$, $l_C \leq \frac{\pi}{2}$ и $t^2 \geq 0$,

(i)* $l_A^+ \le \frac{\pi}{2}$, $l_B \le \frac{\pi}{2}$, $l_C \le \frac{\pi}{2}$ и $t^2 \le 0$,
(ii) $l_A^+ \le \frac{\pi}{2}$, $l_B \le \frac{\pi}{2}$, $l_C \ge \frac{\pi}{2}$,
(iii) $l_A^+ \le \frac{\pi}{2}$, $l_B \ge \frac{\pi}{2}$, $l_C \ge \frac{\pi}{2}$ и $t^2 \ge 0$,
(iii)* $l_A^+ \le \frac{\pi}{2}$, $l_B \ge \frac{\pi}{2}$, $l_C \ge \frac{\pi}{2}$ и $t^2 \le 0$,
(iv) $l_A^+ \ge \frac{\pi}{2}$, $l_B \le \frac{\pi}{2}$, $l_C \le \frac{\pi}{2}$,
(v) $l_A^+ \ge \frac{\pi}{2}$, $l_B \le \frac{\pi}{2}$, $l_C \ge \frac{\pi}{2}$ и $t^2 \ge 0$,
(v)* $l_A^+ \ge \frac{\pi}{2}$, $l_B \le \frac{\pi}{2}$, $l_C \ge \frac{\pi}{2}$ и $t^2 \le 0$,
(vi) $l_A^+ \ge \frac{\pi}{2}$, $l_B \ge \frac{\pi}{2}$, $l_C \ge \frac{\pi}{2}$.

Определим следующую вспомогательную функцию для $(\phi, u) \in \mathbb{R}^2$:

$$\mathrm{V}(\phi, u) = \frac{1}{2} \int\limits_{\phi}^{\pi/2} \operatorname{Im} \log \frac{1 - i\sqrt{u^2/\sin^2\sigma - 1}}{1 + i\sqrt{u^2/\sin^2\sigma - 1}}\, \mathrm{d}\sigma.$$

В предыдущем равенстве аналитическая ветвь логарифма выбрана на комплексной плоскости с разрезом вдоль полуоси $(-\infty, 0)$. Свойства функции $\mathrm{V}(\circ, \circ)$ будут изложены подробно в следующем разделе.

Положим $\mathscr{F} = (A^+ + B + C - A^-) - \pi$,

$$\mathscr{V} = \operatorname{sgn}\left(\frac{\pi}{2} - l_A^+\right) \mathrm{V}(A^+,\, u) + \operatorname{sgn}\left(\frac{\pi}{2} - l_B\right) \mathrm{V}(B,\, u) + \operatorname{sgn}\left(\frac{\pi}{2} - l_C\right) \mathrm{V}(C,\, u) - \mathrm{V}(A^-,\, u),$$

где $\operatorname{sgn}(\circ)$ — функция знака числа.

Теорема 8. *Пусть* $\mathbf{T}$ *— сферический* $\mathbb{Z}_2$*-симметричный тетраэдр с двугранными углами* A, $B = E$, $C = F$, D *и длинами ребер* l_A, $l_B = l_E$, $l_C = l_F$, l_D. *Без потери общности предположим, что* $l_A \ge l_D$ (*эквивалентно* $D \ge A$) *и* $l_B \le l_C$. *Тогда если тетраэдр удовлетворяет условию* $t^2 \ge 0$, *то его объем выражается формулой*

$$\operatorname{Vol} \mathbf{T} = \frac{\pi \mathscr{F}}{2} - \mathscr{V}.$$

Доказательство. Покажем, что

(1) функция $\operatorname{Vol}\mathbf{T}$ удовлетворяет дифференциальному равенству Шлефли,

(2) функция $\operatorname{Vol}\mathbf{T}$, вычисленная для тетраэдра $\mathbf{T}$ с двугранными углами $A = B = C = D = \pi/2$, равна $\pi^2/8$.

Рассмотрим случай (i): $0 \le l_A^+ \le \pi/2$, $0 \le l_B \le \pi/2$, $0 \le l_C \le \pi/2$. Из условий теоремы следует, что $0 \le l_A^- \le \pi/2$. Таким образом,

$$\mathscr{V} = \mathrm{V}(A^+, u) + \mathrm{V}(B, u) + \mathrm{V}(C, u) - \mathrm{V}(A^-, u).$$

Заметим, что если $u \ge 0$ и $0 \le \phi \le \pi$, то выполнено равенство

$$\mathrm{V}(\phi, u) = \int\limits_{\phi}^{\pi/2} \operatorname{Re} \sin^{-1} \frac{\sin\sigma}{u}\, \mathrm{d}\sigma + \frac{\pi}{2}\left(\phi - \frac{\pi}{2}\right).$$

Тогда данная в формулировке теоремы функция представима в виде

$$\operatorname{Vol}\mathbf{T} = -\int\limits_{A^+}^{\pi/2} \operatorname{Re}\sin^{-1}\frac{\sin\sigma}{u}\,\mathrm{d}\sigma - \int\limits_{B}^{\pi/2} \operatorname{Re}\sin^{-1}\frac{\sin\sigma}{u}\,\mathrm{d}\sigma - \int\limits_{C}^{\pi/2} \operatorname{Re}\sin^{-1}\frac{\sin\sigma}{u}\,\mathrm{d}\sigma + \int\limits_{A^-}^{\pi/2} \operatorname{Re}\sin^{-1}\frac{\sin\sigma}{u}\,\mathrm{d}\sigma.$$

Аналитическая ветвь функции $\sin^{-1}(\circ)$ выбрана на комплексной плоскости с разрезами вдоль лучей $(-\infty,-1)$ и $(1,\infty)$.

Доказав, что верно дифференциальное равенство

$$\mathrm{d}\operatorname{Vol}\mathbf{T} = \frac{1}{2}l_A\mathrm{d}A + l_B\mathrm{d}B + l_C\mathrm{d}C + \frac{1}{2}l_D\mathrm{d}D,$$

получим, что условие (1) выполнено. Действительно, вычислим частную производную

$$\frac{\partial\operatorname{Vol}\mathbf{T}}{\partial A} = \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{\sin A^+}{u} + \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{\sin A^-}{u} - \frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial A}\mathrm{F}(A^+,B,C,A^-,u),$$

где

$$\mathrm{F}(A^+,B,C,A^-,u) = \operatorname{Re}\left(\sinh^{-1}\frac{\cos A^+}{\sqrt{u^2-1}} + \sinh^{-1}\frac{\cos B}{\sqrt{u^2-1}} + \sinh^{-1}\frac{\cos C}{\sqrt{u^2-1}} - \sinh^{-1}\frac{\cos A^-}{\sqrt{u^2-1}}\right).$$

Из предложения 4 следует, что $\mathrm{F}(A^+,B,C,A^-,u)=0$. Тогда в силу предложения 1

$$\frac{\partial\operatorname{Vol}\mathbf{T}}{\partial A} = \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{\sin A^+}{u} + \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{\sin A^-}{u} = \frac{1}{2}\sin^{-1}\sin l_A^+ + \frac{1}{2}\sin^{-1}\sin l_A^- = \frac{1}{2}\frac{l_A+l_D}{2} + \frac{1}{2}\frac{l_A-l_D}{2} = \frac{l_A}{2}.$$

При этом принимаем во внимание, что

$$\sin^{-1}\sin x = \begin{cases} x, & \text{если } 0\le x\le \pi/2,\\ \pi - x, & \text{если } \pi/2\le x\le\pi.\end{cases} \tag{$*$}$$

Аналогично предыдущим вычислениям получим

$$\frac{\partial\operatorname{Vol}\mathbf{T}}{\partial B} = l_B, \quad \frac{\partial\operatorname{Vol}\mathbf{T}}{\partial C} = l_C, \quad \frac{\partial\operatorname{Vol}\mathbf{T}}{\partial D} = \frac{l_D}{2}.$$

Следовательно, условие (1) выполнено.

Подставим

$$A^+ = B = C = \frac{\pi}{2},\ A^- = 0, \quad l_A^+ = l_B = l_C = \frac{\pi}{2},\ l_A^- = 0$$

в формулу из условия теоремы. Получим, что

$$\operatorname{Vol}\mathbf{T} = \pi^2/8$$

и условие (2) также выполнено. Следовательно, для случая (i) теорема доказана.

Доказательство для случаев (ii)–(vi) аналогично. □

В оставшихся случаях (i)*, (iii)* и (v)* справедлива

Теорема 9. *Пусть* $\mathbf{T}$ *— сферический* $\mathbb{Z}_2$*-симметричный тетраэдр с двугранными углами* A, $B = E$, $C = F$, D *и длинами ребер* l_A, $l_B = l_E$, $l_C = l_F$, l_D. *Без потери общности предположим, что* $A \geq D$ *(эквивалентно* $l_D \geq l_A$*) и* $B \geq C$. *Тогда если тетраэдр* $\mathbf{T}$ *удовлетворяет условию* $t^2 \leq 0$, *то утверждение теоремы* 8 *справедливо для тетраэдра* $\mathbf{T}^\star$, *двойственного данному.*

Доказательство. Рассуждения аналогичны доказательству теоремы 8 с заменой предложения 4 предложением 5 при проверке дифференциального равенства Шлефли. □

Для нахождения объема тетраэдра $\mathbf{T}$, удовлетворяющего условиям теоремы 9, применим теорему 8 к двойственному тетраэдру $\mathbf{T}^\star$, а затем используем формулу Сфорца из теоремы 4.

5.3. Вычисление некоторых объемов. Из леммы 8, приведенной в следующем пункте, вытекает, что в случае $u = 1$ функция $\mathrm{V}(\phi, u)$ выражается через элементарные функции. Тогда и объем данного сферического тетраэдра с главным параметром $u = 1$ может быть выражен в элементарных функциях. Равенство $u = 1$ равносильно $t = 0$ в силу связи между этими параметрами $t^2 = u^2 - 1$ и неотрицательности параметра u.

Для данного тетраэдра $\mathbf{T}$ с параметром $t = 0$ рассмотрим соответствующий симметрический $\mathbf{T}_s$ с параметром $t_s = 0$ в силу соотношения $t = a_- t_s$ между величинами t и t_s, установленного в доказательстве леммы 4. По лемме 4 имеем

$$t_s = \frac{4(a + bc)(b + ac)(c + ab)}{\Delta},$$

где $\Delta = \det G_s$ — определитель матрицы Грама G_s тетраэдра $\mathbf{T}_s$. Также выполнены равенства

$$a = \cos\alpha = \frac{a_+}{a_-}, \quad b = \cos\beta = \frac{b}{a_-}, \quad c = \cos\gamma = \frac{c}{a_-}.$$

Равенство $t_s = 0$ равносильно следующим трем случаям: либо $a + bc = 0$, либо $b + ac = 0$, либо $c + ab = 0$. Заметим, что одновременно все три равенства выполняются в случае $a = b = c = \pm 1$, когда тетраэдр $\mathbf{T}$ вырожден, и в случае $a = b = c = 0$, когда тетраэдры $\mathbf{T}$ и $\mathbf{T}_s$ изометричны сферическому тетраэдру, все двугранные углы которого прямые. Пусть теперь выполнены любые два равенства выше. Не ограничивая общности рассмотрения, предположим, что $b + ac = 0$ и $c + ab = 0$. Если тетраэдр $\mathbf{T}_s$ невырожденный, то получим, что $b = c = 0$. Такие тетраэдры $\mathbf{T}_s$ образуют двупараметрическое семейство с двугранными углами $0 < \alpha < \pi$, $\beta = \gamma = \frac{\pi}{2}$. Тетраэдр $\mathbf{T}$ в этом случае имеет двугранные углы $0 < A,\ D < \pi$, $B = C = \frac{\pi}{2}$.

Пусть для тетраэдра $\mathbf{T}_s$ выполнено только одно из равенств без ограничения общности $a + bc = 0$. По лемме 4 и формулам сферической геометрии (см. [5]) получим

$$\cos l_\alpha = -a, \quad \cos l_\beta = b, \quad \cos l_\gamma = c.$$

Тогда для исходного тетраэдра $\mathbf{T}$ имеем следующие неравенства:

$$\cos l_A^+ \cos A^+ \leq 0, \quad \cos l_B \cos B \geq 0, \quad \cos l_C \cos C \geq 0.$$

Применяя теорему 1 к тетраэдру $\mathbf{T}$ с главным параметром $u = 1$, получим

$$\sin l_A^+ = \sin A^+, \quad \sin l_B = \sin B, \quad \sin l_C = \sin C, \quad \sin l_A^- = \sin A^-.$$

В силу приведенных выше неравенств

$$l_A^+ = \pi - A^+, \quad l_B = B, \quad l_C = C, \quad l_A^- = A^-$$

или

$$l_A = \pi - A, \quad l_B = B, \quad l_C = C, \quad l_D = \pi - D.$$

Аналогично рассмотрим оставшиеся два случая. Кроме того, заметим, что они эквивалентны с точностью до взаимной перестановки обозначений двугранных углов B и C исходного тетраэдра $\mathbf{T}$.

Следовательно, в случае, если выполнено одно из равенств $b + ac = 0$ либо $c + ab = 0$, имеем

$$l_A = D, \quad l_B = \pi - B, \quad l_C = C, \quad l_D = A,$$
$$l_A = D, \quad l_B = B, \quad l_C = \pi - C, \quad l_D = A$$

соответственно.

Заметим, что тетраэдр, все двугранные углы которого прямые, принадлежит каждому из трех указанных выше семейств. Также двупараметрическое семейство тетраэдров с двугранными углами $0 < A,\ D < \pi$, $B = C = \frac{\pi}{2}$ является подслучаем указанных выше случаев.

Предложение 6. *Пусть* $\mathbf{T}$ *— сферический* $\mathbb{Z}_2$*-симметричный тетраэдр. Предположим, что выполнено одно из равенств*

$$\cos A^+ \cos A^- + \cos B \cos C = 0, \quad \cos B \cos A^- + \cos A^+ \cos C = 0,$$
$$\cos C \cos A^- + \cos A^+ \cos B = 0.$$

Тогда объем тетраэдра $\mathbf{T}$ *выражается одной из формул*

$$\operatorname{Vol}\mathbf{T} = \frac{1}{2}\left(\frac{A(2\pi - A)}{2} + B^2 + C^2 + \frac{D(2\pi - D)}{2} - \pi^2\right),$$

$$\operatorname{Vol}\mathbf{T} = \frac{1}{2}(AD + B(2\pi - B) + C^2 - \pi^2), \quad \operatorname{Vol}\mathbf{T} = \frac{1}{2}(AD + B^2 + C(2\pi - C) - \pi^2)$$

соответственно.

Доказательство. Пусть выполнено первое соотношение. Тогда, как следует из предыдущего рассмотрения, выполнены равенства $l_A = \pi - A$, $l_B = B$, $l_C = C$, $l_D = \pi - D$. Кроме того, главный параметр тетраэдра $\mathbf{T}$ удовлетворяет равенству $u = 1$. Применим теорему 8 и лемму 8, выразив функцию объема тетраэдра через элементарные функции. Производя необходимые вычисления, получим первую формулу объема из формулировки предложения.

В случае, когда выполнено какое-либо из оставшихся равенств, доказательство проводится аналогично. $\square$

5.4. Свойства функции $\mathrm{V}(\phi, u)$**.** Некоторые свойства функции

$$\mathrm{V}(\phi, u) = \frac{1}{2}\int_{\phi}^{\pi/2} \operatorname{Im}\log\frac{1 - i\sqrt{u^2/\sin^2\sigma - 1}}{1 + i\sqrt{u^2/\sin^2\sigma - 1}}\,\mathrm{d}\sigma,$$

где $(\phi, u) \in \mathbb{R}^2$, приведены ниже в виде леммы.

Лемма 7. *Функция* $\mathrm{V}(\phi, u)$ *удовлетворяет следующим свойствам.*
(i) $\mathrm{V}(\phi, u)$ *непрерывна и п. в. дифференцируема в* $\mathbb{R}^2$.
Для всех $(\phi, u) \in \mathbb{R}^2$
(ii) $\mathrm{V}(\phi, u) = \mathrm{V}(\phi, -u)$,
(iii) $\mathrm{V}(\pi - \phi, u) = -\mathrm{V}(\phi, u)$,
(iv) $\mathrm{V}(\phi, u) + \mathrm{V}(-\phi, u) = 2\,\mathrm{V}(0, u)$.
Функция $\mathrm{V}(\phi, u)$ *линейно периодична по переменной* ϕ, *т. е.*

(v) $\mathrm{V}(\phi+k\pi,u)=\mathrm{V}(\phi,u)-2k\mathrm{V}(0,u)$ *для всех* $k\in\mathbb{Z}$.

Доказательство. Свойства (i)–(iii), очевидно, следуют из определения функции $\mathrm{V}(\phi,u)$.

Для доказательства свойства (iv) заметим, что при $\phi=0$ равенство выполнено. Из определения функции $\mathrm{V}(\phi,u)$ вытекает, что производные обеих частей равенства (iv) по переменной ϕ равны нулю. Таким образом, требуемое равенство выполнено.

Производные обеих частей равенства (v) по переменной ϕ совпадают. Проверив соответствующее равенство при $\phi=0$, тем самым докажем свойство (v). В силу равенств (iii) и (iv) получим, что

$$\mathrm{V}(k\pi+\pi,u)=-\mathrm{V}(-k\pi,u),\quad -\mathrm{V}(-k\pi,u)=\mathrm{V}(k\pi,u)-2\mathrm{V}(0,u),$$

где $k\in\mathbb{Z}$. Следовательно,

$$\mathrm{V}(k\pi+\pi,u)=\mathrm{V}(k\pi,u)-2\mathrm{V}(0,u)=\dots=\mathrm{V}(0,u)-2(k+1)\mathrm{V}(0,u),$$

и равенство (v) выполнено. $\square$

В случае, когда $u=1$, для $\mathrm{V}(\phi,1)$ существует следующее выражение через элементарные функции.

Лемма 8. *При* $u=1$ *для* $\mathrm{V}(\phi,u)$, $0\le\phi\le\pi$, *выполнено равенство*

$$\mathrm{V}(\phi,1)=\frac{1}{2}\left(\phi-\frac{\pi}{2}\right)\left|\phi-\frac{\pi}{2}\right|.$$

Доказательство. Заметим, что при $u\ge 0$ и $0\le\phi\le\pi$ для функции $\mathrm{V}(\phi,u)$ справедливо следующее представление:

$$\mathrm{V}(\phi,u)=\int\limits_{\phi}^{\pi/2}\operatorname{Re}\sin^{-1}\frac{\sin\sigma}{u}\,\mathrm{d}\sigma+\frac{\pi}{2}\left(\phi-\frac{\pi}{2}\right).$$

Положим $u=1$ и используем равенство $(*)$. Получим, что

$$\mathrm{V}(\phi,1)=\begin{cases}-1/2(\phi-\pi/2)^2, & \text{если } 0\le\phi\le\pi/2,\\ 1/2(\phi-\pi/2)^2, & \text{если } \pi/2\le\phi\le\pi.\end{cases}\qquad\square$$

Если $u\ge 1$, то справедлива следующая

Лемма 9. *Функция* $\mathrm{V}(\phi,u)$ *при* $u\ge1$, $\phi\in[0,\pi]$ *разлагается в бесконечный ряд:*

$$\mathrm{V}(\phi,u)=\frac{\pi}{2}\left(\phi-\frac{\pi}{2}\right)+\sum_{k=0}^{\infty}p_k\,\frac{u^{-2k-1}}{(2k+1)^2},$$

где

$$p_k=1-B(\sin\phi;k+1,1/2)/B(k+1,1/2),$$

$B(\circ,\circ)$ *обозначает бета-функцию, а* $B(\circ;\circ,\circ)$ — *неполную бета-функцию.*

Доказательство. Для доказательства леммы используем следующее разложение подынтегрального выражения в определении функции $V(u,\phi)$ в ряд по переменной u в точке $u=\infty$:

$$\frac{1}{2}\operatorname{Im}\log\frac{1-i\sqrt{u^2/\sin^2\sigma-1}}{1+i\sqrt{u^2/\sin^2\sigma-1}}=\frac{\pi}{2}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k+1)!!}{k!\,2^k\,(2k+1)^2}\left(\frac{\sin\sigma}{u}\right)^{2k+1},$$

которое справедливо для всех $u \in [1, \infty)$ и $\sigma \in \mathbb{R}$. Интегрируя данный ряд почленно в пределах от ϕ до $\frac{\pi}{2}$, где $\phi \in [0, \pi]$, получим утверждение леммы. □

Если $u < 1$, то $\mathrm{V}(\phi, u)$ имеет разрывные вторые производные. Точками разрыва на $\{(\phi, u) \in [0, \pi] \times (0, 1)\}$ являются $\left(\frac{\pi}{2} \pm \left(\frac{\pi}{2} - \sin^{-1} u\right), u\right)$.

Авторы выражают благодарность рецензентам, сделавшим ряд ценных замечаний, а также всем участникам семинара «Инварианты трехмерных многообразий» ИМ СО РАН за плодотворные дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Sabitov I. Kh.* The volume as a metric invariant of polyhedra // Discrete Comput. Geom. 1998. V. 20, N 4. P. 405–425.
2. *Kellerhals R.* On the volume of hyperbolic polyhedra // Math. Ann. 1989. V. 285, N 4. P. 541–569.
3. *Mednykh A. D.* On hyperbolic and spherical volumes for link cone-manifolds. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2003. P. 145–163. (London Math. Soc. Lect. Note Ser.; V. 229).
4. *Mednykh A. D., Vesnin A. Yu., Parker J.* On hyperbolic polyhedra arising as convex cores of quasi-Fuchsian punctured torus groups // Bol. Soc. Mat. Mex. 2004. V. 10, N 3. P. 357–381.
5. *Алексеевский Д. В., Винберг Э. Б., Солодовников А. С.* Геометрия пространств постоянной кривизны // Геометрия-2. Сер. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, 1988. Т. 29. С. 5–146. (Итоги науки и техники).
6. *Cho Y., Kim H.* On the volume formula for hyperbolic tetrahedra // Discrete Comput. Geom. 1999. V. 22, N 3. P. 347–366.
7. *Murakami J., Yano M.* On the volume of hyperbolic and spherical tetrahedron // Comm. Annal. Geom. 2005. V. 13, N 2. P. 379–400.
8. *Ushijima A.* A volume formula for generalised hyperbolic tetrahedra in non-euclidean geometries // Math. Appl. (N. Y.) 2006. V. 581. P. 249–265.
9. *Деревнин Д. А., Медных А. Д.* О формуле объема гиперболического тетраэдра // Успехи мат. наук. 2005. Т. 60, № 2. С. 159–160.
10. *Sforza G.* Spazi metrico-proiettivi // Ric. Esten. Different. Ser. 1906. V. 8, N 3. P. 3–66.
11. *Milnor J.* The Schlaefli differential equality // Collected Papers. I. Geometry. Houston, TX: Publ. Perish, 1994. P. 281–295.
12. *Деревнин Д. А., Медных А. Д., Пашкевич М. Г.* Объем симметричного тетраэдра в гиперболическом и сферическом пространствах // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 5. С. 1022–1031.
13. *Abrosimov N. V., Godoy-Molina M., Mednykh A. D.* On the volume of a spherical octahedron with symmetries // J. Math. Sci. 2009. V. 161, N 1. P. 1–10.
14. *Деревнин Д. А., Медных А. Д.* Объем куба Ламберта в сферическом пространстве // Мат. заметки. 2009. Т. 86, № 2. С. 190–201.
15. *Luo F.* On a problem of Fenchel // Geom. Dedicata. 1997. V. 64, N 3. P. 277–282.
16. *Hodgson C.* Degeneration and regeneration of hyperbolic structures on three-manifolds. Princeton: Thesis, 1986.
17. *Прасолов В. В.* Задачи и теоремы линейной алгебры. М.: Наука-Физматлит, 1996.

Статья поступила 24 июня 2010 г.

Колпаков Александр Александрович, Медных Александр Дмитриевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет, механико-математический факультет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
kolpakov.alexander@gmail.com, mednykh@math.nsc.ru

Пашкевич Марина Геннадьевна
Новосибирский гос. университет экономики и управления,
ул. Каменская, 56, Новосибирск 630099
Pashkevich_M@mail.ru