Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2011. Том 52, № 3

УДК 514.77

АТТРАКТОРЫ И АНАЛОГ ГИПОТЕЗЫ ЛИХНЕРОВИЧА ДЛЯ КОНФОРМНЫХ СЛОЕНИЙ

Н. И. Жукова

Аннотация. Доказано, что любое конформное слоение $(M, \mathcal{F})$ коразмерности $q \geq 3$ либо риманово, либо имеет минимальное множество, являющееся аттрактором. Если $(M, \mathcal{F})$ — собственное конформное слоение, не являющееся римановым, то существует замкнутый слой-аттрактор. При этом компактность многообразия M не предполагается. Более того, если M компактно, то не риманово конформное слоение $(M, \mathcal{F})$ является $(\mathrm{Conf}(S^q), S^q)$-слоением, имеет конечное семейство аттракторов, причем каждый слой слоения принадлежит бассейну по крайней мере одного из них.

Ключевые слова: конформное слоение, трансверсальная кривизна, псевдогруппа голономии, минимальное множество, аттрактор.

Введение

Напомним, что две римановы метрики h и g на многообразии M называются *конформно эквивалентными*, если существует такая положительная гладкая функция f на M, что $h = fg$. Класс конформно эквивалентных римановых метрик $[g]$ называется *конформной структурой* на M, а пара $(M, [g])$ — *конформным многообразием.* Группа конформных преобразований риманова многообразия (M, g) называется *несущественной*, если она является группой изометрий риманова многообразия (M, h), где $h \in [g]$. В противном случае она называется *существенной.*

Лихнерович выдвинул гипотезу о том, что любое компактное n-мерное риманово многообразие, допускающее существенную группу конформных преобразований, при $n \geq 3$ представляет собой стандартную n-мерную сферу S^n.

Доказательству этой гипотезы посвящены работы Обаты [1], Д. В. Алексеевского [2, 3], Ферранд [4] и др. Установлено, что если группа конформных преобразований некомпактного риманова многообразия M существенная, то M есть n-мерное евклидово пространство. Полное доказательство гипотезы Лихнеровича, включая некомпактные многообразия, дано Ферранд в 1996 г. [4].

Конформные слоения $(M, \mathcal{F})$ введены И. Вайсманом [5] как слоения коразмерности $q \geq 3$, допускающие трансверсальную конформную структуру.

В работе [6] Таркини сформулировал следующий вопрос о конформных слоениях коразмерности $q \geq 3$.

Каждое ли конформное слоение коразмерности $q \geq 3$ на компактном многообразии либо риманово, либо является $(\mathrm{Conf}(S^q), S^q)$-слоением?

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 10–01–00457–а) и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2011 гг. (контракт № П945).

Заметим, что при $q \geq 3$ конформное слоение является $(\mathrm{Conf}(S^q), S^q)$-слоением тогда и только тогда, когда оно трансверсально конформно плоское.

При $q = 2$ это неверно. Существуют конформные слоения коразмерности 2, которые не являются ни римановыми, ни $(\mathrm{Conf}(S^q), S^q)$-слоениями [6].

Таркини [6] дал положительный ответ на свой вопрос при некоторых дополнительных предположениях, в том числе для трансверсально аналитических конформных слоений на компактных многообразиях. В [7] Франсес и Таркини дали положительное решение для не римановых конформных слоений на компактных многообразиях, все базовые функции которых постоянны и $q > 3$. В данной работе мы даем положительный ответ на вопрос Таркини в общем случае.

Мы показываем, что группа голономии произвольного слоя конформного слоения изоморфна некоторой подгруппе группы Ли $H = CO(q) \ltimes \mathbb{R}^q$, причем эта подгруппа определена с точностью до сопряженности. Поэтому корректно следующее определение. Группу голономии слоя конформного слоения будем называть *относительно компактной* или *несущественной*, если соответствующая ей подгруппа в группе Ли H относительно компактна. В противном случае группа голономии слоя называется *существенной*.

Прежде всего мы доказываем следующий критерий римановости конформного слоения.

Теорема 1. *Пусть $(M, \mathcal{F})$ — конформное слоение коразмерности $q \geq 3$, моделируемое на конформной геометрии $(N, [g])$. Тогда для существования римановой метрики $d \in [g]$ такой, что $(M, \mathcal{F})$ — риманово слоение, моделируемое на (N, d), необходимо и достаточно, чтобы все группы голономии этого слоения были относительно компактными.*

Напомним, что подмножество многообразия M называется *насыщенным*, если оно является объединением некоторых слоев слоения $(M, \mathcal{F})$. *Минимальным множеством слоения* $(M, \mathcal{F})$ называется непустое замкнутое насыщенное подмножество в M, не имеющее собственных подмножеств, обладающих этими свойствами.

Минимальное множество $\mathcal{M}$ слоения $(M, \mathcal{F})$, для которого существует такая открытая насыщенная окрестность $\mathscr{U}$, что замыкание произвольного слоя из $\mathscr{U}$ содержит множество $\mathcal{M}$, называется *аттрактором* этого слоения, а окрестность $\mathscr{U}$ — бассейном аттрактора $\mathcal{M}$ и обозначается через $\mathcal{A}ttr(\mathcal{M})$. Если, более того, $\mathcal{A}ttr(\mathcal{M}) = M$, то аттрактор $\mathcal{M}$ называется *глобальным* [8].

Применение теоремы 1, нехаусдорфовых конформных многообразий и леммы Алексеевского — Йошимацу — Ферранд позволило доказать следующее замечательное свойство конформных слоений.

Теорема 2. *Любое конформное слоение $(M, \mathcal{F})$ коразмерности $q \geq 3$ либо риманово, либо имеет аттрактор, являющийся замыканием слоя с существенной группой голономии, причем сужение слоения на бассейн аттрактора есть $(\mathrm{Conf}(S^q), S^q)$-слоение.*

Слоение $(M, \mathcal{F})$ называется *собственным*, если все его слои — вложенные подмногообразия в M. Слой L называется *замкнутым*, если L — замкнутое подмножество M.

Следствие 1. *У любого собственного не риманова конформного слоения коразмерности $q \geq 3$ существует замкнутый слой с существенной группой голономии, являющийся аттрактором.*

В [9] автором введены вейлевы слоения. Так как каждое вейлево слоение конформно, из теоремы 2 вытекает теорема 1 в [9], доказанная другим способом.

Теорема 3. *Если* $(M, \mathcal{F})$ — *не риманово конформное слоение* $(M, \mathcal{F})$, $\operatorname{codim}(\mathcal{F}) \geq 3$, *то*

1) *любой слой* L *с существенной группой голономии имеет такую открытую насыщенную окрестность* $\mathcal{W}$, *что* $(\mathcal{W}, \mathcal{F}_{\mathcal{W}})$ — $(\operatorname{Conf}(S^q), S^q)$*-слоение и* $\overline{L}_\alpha \supset \overline{L}$ *для любого слоя* L_α *из* $\mathcal{W}$, *причем либо* $\mathcal{M} = \overline{L}$ — *аттрактор, либо* $\overline{L}$ *содержит замкнутый слой-аттрактор;*

2) *объединение* K *замыканий всех слоев с существенными группами голономии является замкнутым насыщенным подмножеством* M, *а* $(M \setminus K, \mathcal{F}_{M \setminus K})$ — *римановым слоением.*

Теорема 4 доказана с помощью построения вспомогательной связности Эресмана в смысле Блюменталя и Хебды [10]. Эта теорема описывает строение конформных слоений на компактных многообразиях.

Теорема 4. *Любое конформное слоение* $(M, \mathcal{F})$ *коразмерности* $q \geq 3$ *на компактном многообразии* M *либо риманово, либо является* $(\operatorname{Conf}(S^q), S^q)$*-слоением и имеет конечное число минимальных множеств. Все они аттракторы, образованы замыканиями слоев с существенными группами голономии, причем каждый слой слоения принадлежит бассейну по крайней мере одного из них.*

Из теоремы 4 вытекает положительный ответ на вопрос Таркини о конформных слоениях коразмерности $q \geq 3$ на компактных многообразиях.

Теорема 4 при $q \geq 3$ усиливает первую часть основной теоремы Диройна и Клепцына из [11], согласно которой любое конформное слоение на компактном многообразии либо допускает трансверсальную инвариантную меру, либо имеет конечное число минимальных множеств с вероятностными мерами, обладающими некоторыми свойствами.

1. Конформные слоения

Конформные слоения. Диффеоморфизм $f : N_1 \to N_2$ римановых многообразий (N_1, g_1) и (N_2, g_2) называется *конформным,* если существует такая гладкая функция λ на N_1, что $f^* g_2 = \lambda g_1$. Конформный диффеоморфизм f риманова многообразия (N, g) на себя называется также *конформным преобразованием.*

Гладкое слоение $(M, \mathcal{F})$ коразмерности q называется *конформным,* если оно определяется N-коциклом $\{U_i, f_i, \{\gamma_{ij}\}\}_{i,j \in J}$ и на многообразии N существует такая риманова метрика g, что все $\{\gamma_{ij}\}$ являются локальными конформными диффеоморфизмами соответствующих открытых подмножеств. Это означает, что

1) задано возможно несвязное риманово многообразие (N, g);
2) задано открытое покрытие $\{U_i \mid i \in J\}$ многообразия M;
3) заданы субмерсии со связными слоями $f_i : U_i \to V_i$ на $V_i \subset N$;
4) если $U_i \cap U_j \neq \varnothing$, то существуют такие конформные диффеоморфизмы $\gamma_{ij} : f_j(U_i \cap U_j) \to f_i(U_i \cap U_j)$ открытых подмножеств риманова многообразия (N, g), что $f_i = \gamma_{ij} \circ f_j$ на $U_i \cap U_j$, причем если $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \varnothing$, то $\gamma_{ik} = \gamma_{ij} \circ \gamma_{jk}$, кроме того, $\gamma_{ii} = \mathrm{id}|_{U_i}$.

Максимальный по включению N-коцикл $\{U_i, f_i, \{\gamma_{ij}\}\}_{i,j \in J}$, обладающий указанными выше свойствами, определяет новую топологию на M, базой которой является множество слоев всех субмерсий f_i. Эта топология называется *слоевой* и обозначается через $\tau_{\mathcal{F}}$. Компоненты линейной связности топологического пространства $(M, \tau_{\mathcal{F}})$ образуют разбиение M, которое обозначается через $\mathcal{F} = \{L_\alpha \mid \alpha \in A\}$ и называется *конформным* слоением со слоями L_α, заданным N-коциклом $\{U_i, f_i, \{\gamma_{ij}\}\}_{i,j\in J}$.

Поскольку любой N-коцикл содержится в единственном максимальном N-коцикле, для задания конформного слоения $(M, \mathcal{F})$ достаточно задать какой-либо N-коцикл, обладающий свойствами 1–4.

Конформные слоения как картановы. Пусть H — замкнутая подгруппа группы Ли G, $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы Ли G, а $\mathfrak{h}$ — ее подалгебра, соответствующая H. Сохраняя обозначения из [12], через $P(N, H)$ обозначаем главное расслоенное пространство над N со структурной группой H, действующей справа на P. Напомним [13], что *картановой связностью* в главном H-расслоении $P(N, H)$ называется невырожденная H-эквивариантная $\mathfrak{g}$-значная 1-форма ω на P. Пара $\xi = (P(N, H), \omega)$ называется *картановым расслоением* или *картановой геометрией типа* (G, H) на многообразии N. Картанова геометрия типа (G, H) называется *эффективной*, если группа G эффективно действует слева на G/H. Пусть $\xi = (P(N, H), \omega)$ и $\xi' = (P'(N', H), \omega')$ — картановы геометрии. *Изоморфизмом* ξ и ξ' называется изоморфизм $\Gamma : P \to P'$ главных H-расслоений такой, что $\Gamma^*\omega = \omega'$.

Слоение $(M, \mathcal{F})$, заданное N-коциклом $\{U_i, f_i, \{\gamma_{ij}\}\}_{i,j\in J}$, называется *картановым*, если задана эффективная картанова геометрия $\xi = (P(N, H), \omega)$, причем каждый локальный диффеоморфизм γ_{ij} является проекцией некоторого локального изоморфизма Γ_{ij}. В силу эффективности картановой геометрии ξ каждый γ_{ij} является проекцией строго одного локального изоморфизма Γ_{ij}.

Пусть $G = \mathrm{Conf}(S^q)$ — группа конформных преобразований q-мерной сферы S^q, H — стационарная подгруппа группы G в произвольной точке из S^q. Задание конформной структуры $[g]$ на многообразии N определяет редукцию $P(N, H)$ главного G^2-расслоения $P^2 \to N$ 2-реперов на многообразии N к замкнутой подгруппе H. Пусть ω — нормальная конформная связность в $P(N, H)$ [13]. Будем говорить, что $\xi = (P(N, H), \omega)$ — *эффективная картанова геометрия*, соответствующая конформному многообразию $(N, [g])$. Конформные слоения будем рассматривать как картановы, моделируемые на указанной эффективной картановой геометрии.

2. Интерпретации групп голономии картанова слоения

Слоеные расслоения. Пусть $(M, \mathcal{F})$ — произвольное гладкое слоение коразмерности q. Локально тривиальное расслоение $\pi : \mathscr{R} \to M$, наделенное слоением $(\mathscr{R}, F)$, называется *слоеным расслоением,* если выполняются следующие условия:

1) если $\mathfrak{N}$ — распределение, касательное к слоям субмерсии $\pi : \mathscr{R} \to M$, то $\mathfrak{N}_u \cap T_u F = \{0\}$, $u \in \mathscr{R}$;

2) проекция $\pi : (\mathscr{R}, F) \to (M, \mathcal{F})$ — морфизм слоений.

Будем обозначать слоеное расслоение через $(\mathscr{R}, \pi, M, F)$. Если, кроме того, $\pi : \mathscr{R} \to M$ — главное H-расслоение, причем слоение $(\mathscr{R}, F)$ H-инвариантно, то говорят, что задано *слоеное H-расслоение* над $(M, \mathcal{F})$. Слоеное H-расслоение обозначаем через $(\mathscr{R}(M, H), F)$.

Изоморфность групп голономии подгруппам из H. Пусть $(M, \mathcal{F})$ — картаново слоение, моделируемое на эффективной трансверсальной геометрии

$\xi = (P(N,H),\omega)$. При этом $(M,\mathcal{F})$ — картаново слоение как в смысле Блюменталя [14], так и в смысле работы автора [8]. Нами доказано [8, предложение 2], что определено слоеное расслоение над M с проекцией главного H-расслоения $\pi : \mathscr{R} \to M$ и поднятым e-слоением $(\mathscr{R}, F)$. Будем обозначать указанное слоеное расслоение через $(\mathscr{R}(M,H), F)$.

Предложение 1 доказывается аналогично теореме 4 из работы автора [15].

Предложение 1. *Пусть $(M,\mathcal{F})$ — картаново слоение с эффективной трансверсальной геометрией $\xi = (P(N,H),\omega)$, $(\mathscr{R}(M,H),F)$ — слоеное расслоение над $(M,\mathcal{F})$ с проекцией $\pi : \mathscr{R} \to M$. Пусть $L = L(x), x \in M$, — любой слой слоения $(M,\mathcal{F})$, $\mathscr{L} = \mathscr{L}(u), u \in \pi^{-1}(x)$, — слой поднятого слоения $(\mathscr{R}, F)$. Тогда ростковая группа голономии $\Gamma(L,x)$ слоя L изоморфна каждой из следующих групп:*

1) *подгруппе $H(\mathscr{L}) := \{a \in H \mid R_a(\mathscr{L}) = \mathscr{L}\}$ группы H;*

2) *группе накрывающих преобразований регулярного накрывающего отображения $\pi|_{\mathscr{L}} : \mathscr{L} \to L$.*

3. Критерий римановости конформного слоения

Слоеные редукции. Пусть $(\mathscr{R}'(M',H'),F')$ и $(\mathscr{R}(M,H),F)$ — два главных слоеных расслоения с проекциями $\pi' : \mathscr{R}' \to M'$ и $\pi : \mathscr{R} \to M$ соответственно. Пара $(f,\hat{f})$, где $f : \mathscr{R}' \to \mathscr{R}$ — морфизм слоения $(\mathscr{R}',F')$ в слоение $(\mathscr{R},F)$, а $\hat{f} : H' \to H$ — гомоморфизм групп Ли, называется *морфизмом в категории главных слоеных расслоений,* если $f(u'a') = f(u')\hat{f}(a')$ для всех $u' \in \mathscr{R}'$ и $a' \in H'$. Морфизм $(f,\hat{f}) : (\mathscr{R}'(M',H'),F') \to (\mathscr{R}(M,H),F)$ определяет проекцию $f' : M' \to M$, удовлетворяющую равенству $\pi \circ f = f' \circ \pi'$.

Пусть $(f,\hat{f}) : (\mathscr{R}'(M,H'),F') \to (\mathscr{R}(M,H),F)$ — морфизм главных слоеных расслоений, причем $f : \mathscr{R}' \to \mathscr{R}$ — вложение с проекцией $f' = \mathrm{id}_M$, образ $f(\mathscr{R}')$ является F-насыщенным подмногообразием в $\mathscr{R}$, а $\hat{f} : H' \to H$ — иммерсия групп Ли. Отождествим $\mathscr{R}'$ с подмногообразием $f(\mathscr{R}')$, группу H' — с подгруппой Ли $\hat{f}(H')$ группы H, а слоение F' — со слоением $F|_{f(\mathscr{R}')}$. В этом случае слоеное расслоение $(\mathscr{R}'(M,H'),F|_{f(\mathscr{R}')})$ называется *редуцированным слоеным расслоением* и обозначается через $(\mathscr{R}'(M,H'),F')$, а отображение $\mathscr{R}' \to \mathscr{R}$ называется *редукцией главного слоеного расслоения $(\mathscr{R}(M,H),F)$ к подгруппе H'.*

Слоеные сечения. Пусть $(M,\mathcal{F})$ — произвольное слоение, U — открытое подмножество многообразия M. Будем обозначать через F_U индуцированное слоение на U, слои которого образованы компонентами связности пересечений $L_\alpha \cap U$ слоев L_α слоения $\mathcal{F}$ с U. Пусть (E,π,M,F) — некоторое слоеное расслоение со стандартным слоем Y над $(M,\mathcal{F})$.

Определение 1. Пусть U — открытое подмножество в M, A — произвольное подмножество в U. Сечение $\sigma : A \to E$ расслоения $\pi : E \to M$ называется *$\mathcal{F}_U$-сечением,* если для любых двух точек x,y, принадлежащих $A \cap L$, где $L \in \mathcal{F}_U$, существует такой слой $\mathscr{L} \in F_{\pi^{-1}(U)}$, что $\sigma(x), \sigma(y) \in \sigma(A) \cap \mathscr{L}$.

Определение 2. $\mathcal{F}_U$-сечение $\tilde{\sigma} : B \to E$ называется *$\mathcal{F}_U$-продолжением* $\mathcal{F}_U$-сечения $\sigma : A \to E$, если $A \subset B \subset U$ и $\tilde{\sigma}|_A = \sigma$. Пусть $U = M$, тогда $\mathcal{F}_U$-сечение называется *$\mathcal{F}$-сечением,* а $\mathcal{F}_U$-продолжение — *$\mathcal{F}$-продолжением.*

Лемма 1. *Пусть (E,π,M,F) — слоеное расслоение со стандартным слоем $\mathbb{R}^m$ над слоением $(M,\mathcal{F})$. Пусть a — произвольная точка из M и (U,φ) — расслоенная карта с центром в точке a. Тогда для любого компактного подмножества A в U каждое $\mathcal{F}_U$-сечение $\sigma : A \to E$ имеет $\mathcal{F}_U$-продолжение на U.*

Доказательство. Пусть $r : U \to U/\mathcal{F}_U = \mathbb{R}^q$ — проекция на пространство слоев слоения $(U, \mathcal{F}_U)$, отождествленное с $\mathbb{R}^q$, где $q = \operatorname{codim} \mathcal{F}$. Поскольку окрестность U стягиваемая, пространство $\mathbb{R}^m$-расслоения $\pi^{-1}(U)$ можно отождествить с $U \times \mathbb{R}^m$. При этом слоение $F_{\pi^{-1}(U)}$ отождествляется с тривиальным слоением $F_{st} := \{L \times r(L) \times v \mid L \in \mathcal{F}_U,\ v \in \mathbb{R}^m\}$, а $\mathcal{F}_U$-сечение σ записывается в виде $\sigma(x) = (x, \tilde{\sigma}(r(x))) \in U \times \mathbb{R}^m$, $x \in A$, где $\tilde{\sigma} : \widetilde{A} := r(A) \to \mathbb{R}^m$ — индуцированное гладкое отображение, удовлетворяющее равенству $\tilde{\sigma} \circ r = \mathrm{pr}_2 \circ \sigma$, а $\mathrm{pr}_2 : U \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — проекция на второй сомножитель.

Отображение $\tilde{\sigma} : \tilde{A} \to \mathbb{R}^m$ может быть отождествлено с набором из m гладких функций $h_1, \dots, h_m : \widetilde{A} \to \mathbb{R}^1$. Согласно условию множество A компактно, поэтому компактно и $\widetilde{A}$, следовательно, $\widetilde{A}$ — замкнутое подмножество в $\mathbb{R}^q$. Известно, что каждая функция, заданная на замкнутом подмножестве в $\mathbb{R}^q$, имеет гладкое продолжение на все пространство $\mathbb{R}^q$. Отсюда вытекает, что существует гладкое продолжение $\tilde{\delta} : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^m$ отображения $\tilde{\sigma} : \widetilde{A} \to \mathbb{R}^m$. Следовательно, равенство $\delta(x) := (x, \tilde{\delta} \circ r(x))$, $x \in U$, определяет гладкое $\mathcal{F}_U$-сечение δ, являющееся продолжением сечения σ. $\square$

Замечание 1. Лемма 1, играющая ключевую роль для данного раздела, вообще говоря, неверна для замкнутых подмножеств A, поскольку проекция на пространство слоев слоения не является замкнутым отображением.

Предложение 2. *Пусть (E, π, M, F) — слоеное расслоение со стандартным слоем $\mathbb{R}^m$ над слоением $(M, \mathcal{F})$, причем $\pi|_{\mathscr{L}} : \mathscr{L} \to L$, $\mathscr{L} \in F$, — диффеоморфизм. Тогда для любого замкнутого подмножества A в M каждое $\mathcal{F}$-сечение $\sigma : A \to E$, определенное на A, имеет продолжение до $\mathcal{F}$-сечения, определенного на M. В частности, для любых точек $x \in M$, $u \in \pi^{-1}(x) \subset E$ существует $\mathcal{F}$-сечение $\sigma : M \to E$ такое, что $\sigma(x) = u$.*

Доказательство. В силу паракомпактности M существуют покрытие $\{U_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ пространства M расслоенными окрестностями и локально конечное открытое покрытие $\{V_j \mid j \in J\}$ многообразия M, обладающие свойством: для любого V_j найдется U_i такое, что замыкание $\overline{V_j}$ компактно и $\overline{V}_j \subset U_i$ (см., например, [16]). Для произвольного подмножества индексов $Y \subset J$ положим $B_Y := \bigcup_{j \in Y} \overline{V}_j$.

Покажем, что B_Y замкнуто в M. Если $x \in \overline{B}_Y$, то существует последовательность $\{x_n\} \subset B_Y$, сходящаяся к x. В силу локальной конечности покрытия $\{V_j \mid j \in Y\}$ найдется окрестность точки x, пересекающая лишь конечное семейство подмножеств из этого покрытия. Поэтому имеется подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, принадлежащая одному V_{j_0}, $j_0 \in Y$, следовательно, $x \in \overline{V}_{j_0} \subset B_Y$ и B_Y замкнуто в M.

Обозначим через $\mathscr{P}$ множество троек (δ, Y, U), где $Y \subset J$, U — открытая окрестность B_Y, $\delta : B_Y \to E$ — $\mathcal{F}_U$-сечение, совпадающее на $A \cap B_Y$ с $\sigma_{A \cap B_Y}$.

Предположим, что $A \neq \varnothing$, тогда $V_j \cap A \neq \varnothing$ для некоторого $j \in J$. Множество $A_j = \overline{V}_j \cap A$ компактно как замкнутое подмножество компактного $\overline{V}_j$. Пусть $\overline{V}_j \subset U_i$. Покажем, что $\sigma_j := \sigma|_{A_j} : A_j \to E$ есть $\mathcal{F}_{U_i}$-сечение. Возьмем любые две точки x, y из произвольного слоя $L_0 \in \mathcal{F}_{U_i}$, принадлежащие A_j. Тогда x, y принадлежат одному слою L слоения $\mathcal{F}$, содержащему L_0. Так как по условию $\sigma : A \to E$ является $\mathcal{F}$-сечением, точки $\sigma(x)$ и $\sigma(y)$ принадлежат одному слою $\mathscr{L}$ поднятого слоения (E, F), причем $\pi(\mathscr{L}) = L$. Кроме того, согласно условию сужение $\pi|_{\mathscr{L}} : \mathscr{L} \to L$ — диффеоморфизм, следовательно, пересечение $\pi^{-1}(L_0) \cap \mathscr{L}$ линейно связно, поэтому $\sigma(x), \sigma(y)$ — точки одного слоя слоения $F_{\pi^{-1}(U_i)}$. Это означает, что σ_j является $\mathcal{F}_{U_i}$-сечением. Согласно лемме 1 существует $\mathcal{F}_{U_i}$-продолжение δ сечения σ_j на U_i. Таким образом, $\bar{\delta}_j := \delta|_{\overline{V}_j} : \overline{V}_j \to E$ есть F_{U_i}-сечение, причем $\bar{\delta}_j|_{\overline{V}_j \cap A} = \sigma|_{\overline{V}_j \cap A}$, следовательно, $(\bar{\delta}_j, j, U_i) \in \mathscr{P}$ и $\mathscr{P} \neq \varnothing$.

Введем отношение частичного порядка в $\mathscr{P}$, полагая $(\delta_1, Y_1, U_1) \preceq (\delta_2, Y_2, U_2)$, если $Y_1 \subset Y_2$, $U_1 \subset U_2$ и $\delta_2|_{B_{Y_1}} = \delta_1$. Те же аргументы, что и при доказательстве теоремы 3.4.1 в [17], показывают, что любое линейно упорядоченное подмножество в $\mathscr{P}$ ограничено сверху. Поэтому согласно лемме Цорна $(\mathscr{P}, \preceq)$ имеет максимальный элемент (δ_0, Y_0, U_0).

Предположим, что $Y_0 \neq J$, тогда существует $s \in J \setminus Y_0$. Пусть $C := (A \cup B_{Y_0}) \cap \overline{V}_s \subset \overline{V}_s$. Найдется $U_k, k \in \mathbb{N}$, содержащее $\overline{V}_s$. При этом корректно определено сечение $\varepsilon : C \to E$, совпадающее с σ на $A \cap \overline{V}_s$ и с δ_0 на $B_{Y_0} \cap \overline{V}_s$. Так же, как и выше, проверяется, что ε является $\mathcal{F}_{U_k}$-сечением. Кроме того, C компактно как след замкнутого множества $A \cup B_{Y_0}$ на компактном $\overline{V}_s$. Таким образом, выполняются условия леммы 1, из которой вытекает существование $\mathcal{F}_{U_k}$-продолжения $\bar{\varepsilon} : \overline{V}_s \to E$ сечения ε, совпадающее с σ на $A \cap \overline{V}_s$. Поэтому $(\bar{\varepsilon}, s, U_k) \in \mathscr{P}$. Пусть $U' := U_0 \cup U_k$ и $Y_1 := Y_0 \cup \{s\}$, тогда $B_{Y_1} = B_{Y_0} \cup \overline{V}_s$. Определим сечение $\tau : B_{Y_1} \to E$, полагая $\tau|_{B_{Y_0}} := \delta_0, \tau|_{\overline{V}_s} = \bar{\varepsilon}$. Из равенств $\bar{\varepsilon}|_{B_{Y_0} \cap \overline{V}_s} = \delta_0$ и $\bar{\varepsilon}|_{A \cap \overline{V}_s} = \delta_0|_{A \cap \overline{V}_s} = \sigma|_{A \cap \overline{V}_s}$ вытекают корректность определения сечения τ и то, что τ есть $\mathcal{F}_{U'}$-сечение, причем $\tau|_{B_{Y_0}} = \delta_0$. Следовательно, $(\tau, Y_1, U') \in \mathscr{P}$ и $(\delta_0, Y_0, U_0) \preceq (\tau, Y_1, U')$, что противоречит максимальности элемента (δ_0, Y_0, U_0) в $\mathscr{P}$. Таким образом, $Y_0 = J$ и δ_0 является $\mathcal{F}$-продолжением сечения σ на все многообразие M.

Зафиксируем теперь произвольные точки $x \in M, u \in \pi^{-1}(x) \subset E$. Пусть $A = \{x\}$ — одноточечное множество и $\sigma_0 : A \to E : x \to u$, тогда σ_0 — $\mathcal{F}$-сечение. По доказанному существует продолжение σ_0 до $\mathcal{F}$-сечения $\sigma : M \to E$.

Замечание 2. Если $\mathcal{F}$ — нульмерное слоение многообразия M, то из предложения 1 вытекает теорема 5.7 в [12, гл. I].

Конформные преобразования евклидова пространства. Евклидово пространство E^n с бесконечно удаленной точкой ∞ отождествляется с n-мерной сферой S^n. Будем считать, что при таком отождествлении точка ∞ соответствует точке $x_0 \in S^n$. Тогда стационарная подгруппа H в точке x_0 группы конформных преобразований $\mathrm{Conf}(S^n)$ отождествляется с группой $\mathrm{Conf}(E^n)$ конформных преобразований евклидова пространства E^n. Как известно, последняя представляет собой полупрямое произведение конформной группы $CO(n) = \mathbb{R}^+ \cdot O(n)$ и абелева нормального делителя, равного группе сдвигов $\mathbb{R}^n$, т. е. $\mathrm{Conf}(E^n) = \mathbb{R}^+ \cdot O(n) \ltimes \mathbb{R}^n$. Будем обозначать элемент группы $\mathrm{Conf}(E^n)$ парой $\langle \lambda \cdot A, a \rangle$, где $\lambda \in \mathbb{R}^+, A \in O(n), a \in \mathbb{R}^n$. При этом композиция отображений записывается в виде $\langle \lambda \cdot A, a \rangle \langle \mu \cdot B, b \rangle = \langle \lambda\mu \cdot AB, \lambda \cdot Ab + a \rangle$, где $\langle \lambda \cdot A, a \rangle, \langle \mu \cdot B, b \rangle \in \mathrm{Conf}(E^n)$.

Лемма 2. *Пусть $H = \mathbb{R}^+ \cdot O(n)$. Тогда $H^0 := \mathbb{R}^+ \cdot E \ltimes \mathbb{R}^n$ — нормальная подгруппа в H.*

Доказательство. Для любых элементов $\langle C, c \rangle \in H$ и $\langle \lambda \cdot E, a \rangle \in H^0$ существует элемент $\langle \lambda \cdot E, d \rangle = \langle \lambda \cdot E, Ca + (1-\lambda)c \rangle \in H^0$, удовлетворяющий равенству $\langle C, c \rangle \langle \lambda \cdot E, a \rangle = \langle \lambda \cdot E, d \rangle \langle C, c \rangle$. $\square$

Лемма 3. *Для любой максимальной компактной подгруппы K в H пересечение $K \cap H^0$ равно единице группы H.*

Доказательство. Поскольку $O(n)$ — максимальная компактная подгруппа в H, любая другая максимальная компактная подгруппа K в H сопряжена подгруппе $O(n)$. Напомним, что $H^0 = \{\langle \lambda \cdot E, a\rangle \mid \lambda \in \mathbb{R}^+,\ a \in \mathbb{R}^n\}$. Так как $\lambda \cdot A = A \cdot \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$, $A \in O(n)$, то $K = \langle E, a\rangle O(n)\langle E, -a\rangle = \{\langle A, (E-A)a\rangle \mid A \in O(n),\ a \in \mathbb{R}^n\}$. Следовательно, $K \cap H^0 = \langle E, 0\rangle$, где $\langle E, 0\rangle$ — единица группы H. $\square$

Доказательство теоремы 1. Как известно [18], для того чтобы слоение $(M, \mathcal{F})$ было римановым, необходимо и достаточно существования слоеного $O(q)$-расслоения над $(M, \mathcal{F})$.

Пусть $(M, \mathcal{F})$ — конформное слоение коразмерности $q \geq 3$, рассматриваемое как картаново слоение, моделируемое на картановой геометрии $(P(N, H), \omega)$, где $G = \mathrm{Conf}(S^q)$, $H = CO(q) \ltimes \mathbb{R}^q$ и ω — нормальная конформная связность. Обозначим через $(\mathscr{R}(M, H), F)$ слоеное H-расслоение над $(M, \mathcal{F})$.

Предположим, что все группы голономии $H(u)$, $u \in \mathscr{R}$, относительно компактны.

Так как на $\mathscr{R}$ определено свободное собственное действие группы Ли H, на $\mathscr{R}$ определено свободное собственное действие нормальной подгруппы $H^0 := \mathbb{R}^+ \cdot E \ltimes \mathbb{R}^n$ группы H. Поэтому пространство орбит $\widehat{\mathscr{R}} := \mathscr{R}/H^0$ — гладкое многообразие, а естественная проекция $r : \mathscr{R} \to \widehat{\mathscr{R}}$ на пространство орбит образует главное H^0-расслоение. В этом случае на многообразии орбит $\widehat{\mathscr{R}} := \mathscr{R}/H^0$ определено свободное действие фактор-группы $H/H^0 = O(q)$, заданное по формуле $(uH^0)a = uaH^0$ для любых $uH^0 \in \widehat{\mathscr{R}}$ и $a \in O(q)$, причем пространство орбит $\widehat{\mathscr{R}}/O(q)$ совпадает с M, а проекция $\hat{\pi} : \widehat{\mathscr{R}} \to M$ удовлетворяет равенству $\hat{\pi} \circ r = \pi$. H-инвариантность слоения $(\mathscr{R}, F)$ влечет H^0-инвариантность этого слоения, поэтому на $\widehat{\mathscr{R}}$ индуцировано слоение $\widehat{F}$, слои которого являются образами слоев слоения F при отображении r. Таким образом, $(\mathscr{R}(\widehat{\mathscr{R}}, H^0), F)$ — слоеное главное H^0-расслоение со стандартным слоем $\mathbb{R}^{q+1}$ и проекцией $r : \mathscr{R} \to \widehat{\mathscr{R}}$ над слоением $(\widehat{\mathscr{R}}, \widehat{F})$.

Для любой точки $u \in \mathscr{R}$ и для слоя $\mathscr{L} = \mathscr{L}(u)$ сужение $r|_{\mathscr{L}} : \mathscr{L} \to \widehat{\mathscr{L}}$ — регулярное накрывающее отображение с группой накрывающих преобразований, изоморфной группе $H^0(u) := \{b \in H^0 \mid R_b(\mathscr{L}) = \mathscr{L}\}$ на слой $\widehat{\mathscr{L}}$ слоения $(\widehat{\mathscr{R}}, \widehat{F})$. Заметим, что $H^0(u) = H(u) \cap H^0$, где $H(u) = \{a \in H \mid R_a(\mathscr{L}) = \mathscr{L}\}$. В силу предположения группа $H(u)$ относительно компактна. В этом случае замыкание группы $H(u)$, следовательно, и сама группа $H(u)$ принадлежат некоторой максимальной компактной подгруппе K в H, сопряженной $O(q)$, поэтому $H^0(u) \subseteq K \cap H^0$. Согласно лемме 3 $K \cap H^0 = \{e\}$, где e — единица группы H. Таким образом, $H^0(u) = \{e\}$ и $r|_{\mathscr{L}} : \mathscr{L} \to \widehat{\mathscr{L}}$ — диффеоморфизм, следовательно, выполняются условия предложения 2, согласно которому существует слоеное сечение $\sigma : \widehat{\mathscr{R}} \to \mathscr{R}$ слоеного главного H^0-расслоения $(\mathscr{R}(\widehat{\mathscr{R}}, H^0), F)$. Сечение σ определяет тривиализацию этого расслоения по формуле $f : \mathscr{R} \to \widehat{\mathscr{R}} \times H^0 : \sigma(u) \cdot h \mapsto (u, h)$, $u \in \widehat{\mathscr{R}}$, $h \in H^0$. При этом $\sigma(u) = (u, e)$ и $\sigma(ua) = (ua, e)$, $a \in O(q)$. Равенства $\hat{\pi} \circ r = \pi$ и $r \circ \sigma = \mathrm{id}_{\widehat{\mathscr{R}}}$ влекут $\hat{\pi} = \pi \circ \sigma$.

Итак, отождествляя $\widehat{\mathscr{R}}$ с $\sigma(\widehat{\mathscr{R}})$, получаем слоеную редукцию расслоения $(\mathscr{R}(M, H), F)$ к ортогональной подгруппе $O(q)$. Это означает, что слоение $(M, \mathcal{F})$ риманово.

Картанова геометрия $\xi = (P(N,H),\omega)$, на которой моделируется слоение $(M,\mathcal{F})$, соответствует конформной геометрии $(N,[g])$. Существование редукции слоеного расслоения $(\mathscr{R}(M,H),F)$ к компактной подгруппе $O(q)$ влечет существование редукции H-расслоения $P(N,H)$ к подгруппе $O(q)$. Это эквивалентно заданию такой римановой метрики $d\in[g]$ на N, что $(M,\mathcal{F})$ — риманово слоение, моделируемое на римановом многообразии (N,d).

Обратно, предположим, что существует риманова метрика $d\in[g]$ на N такая, что конформное слоение $(M,\mathcal{F})$ является римановым, моделируемым на римановом многообразии (N,d). Тогда существует редукция H-расслоения $P(N,H)$ к замкнутой подгруппе $O(q)$. Эта редукция индуцирует слоеную редукцию слоеного расслоения $(\mathscr{R}(M,H),F)$ к подгруппе $O(q)$. В силу компактности группы $O(q)$ по предложению 1 все группы голономии исходного слоения $(M,\mathcal{F})$ относительно компактны. $\square$

Определение 3. Группа голономии слоя конформного слоения называется *существенной*, если она не является относительно компактной.

Следствие 2. *Если конформное слоение $(M,\mathcal{F})$ не является римановым, то оно имеет слой с существенной группой голономии.*

4. Стационарные псевдогруппы голономии

Пусть $\mathscr{H}=\mathscr{H}(M,\mathcal{F})$ — псевдогруппа голономии слоения $(M,\mathcal{F})$. Она представляет собой псевдогруппу локальных конформных диффеоморфизмов риманова многообразия (N,g), где g — одна из класса $[g]$ конформно эквивалентных римановых метрик на многообразии N. Заметим, что $\mathscr{H}$ не зависит от выбора g из $[g]$.

Обозначим через $\mathscr{H}_v$ стационарную подпсевдогруппу псевдогруппы $\mathscr{H}$ в точке $v\in N$, т. е. $\mathscr{H}_v=\{h\in\mathscr{H}\mid h(v)=v\}$. Рассмотрим любое преобразование $\varphi: V\to V'$ из $\mathscr{H}_v$, тогда $\varphi(v)=v$. Зафиксируем нормальную систему координат (U,ϕ) с центром в точке v, $\phi(v)=0$, с координатами x^i. Разложим координатные функции φ^i отображения φ в ряд Тейлора в окрестности точки v:

$$\varphi^i(x)=A^i_jx^j+\frac{1}{2}A^i_{jk}x^jx^k+\dots=Ax+\frac{1}{2}A_xx+\dots. \tag{1}$$

Используя условие конформности локального диффеоморфизма φ, заданное равенством $\varphi^*g=e^\lambda g$ в V, где $\lambda: V\to\mathbb{R}$ — гладкая функция, определяем пару $\langle A,\xi\rangle\in CO(q)\ltimes\mathbb{R}^q$, где $A:=\varphi_{*v}\in CO(q)$, $\xi=d\lambda|_v\in\mathbb{R}^q$. При этом A — главная линейная часть преобразования φ в точке v.

Пусть $P(N,H)$ — главное H-расслоение с проекцией $p: P\to N$, на котором моделируется конформное слоение $(M,\mathcal{F})$, где $H=CO(q)\ltimes\mathbb{R}^q$. Обозначим через $\widehat{P}(N,O(q))$ редукцию $P(N,H)$, соответствующую заданию римановой метрики $g\in[g]$ на N. Выбор нормальной окрестности точки v в (N,g), в которой имеет место разложение (1), соответствует фиксации некоторого $u_0\in\hat{p}^{-1}(v)$, где $\hat{p}=p|_{\widehat{P}}$ [12].

Обозначим через $\mathscr{H}(v)$ группу ростков в точке v локальных конформных диффеоморфизмов из псевдогруппы $\mathscr{H}_v$. В силу квазианалитичности псевдогруппы локальных конформных преобразований $\mathscr{H}$ каждый росток из $\mathscr{H}(v)$ содержит ровно один локальный диффеоморфизм из $\mathscr{H}_v$. Поэтому определено отображение $j:\mathscr{H}(v)\to H$, ставящее в соответствие ростку $\{\varphi\}_v$ локального конформного диффеоморфизма $\varphi\in\mathscr{H}_v$ в v при фиксированной точке $u_0\in\hat{p}^{-1}(v)$ пару $\langle A,\xi\rangle$, где $A=\varphi_{*v}\in CO(q)$, $\xi=d\lambda_v$, если $\varphi^*g=e^\lambda g$.

Предложение 3. *Определенное выше отображение* $j : \mathscr{H}(v) \to H = CO(q) \ltimes \mathbb{R}^q$ *— мономорфизм групп, причем образ* $j(\mathscr{H}(v))$ *совпадает с подгруппой* $H(u_0) = \{a \in H \mid R_a(\mathscr{L}) = \mathscr{L}\}$*, где* $\mathscr{L}$ *— слой поднятого слоения* $(\mathscr{R}, F)$*, проходящий через точку* u_0*.*

Доказательство. Д. В. Алексеевским [2, теорема 7] определено отображение, аналогичное j, для стационарной подгруппы группы Ли конформных диффеоморфизмов. Доказательство того, что j — мономорфизм групп, аналогично доказательству первого утверждения указанной теоремы Алексеевского.

Из эффективности конформной геометрии вытекает, что над каждым конформным диффеоморфизмом $\varphi : V \to V'$ из $\mathscr{H}_v$ лежит единственный изоморфизм Φ расслоений $\xi_V \to \xi_{V'}$ 2-реперов с проекцией φ, причем $\Phi(u_0) = u_0 \cdot a$, $a = \langle A, \xi \rangle$, где $A = \varphi_{*v}$, $\xi = d\lambda|_v$, если $\varphi^* g = e^{\lambda} g$. Следовательно, $j(\mathscr{H}(v)) \subset H(u_0)$. Возьмем любой элемент $b \in H(u_0)$, $b \neq e$, тогда $u = u_0 \cdot b \in u_0 \cdot H \cap \mathscr{L}$, где $\mathscr{L} = \mathscr{L}(u_0)$. Из построения слоеного расслоения $(\mathscr{R}(M, H), F)$ (см. доказательство предложения 2 работы автора [8]) вытекает существование такого локального изоморфизма Γ_{ij}, лежащего над некоторым конформным диффеоморфизмом γ_{ij} из коцикла, задающего слоение $(M, \mathcal{F})$, что $\Gamma_{ij}(u_0) = u$, следовательно, $\gamma_{ij}(v) = v$ и $\gamma_{ij} \in \mathscr{H}_v$. Это означает, что росток $\{\gamma_{ij}\}_v$ в точке v принадлежит $\mathscr{H}(v)$ и $a = j(\{\gamma_{ij}\}_v)$. Поэтому $H(u_0) \subset j(\mathscr{H}(v))$, следовательно, выполняется равенство $H(u_0) = j(\mathscr{H}(v))$. $\square$

Следствие 3. *Группа голономии слоя* L *существенна тогда и только тогда, когда существует элемент* $\varphi \in \mathscr{H}_v$ *такой, что* $j(\varphi)$ *не принадлежит никакой компактной подгруппе группы* H*.*

Локальный конформный диффеоморфизм φ, удовлетворяющий следствию 3, будем называть *существенным в точке* v.

Пусть $a = \langle \lambda A, \xi \rangle$, где $\lambda \in (0, 1)$. Нетрудно показать, что найдется достаточно малое число $\varepsilon > 0$ такое, что нормальная окрестность $U = B(v, \varepsilon)$ точки v в римановом многообразии (N, g), соответствующая точке u_0 и обладающая свойствами: $\varphi(U) \subset U$ и для любого $x \in U$ последовательность $\{\varphi^k(x)\}$ сходится к v при $k \to \infty$.

Если $a = \langle \lambda A, \xi \rangle$, где $\lambda > 1$, то обозначим через U окрестность, построенную выше для φ^{-1}. Тогда $\varphi^{-1}(U) \subset U$ и $\varphi^{-k}(x) \to v$ при $k \to \infty$ для любого $x \in U$.

Пусть теперь $a = \langle A, \xi \rangle$, где $A \in O(q)$, $\xi \in \mathbb{R}^q$. Как показано Д. В. Алексеевским [2, лемма 1], можно считать, что существует вектор $\xi_0 \in T_v N$ такой, что $A\xi_0 = \xi_0$. В этом случае Ферранд в [19] доказано предложение 1, описывающее поведение φ в достаточно малой окрестности точки v, причем в доказательстве Ферранд использует схему доказательства Алексеевского, корректирует доказательство предложения 2 из [2] и упрощает доказательство теоремы Йошимацу [20].

Таким образом, имеет место следующее утверждение, сформулированное в удобном для применения виде.

Лемма (Алексеевский — Йошимацу — Ферранд). *Пусть* $\varphi : V \to V'$ *— конформный диффеоморфизм открытых подмножеств в римановом многообразии* (N, g)*, существенный в точке* $v \in V$*. Тогда найдется такая окрестность* $U \subset V$ *точки* v*, что в каждой точке* $x \in U$ *определена по крайней мере одна из последовательностей* $\{\varphi^k(x)\}, \{\varphi^{-k}(x)\}$*, где* k *— любое натуральное число, причем эта последовательность сходится к точке* v *при* $k \to +\infty$*.*

5. Строение насыщенной окрестности слоя с существенной группой голономии

Тензоры Вейля и Схоутена. Напомним некоторые сведения, известные в конформной геометрии [21]. Пусть (N, g) — n-мерное риманово многообразие. Тогда тензоры Схоутена и Вейля определяются равенствами $s := \frac{1}{n-2}\bigl(\mathrm{Ric} - \frac{\mathrm{scal}}{2(n-1)}g\bigr)$ и $w := r - s \wedge g$ соответственно, где Ric — кривизна Риччи, scal — скалярная кривизна r — тензор кривизны в (N, g), а $\wedge$ — символ произведения Кулкарни — Номидзу. При конформном преобразовании $g \mapsto \tilde{g} = e^{2\sigma}g$ имеет место соответствие $w \mapsto \widetilde{w} = e^{2\sigma}w$. Поэтому если перейти от тензора Вейля w типа $(4, 0)$ к тензору Вейля W типа $(3, 1)$ поднятием первого индекса, то, поскольку $g^{ik} = e^{2\sigma}\tilde{g}^{ik}$, выполняется равенство $\widetilde{W}^i_{j,kl} = \tilde{g}^{is}\widetilde{w}_{sj,kl} = W^i_{jkl}$, т. е. тензор Вейля W не меняется при конформном изменении метрики. Тензор Вейля W типа $(3, 1)$ называется *тензором конформной кривизны Вейля риманова многообразия* (N, g).

Любой тензор P типа $(m, 1)$ на многообразии N можно рассматривать как полилинейное отображение $P : \underbrace{\mathfrak{X}N \times \cdots \times \mathfrak{X}N}_{m} \to \mathfrak{X}N$. На римановом многообразии (N, g) норма P определяется равенством

$$\|P\|_g(x) := \sup_{\|X_i\|_g(x) \le 1} \|P(X_1, \dots, X_m)\|_g(x),$$

где $X_i \in T_xN$, $x \in N$, $i = 1, \dots, m$, $\|X_i\|_g(x) := \sqrt{g_x(X_i, X_i)}$. Как известно, $\|P\| = \|P\|(x)$ — C^∞-гладкая функция на N.

Лемма 4. *Если тензор конформной кривизны Вейля W ни в одной точке риманова многообразия не обращается в нуль, то $h := \|W\| \cdot g$ — риманова метрика на N такая, что любой локальный конформный диффеоморфизм (N, g) является локальной изометрией риманова многообразия (N, h).*

Доказательство. Пусть $\varphi : V \to U$ — локальный конформный диффеоморфизм риманова многообразия (N, g). Пусть $\tilde{g} = \varphi^* g = e^{2\sigma}g$ для любой точки $x \in V$. При этом $\|X\|_{\tilde{g}}(x) = e^\sigma\|X\|_g(x) = \|\varphi_{*x}X\|_g(\varphi(x))$, $X \in T_xN$. Заметим, что инвариантность тензора W при локальном конформном преобразовании φ запишется в виде $W_{\varphi(x)}(\varphi_{*x}(X_1), \varphi_{*x}(X_2), \varphi_{*x}(X_3)) = \varphi_{*x}(W_x(X_1, X_2, X_3))$, $X_i \in T_xN$, $i = 1, 2, 3$. Учитывая это, получаем цепочку равенств

$$\begin{aligned}
\|W\|_g(\varphi(x)) &= \sup_{\|\varphi_{*x}(X_i)\|_g(\varphi(x)) \le 1} \|W_{\varphi(x)}(\varphi_{*x}(X_1), \varphi_{*x}(X_2), \varphi_{*x}(X_3))\|_g(\varphi(x)) \\
&= \sup_{\|X_i\|_g(x) \le e^{-\sigma}} \|\varphi_{*x}(W_x(X, Y, Z))\|_g(\varphi(x)) = \sup_{\|X_i\|_g(x) \le e^{-\sigma}} e^\sigma\|W(X_1, X_2, X_3)\|_g(x) \\
&= \sup_{\|X_i\|_g(x) \le 1} e^{-2\sigma}\|W(X_1, X_2, X_3)\|_g(x) = e^{-2\sigma}\|W\|_g(x).
\end{aligned}$$

Пусть $h := \|W\|g$. Тогда $(\varphi^* h)_x = \|W\|_g(\varphi(x)) \cdot (\varphi^* g)_x = \|W\|_g(x) \cdot g_x = h_x$, $x \in V$, т. е. φ — локальная изометрия риманова многообразия (N, h). $\square$

При $\dim N = 3$ тензор Вейля W тождественно равен нулю. Тензор V типа $(3, 0)$ с компонентами $V_{ksj} := \nabla_k s_{ij} - \nabla_i s_{kj}$, где s — определенный выше тензор Схоутена типа $(2, 0)$, а ∇ — символ ковариантного дифференцирования относительно связности Леви-Чивита, является конформным инвариантом. Обозначим через V тензор Схоутена типа $(2, 1)$, полученный из V_{ksj} поднятием первого индекса.

Лемма 5. *Предположим, что (N,g) — риманово многообразие размерности 3 и тензор Схоутена V типа $(2,1)$ не равен нулю ни в одной точке из N. Тогда любое локальное конформное преобразование риманова многообразия (N,g) является локальной изометрией риманова многообразия (N,h), где $h := \|V\|^{\frac{2}{3}} \cdot g$.*

Доказательство. Пусть при локальном конформном диффеоморфизме $\varphi : \mathcal{V} \to U$ преобразование метрики имеет вид $g \to \tilde{g} = e^{2\sigma} g$, тогда $V \mapsto \widetilde{V} = e^{-2\sigma} V$. Так же, как в доказательстве леммы 1, получаем $\|V\|_g(\varphi(x)) = e^{-3\sigma}\|V\|_g(x)$ и проверяем, что $h_x := \|V\|_g^{\frac{2}{3}}(x) \cdot g_x$, $x \in N$, — риманова метрика на N, причем $\varphi^* h = h$. $\square$

Конформно плоские римановы многообразия. Напомним, что риманово многообразие (N,g) называется *конформно плоским,* если в каждой точке $x \in N$ существуют окрестность U и гладкая функция σ такие, что $\tilde{g} = e^{2\sigma} g|_U$ — плоская риманова метрика на U.

Теорема (Вейль — Схоутен). *Риманово многообразие (N,g) размерности $n \geq 3$ является конформно плоским тогда и только тогда, когда*

при $n = 3$ тензор Схоутена V тождественно равен нулю;

при $n \geq 3$ тензор Вейля W тождественно равен нулю.

Нехаусдорфовы конформные многообразия. Пусть N — гладкое q-мерное нехаусдорфово многообразие. Тогда в каждой точке $x \in N$ существует карта (U,φ), где $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ — гомеоморфизм, а функции перехода от одной карты к другой гладкие. Поэтому все понятия для гладких хаусдорфовых многообразий, которые носят локальный характер, т. е. могут быть определены в терминах локальных координат, переносятся на нехаусдорфовы многообразия. К таким понятиям относятся: гладкие отображения, касательные векторные пространства, тезорные поля, дифференциал и кодифференциал гладкого отображения. Однако нехаусдорфово риманово многообразие в отличие от хаусдорфова не является метрическим пространством.

В данной работе для нас важно, что на нехаусдорфовы многообразия дословно переносятся понятия риманова и конформного многообразий, а также их кривизн, понятия изометрий и конформных преобразований.

Везде далее, когда речь идет о группе накрывающих преобразований накрытия $\chi : \widetilde{M} \to M$, предполагаем, что фиксированы точки $x_0 \in M$ и $y_0 \in \chi^{-1}(x_0)$.

$(\mathrm{Conf}(S^q), S^q)$-слоения. Говорят, что группа преобразований Γ *действует квазианалитически* на многообразии N, если из существования открытого подмножества U в N и $\gamma \in \Gamma$ таких, что $\gamma|_U = \mathrm{id}_U$, вытекает $\gamma = \mathrm{id}_N$. Пусть Γ — группа преобразований N, действующая квазианалитически. Слоение $(M,\mathcal{F})$, заданное таким N-коциклом $(U_i, f_i, \{\gamma_{ij}\})_{i,j\in J}$, где каждый локальный диффеоморфизм γ_{ij} является сужением некоторого $\gamma \in \Gamma$, называется (Γ, N)-*слоением.*

Заметим, что благодаря известной теореме Лиувилля конформное слоение $(M,\mathcal{F})$ имеет нулевую трансверсальную кривизну тогда и только тогда, когда $(M,\mathcal{F})$ является $(\mathrm{Conf}(S^q), S^q)$-слоением.

Предложение 4. *Пусть $(M,\mathcal{F})$ — конформное слоение коразмерности $q \geq 3$ с нулевой трансверсальной кривизной, $\chi : \widetilde{M} \to M$ — универсальное накрывающее отображение и $\widetilde{\mathcal{F}} := \chi^*\mathcal{F}$ — индуцированное слоение. Тогда*

1. *Пространство слоев $B = \widetilde{M}/\widetilde{\mathcal{F}}$ слоения $(\widetilde{M},\widetilde{\mathcal{F}})$ является, вообще говоря, нехаусдорфовым q-мерным многообразием, а проекция на пространство слоев*

$r : \widetilde{M} \to B$ — субмерсией. На B индуцируется конформно плоская риманова метрика g_B.

2. *Группа накрывающих преобразований универсального накрытия χ индуцирует группу Ψ конформных преобразований риманова многообразия (B, g_B) и эпиморфизм групп $\chi : \pi_1(M, x_0) \to \Psi$.*

3. *Если L — слой слоения $(M, \mathcal{F})$ с существенной группой голономии и $\widetilde{L} \subset \chi^{-1}(L)$ — слой слоения $(\widetilde{M}, \widetilde{\mathcal{F}})$, то точка $z = r(\widetilde{L})$ имеет окрестность V_z в B, равную либо стандартной сфере S^q, либо евклидову пространству E^q.*

Доказательство. 1. По условию конформное слоение $(M, \mathcal{F})$ имеет нулевую трансверсальную кривизну и поэтому является $(\mathrm{Conf}\, S^q, S^q)$-слоением. Для него существует разлагающее отображение $D : \widetilde{M} \to S^q$ в q-мерную сферу S^q, представляющее собой субмерсию, слои которой содержат слои индуцированного слоения $(\widetilde{M}, \widetilde{\mathcal{F}})$.

Любая субмерсия является открытым отображением, поэтому $\widetilde{B} := D(\widetilde{M})$ — открытое подмногообразие в S^q. Для субмерсии $D : \widetilde{M} \to S^q$ в любой точке $y \in \widetilde{M}$ и $z := D(y) \in \widetilde{B}$ существуют такие карты (U, φ) и (V, ψ) в $\widetilde{M}$ и $\widetilde{B}$ соответственно, что $\varphi(U) = \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, где $n = p + q$, $\psi(V) = \mathbb{R}^q$ и $\psi \circ D \circ \varphi^{-1} = \mathrm{pr}_2 : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^q$ — проекция на второй сомножитель. Отсюда следует, что любой слой $D^{-1}(b)$, $b \in \widetilde{B}$, либо не пересекает U, либо пересекает строго по одному связному подмножеству $\varphi^{-1}(\mathbb{R}^p \times c)$, $c \in \mathbb{R}^q$. То же самое верно и для компонент связности слоев $D^{-1}(b)$, $b \in \widetilde{B}$. Заметим, что слоение $(\widetilde{M}, \widetilde{\mathcal{F}})$ образовано компонентами связности слоев субмерсии D, поэтому $(\widetilde{M}, \widetilde{\mathcal{F}})$ — слоение, регулярное в смысле Пале [22]. Пусть $B := \widetilde{M}/\widetilde{\mathcal{F}}$ — пространство слоев слоения $(\widetilde{M}, \widetilde{\mathcal{F}})$, а $r : \widetilde{M} \to B$ — проекция на пространство слоев, которая всегда является открытым отображением [16]. Следовательно, $\widetilde{U} := r(U)$ — открытое подмножество в B. В силу вышесказанного определена биекция $\widetilde{\varphi} : \widetilde{U} \to \mathbb{R}^q$, удовлетворяющая равенству $\widetilde{\varphi} \circ r = \mathrm{pr}_2 \circ \varphi$ и тем самым являющаяся гомеоморфизмом на $\mathbb{R}^q$. Семейство таким образом построенных пар $\{(\widetilde{U}, \widetilde{\varphi})\}$ образует атлас, задающий структуру гладкого q-мерного многообразия на B, которое, вообще говоря, нехаусдорфово [22]. При этом $r : \widetilde{M} \to B$ становится субмерсией. Обозначим через $f : B \to \widetilde{B}$ отображение, ставящее в соответствие слою $\widetilde{L}$ слоения $(\widetilde{M}, \widetilde{\mathcal{F}})$ слой субмерсии D, содержащий $\widetilde{L}$. Тогда $f \circ r = D$, откуда следует, что $f : B \to \widetilde{B}$ — локальный диффеоморфизм. Пусть g — сужение на $\widetilde{B}$ римановой метрики из S^q. Тогда $g_B := f^* g$ — конформно плоская риманова метрика на B.

2. Фундаментальная группа $\pi_1(M, x_0)$ действует свободно и собственно разрывно на $\widetilde{M}$ как группа накрывающих преобразований Γ универсального накрытия $\chi : \widetilde{M} \to M$. Поскольку каждый элемент $\gamma \in \Gamma$ является диффеоморфизмом $\widetilde{M}$, сохраняющим слоение $(\widetilde{M}, \widetilde{\mathcal{F}})$ и его трансверсальную конформную структуру, равенство $r \circ \gamma = \psi(\gamma) \circ r$ индуцирует конформное преобразование $\psi(\gamma)$ риманова многообразия (B, g_B). Таким образом, определены группа конформных преобразований $\Psi := \{\psi(\gamma) \mid \gamma \in \Gamma\}$, возможно, нехаусдорфова, риманова многообразия (B, g_B) и эпиморфизм групп $\chi : \pi_1(M, x_0) \cong \Gamma \to \Psi : \gamma \mapsto \psi(\gamma), \gamma \in \Gamma$.

3. Предположим, что слой L имеет существенную группу голономии. Возьмем $x \in L$, $y \in \chi^{-1}(x)$ и $z := r(y) \in B$. Заметим, что группа голономии слоя L может интерпретироваться как группа ростков в точке z преобразований из стационарной подгруппы Ψ_z группы Ψ. Поэтому найдется существенное конформ-

ное преобразование $\psi \in \Psi_z$ в точке z. Пусть V — координатная окрестность точки z в многообразии B. Так как B конформно плоское, по теореме Лиувилля можно отождествить V и $\psi(V)$ с некоторыми окрестностями, обозначаемыми теми же буквами, сферы S^q. При этом $\psi|_V$ совпадает с сужением на V глобального конформного преобразования $f \in \mathrm{Conf}(S^q)$. Как известно [2], для любого существенного преобразования $f \in \mathrm{Conf}\, S^q$ в точке z и любой окрестности U этой точки множество $U_z := \bigcup\limits_{m\in\mathbb{Z}} (f|_U)^m(U)$ либо совпадает со всей сферой S^q, либо с $S^q \setminus \{a\} \cong E^q$, где $a \in S^q$. Следовательно, z имеет окрестность $V_z := \bigcup\limits_{m\in\mathbb{Z}} (\psi|_V)^m(V)$ в B, равную либо S^q, либо $S^q \setminus \{a\} \cong E^q$. $\square$

Определение 4. Группу $\Psi := \{\psi(g) \mid g \in G\}$, определенную при доказательстве предложения 4, будем называть *глобальной группой голономии* конформного слоения $(M, \mathcal{F})$ с нулевой трансверсальной кривизной.

Насыщенная окрестность слоя с существенной группой голономии.

Лемма 6. *Пусть L — слой конформного слоения $(M, \mathcal{F})$ с существенной группой голономии, $x \in L \cap U_i$, $f_i : U_i \to V_i$ — субмерсия из N-коцикла, задающего $(M, \mathcal{F})$. Тогда*

1) *существует такая связная, открытая, насыщенная окрестность $\mathcal{W}$ слоя L, что индуцированное слоение $(\mathcal{W}, \mathcal{F}_{\mathcal{W}})$ трансверсально плоское, причем для любого слоя L_α из $\mathcal{W}$ выполняется включение $\overline{L}_\alpha \supset \overline{L}$;*

2) *компонента связности N_v трансверсального многообразия N, содержащая точку $v = f_i(x)$, представляет собой либо сферу S^q, либо евклидово пространство E^q.*

Доказательство. 1. В обозначениях доказываемой леммы из следствий 2 и 3 вытекает существование существенного конформного диффеоморфизма $\varphi : U' \to V'$ в точке $v = f_i(x)$. Согласно лемме Алексеевского — Йошимацу — Ферранд в точке v найдется такая открытая окрестность $U \subset U' \cap V'$, что для любого $y \in U$ определена по крайней мере одна из последовательностей $\{\varphi^n(y)\}$, $\{\varphi^{-n}(y)\}$ для любого натурального числа n, причем эта последовательность сходится к v. Так как тензор W вейлевой кривизны инвариантен относительно конформных преобразований, то $\|W\||_U \equiv \mathrm{const}$. Если $q = \dim N \geq 4$ и тензор W не обращается в нуль ни в одной точке $x \in U$, то по лемме 1 φ — изометрия римановых многообразий $(U, \|W\| \cdot g|_U)$ и $(\varphi(U), \|W\| \cdot g|_{\varphi(U)})$, что противоречит следствию 1. Таким образом, необходимо, чтобы $\|W\|_U \equiv 0 \Leftrightarrow W|_U \equiv 0$. Согласно теореме Вейля — Схоутена это означает, что $(U, g|_U)$ — конформно плоское риманово многообразие.

Если $q = 3$, то рассматриваем вместо W тензор Схоутена V и аналогичным образом получаем, что U — конформно плоское многообразие.

Пусть $\widehat{U} := f_i^{-1}(U) \subset U_i$ и $\mathcal{W} := \bigcup\limits_{\alpha} L_\alpha$, где $L_\alpha \cap \widehat{U} \neq \varnothing$. Как известно (см. например, [16]), $\mathcal{W}$ — связное открытое насыщенное подмножество в M. По доказанному конформное слоение $(\mathcal{W}, \mathcal{F}_{\mathcal{W}})$ трансверсально плоское. По свойству окрестности U для любого слоя $L_\alpha \subset \mathcal{W}$ имеет место включение $\overline{L}_\alpha \supset L$, следовательно, $\overline{L}_\alpha \supset \overline{L}$.

2. Используем обозначения из предложения 4. Рассмотрим $\tilde{x} \in \chi^{-1}(x)$ и $z := r(y) \in B$. Не нарушая общности, считаем, что U_i — окрестность точки x, правильно накрытая отображением χ. Пусть $\widetilde{U}$ — окрестность точки $\tilde{x}$ в $\widetilde{M}$, для

которой $\chi|_{\widetilde{U}}$ — диффеоморфизм на U и $\widetilde{V} := r(\widetilde{U})$. При этом определено отображение $\alpha : \widetilde{V} \to V_i$, удовлетворяющее равенству $\alpha \circ r = f_i \circ \chi$ и, следовательно, являющееся диффеоморфизмом. Пусть α сопрягает существенный локальный конформный диффеоморфизм φ в точке $v = f_i(x)$ с локальным конформным преобразованием ψ в точке z. При этом ψ — сужение на $\widetilde{V}$ некоторого ψ из глобальной группы голономии Ψ слоения $(\mathcal{W}, \mathcal{F}_{\mathcal{W}})$. Согласно предложению 4 существует окрестность V_z точки z в B, равная S^q или E^q. Подчеркнем, что в окрестности V_z определены преобразования ψ^n для любого целого числа n, а сужение ψ^n на любое открытое подмножество из V_z принадлежит псевдогруппе голономии слоения $(\mathcal{W}, \mathcal{F}_{\mathcal{W}})$. Поскольку различные псевдогруппы голономии слоения $(\mathcal{W}, \mathcal{F}_{\mathcal{W}})$ эквивалентны (см., например [23]), преобразования φ^n, $n \in \mathbb{Z}$, определены на всей окрестности V_i и принадлежат псевдогруппе голономии $\mathscr{H}_v$. Отсюда так же, как в доказательстве утверждения 3 предложения 4, получаем результат п. 2. $\square$

6. Конформные слоения, не являющиеся римановыми

Предложение 5. *Пусть L — слой конформного слоения $(M, \mathcal{F})$ коразмерности $q \geq 3$ с существенной группой голономии и $\mathcal{M} = \overline{L}$ — замыкание L в M. Тогда либо*

1) *$\mathcal{M}$ — минимальное множество, при этом $\mathcal{M}$ — аттрактор слоения $(M, \mathcal{F})$, либо*

2) *любой слой $L_\beta \subset \mathcal{M}$, обладающий свойством $\overline{L}_\beta \neq \mathcal{M}$, замкнут в M. Семейство замкнутых слоев, принадлежащих $\mathcal{M}$, отличных от $\mathcal{M}$, непусто и не более чем счетно, а для компактных $\mathcal{M}$ конечно. Каждый замкнутый слой из $\mathcal{M}$ имеет существенную группу голономии и является аттрактором.*

Доказательство. Пусть L — слой с существенной группой голономии и $\mathcal{W}$ — его связная насыщенная окрестность, удовлетворяющая лемме 6. Тогда для замыкания $\overline{L}_\alpha$ в M слоя $L_\alpha \subset \mathcal{W}$ имеет место включение $\overline{L}_\alpha \supset \mathcal{M} = \overline{L}$. Поэтому если $\mathcal{M}$ — минимальное множество, то $\mathcal{M}$ — аттрактор слоения $(M, \mathcal{F})$, причем $\mathcal{A}ttr(\mathcal{M}) = \mathcal{W}$, т. е. выполняется п. 1.

Осталось рассмотреть случай, когда $\mathcal{M} := \overline{L} \neq L$, причем $\mathcal{M}$ не является минимальным множеством. Тогда найдется слой $L_\beta \subset \mathcal{M}$, удовлетворяющий неравенству $\overline{L}_\beta \neq \mathcal{M}$. Это возможно, только когда $L_\beta \cap \mathcal{W} = \varnothing$. Возьмем любую точку $x \in L_\beta$. Найдутся окрестность U_j этой точки x и субмерсия $f_j : U_j \to V_j$ из N-коцикла, задающего слоение $(M, \mathcal{F})$. Так как $L_\beta \subset \overline{L}$, существует точка $y \in L \cap U_j$. Пусть $v := f_j(y)$. Поскольку слой L имеет существенную группу голономии, найдется существенный локальный конформный диффеоморфизм φ в точке v. Согласно утверждению 2 леммы 6 компонента связности N_v многообразия N, содержащая точку v, представляет собой либо S^q, либо $S^q \setminus \{a\} \cong E^q$. Поскольку $L_\beta \cap \mathcal{W} = \varnothing$, необходимо, чтобы $f_j(x) = a$ и $N_v = S^q$. При этом $\mathcal{W}_\beta := \mathcal{W} \cup L_\beta = \bigcup\limits_\delta L_\delta$, где $L_\delta \cap U_j \neq \varnothing$, — связное открытое насыщенное подмножество в M. Так как $(\mathcal{W}_\beta, \mathcal{F}_{\mathcal{W}_\beta})$ является $(\mathrm{Conf}(S^q), S^q)$-слоением, используя глобальную группу голономии этого слоения, получаем, что существует продолжение $\widetilde{\varphi}$ для φ на $N_v = S^q$, принадлежащее псевдогруппе голономии $\mathscr{H}(\mathcal{W}_\beta, \mathcal{F}_{\mathcal{W}_\beta}) \subset \mathscr{H}(M, \mathcal{F})$. Поскольку $\widetilde{\varphi}|_{S^q \setminus \{a\}}$ — существенное конформное преобразование $S^q \setminus \{a\} \cong E^q$, и $\widetilde{\varphi}(a) = a$, то $\widetilde{\varphi}$ — существенное конформное преобразование в точке a. Следовательно, группа голономии слоя L_β существенная.

Подчеркнем, что утверждение 2 леммы 6 влечет замкнутость любого собственного слоя с существенной группой голономии. Поскольку $L_\beta = \mathcal{W}_\beta \cap (M \setminus \mathcal{W})$, то L_β — замкнутый слой индуцированного слоения $(\mathcal{W}_\beta, \mathcal{F}_{\mathcal{W}_\beta})$, следовательно, L_β — собственный слой слоения $(M, \mathcal{F})$. Отсюда, учитывая, что L_β имеет существенную группу голономии, получаем замкнутость L_β в M. Так как для любого слоя $L_\alpha \subset \mathcal{W}_\beta$, отличного от L_β, выполняются включения $\overline{L}_\alpha \supset \overline{L} \supset L_\beta$, замкнутый слой L_β — аттрактор слоения $(M, \mathcal{F})$.

Обозначим через $\jmath$ множество таких индексов δ, что слой L_δ замкнутый и принадлежит $\mathcal{M}$. При этом $\overline{L}_\delta \neq \mathcal{M}$ и, как доказано выше, L_δ — аттрактор и $\mathcal{W}_\delta := \mathcal{W} \cup L_\delta \subset Attr L_\delta$. Так как $\beta \in \jmath$, то $\jmath \neq \varnothing$. Множество $A := \mathcal{M} \cap C\mathcal{W}$, где $C\mathcal{W} := M \setminus \mathcal{W}$, замкнуто в $\mathcal{M}$ как след замкнутого подмножества $C\mathcal{W}$ из M. Подпространство A в M, как и M, имеет счетную базу топологии. Семейство $\xi := \{\mathcal{W}_\delta \mid \delta \in \jmath\}$ образует открытое покрытие A. По теореме Линделёфа открытое покрытие ξ имеет счетное подпокрытие. Поскольку ξ не имеет подпокрытий, оно само счетное, т. е. множество $\jmath$ счетное.

Если $\mathcal{M}$ компактно, то его замкнутое подмножество A также компактно. Поэтому ξ — конечное покрытие A и $\jmath$ — конечное множество. $\square$

Доказательство теоремы 2. Предположим, что конформное слоение $(M, \mathcal{F})$ коразмерности $q \geq 3$ не является римановым. Согласно следствию 1 оно имеет слой L с существенной группой голономии. Поэтому из предложения 5 вытекает существование аттрактора этого слоения, являющегося замыканием слоя с существенной группой голономии. $\square$

Лемма 7. 1. *Объединение K замыканий всех слоев с существенными группами голономий является замкнутым насыщенным подмножеством в M имеет открытую насыщенную окрестность $\mathscr{U}$, обладающую свойствами:*

(1) *$(\mathscr{U}, \mathcal{F}_{\mathscr{U}})$ есть $(\mathrm{Conf}(S^q), S^q)$-слоение;*

(2) *для любого слоя $L_\alpha \subset \mathscr{U}$ найдется минимальное множество $\mathcal{M}_i \subset K$ такое, что $\overline{L}_\alpha \supset \mathcal{M}_i$.*

2. *Конформное слоение на компактном многообразии имеет конечное число минимальных множеств, являющихся замыканиями слоев с существенными группами голономии.*

Доказательство. 1. Пусть $K := \bigcup\limits_{\beta \in B} \overline{L}_\beta$ — объединение замыканий всех слоев с существенными группами голономий. Согласно утверждению 1 леммы 6 существует такая насыщенная окрестность $\mathcal{W}_\beta$ множества $\overline{L}_\beta$, что $(\mathcal{W}_\beta, \mathcal{F}_{\mathcal{W}_\beta})$ — трансверсально плоское конформное слоение и $\overline{L}_\beta \subset \overline{L}_\alpha$ для всех $L_\alpha \subset \mathcal{W}_\beta$. Пусть $\mathcal{W} := \bigcup\limits_{\beta \in B} \mathcal{W}_\beta$, при этом $\mathcal{W}$ обладает требуемыми свойствами (1) и (2).

Предположим, что K незамкнуто в M. Тогда найдется последовательность y_n, сходящаяся к $y \in \overline{K} - K$ при $n \to \infty$. Если все члены какой-либо подпоследовательности y_{n_k} начиная с некоторого принадлежат $\overline{L}_{\beta'}$ для $\beta' \in B$, то $y \in \overline{L}_{\beta'} \subset K$, что противоречит выбору y. Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда все y_n принадлежат различным замыканиям $\overline{L}_{\beta_n}$, $\beta_n \in B$. Не нарушая общности, можно считать, что $y_n \in L_{\beta_n}$. Подчеркнем, что все слои L_{β_n} имеют существенные группы голономии. Пусть U_i — окрестность точки y из N-коцикла $\{U_i, f_i, \{\gamma_{ij}\}\}_{i,j \in J}$, задающего слоение $(M, \mathcal{F})$. Тогда найдется такое n_0, что $y_n \in U_i$ при $n \geq n_0$. Согласно лемме 6 любой слой L_α из открытой насыщенной окрестности $\mathcal{W} := \bigcup\limits_\alpha L_\alpha$, где $L_\alpha \cap U_i \neq \varnothing$, слоя L_{β_n}, $n > n_0$, обладает свойством $\overline{L}_\alpha \supset L_{\beta_n}$, следовательно, $\overline{L}_{\beta_n} = \overline{L}_{\beta_1}$, что противоречит предположению. Таким образом, K замкнуто в M.

2. Предположим противное. Пусть $\{x_m\}$ — бесконечная последовательность точек, взятых по одной из различных минимальных множеств $\mathcal{M}_m$, причем группа голономии каждого слоя $L_m \ni x_m$ существенная. В силу компактности M последовательность $\{x_m\}$ имеет бесконечную сходящуюся подпоследовательность. Аналогично предыдущему приходим к противоречию с тем, что все множества $\mathcal{M}_m$ различны.

Доказательство теоремы 3. Утверждение 1 теоремы 3 вытекает из предложения 5, а утверждение 2 следует из первого утверждения леммы 7 и теоремы 1.

7. Конформные слоения на компактных многообразиях

Вертикально-горизонтальная гомотопия. Напомним терминологию, используемую нами в [8]. Пусть $(M, \mathcal{F})$ — гладкое слоение коразмерности $q \geq 1$ и $\mathfrak{M}$ — q-мерное трансверсальное распределение. Тогда имеет место разложение касательного векторного пространства T_xM, $x \in M$, в прямую сумму векторных подпространств $T_xM = T_x\mathcal{F} \oplus \mathfrak{M}_x$.

Здесь все отображения предполагаются кусочно гладкими. Кривая называется *вертикальной,* если она лежит в одном слое слоения $(M, \mathcal{F})$. Кривая называется *горизонтальной,* если все ее касательные векторы принадлежат распределению $\mathfrak{M}$. Другими словами, кусочно гладкая кривая является горизонтальной, если каждый ее гладкий кусок — интегральная кривая распределения $\mathfrak{M}$.

Вертикально-горизонтальной гомотопией (кратко в.г.г) называется отображение $H : I_1 \times I_2 \to M$, где $I_1 = I_2 = [0, 1]$, для которого сужение $H|_{I_1\times\{t\}}$, $t \in I_2$, — горизонтальная кривая, а сужение $H|_{\{s\}\times I_2}$, $s \in I_1$, — вертикальная кривая. Пара путей $(H|_{I_1\times\{0\}}, H|_{\{0\}\times I_2})$ называется *базой* в.г.г H. Пара путей с общим началом (σ, h), где $\sigma : I_1 \to M$ — горизонтальная, а $h : I_2 \to M$ — вертикальная кривые, называется *допустимой для в.г.г.* Если существует в.г.г H с базой (σ, h), то такая гомотопия единственна. Путь $\tilde{\sigma} := H|_{I_1\times\{1\}}$ называется *переносом* пути σ вдоль h, путь $\tilde{h} := H|_{\{1\}\times I_2}$ — *переносом пути* h вдоль σ. Аналогично определяются в.г.г и переносы путей, когда I_1 и I_2 заменяются полуинтервалами.

Пусть $(M, \mathcal{F})$ — риманово слоение коразмерности q, тогда существует трансверсально проектируемая метрика g_M на M. Обозначим через $\mathfrak{M}$ q-мерное распределение, дополнительное по ортогональности к $T\mathcal{F}$ на римановом многообразии (M, g_M). Пусть (σ, h) — допустимая пара путей, причем σ — горизонтальная геодезическая в (M, g_M). Тогда по свойству метрики g_M если существует в.г.г с базой (σ, h) и $\tilde{\sigma}$ — перенос σ вдоль h, то $\tilde{\sigma}$ — горизонтальная геодезическая той же длины, что и σ, т. е. $l(\tilde{\sigma}) = l(\sigma)$, где l — символ длины кривой.

Известно (см., например, [10]), что в случае полноты римановой метрики g_M для любой допустимой пары путей (σ, h) существует в.г.г H с базой (σ, h). При этом распределение $\mathfrak{M}$ называется *связностью Эресмана* для слоения $(M, \mathcal{F})$ [10].

Окрестность компактного минимального множества, не содержащего слоев с существенной группой голономии.

Лемма 8. *Пусть $\mathcal{M}$ — компактное минимальное множество конформного слоения $(M, \mathcal{F})$, не содержащее слоев с существенными группами голономии. Тогда в любой окрестности $\mathcal{U}$ множества $\mathcal{M}$ существует насыщенная окрестность $\mathscr{V}$, образованная слоями с несущественными группами голономии.*

Доказательство. Согласно лемме 7 объединение K замыканий всех слоев с существенными группами голономий является замкнутым насыщенным подмножеством в M. Поэтому $M_0 = M \setminus K$ — открытое насыщенное подмногообразие в M, а индуцированное слоение $(M_0, \mathcal{F}_0)$, где $\mathcal{F}_0 := \mathcal{F}_{M_0}$, не имеет слоев с существенными группами голономий. По теореме 1 слоение $(M_0, \mathcal{F}_0)$ риманово. Пусть g_0 — трансверсально проектируемая метрика в M_0 относительно $(M_0, \mathcal{F}_0)$, называемая "bundle-like metric" [18].

Если $\mathcal{M} \cap K \neq \varnothing$, то найдется такой слой L с существенной группой голономии, что $\mathcal{M} \subset \overline{L}$. Согласно предложению 5 либо $\mathcal{M} = \overline{L}$, либо $\mathcal{M}$ — замкнутый слой с существенной группой голономии. Оба случая противоречат условию леммы, поэтому $\mathcal{M} \subset M_0$.

Пусть $\mathcal{U}$ — произвольная окрестность $\mathcal{M}$ в M, тогда $\mathcal{U}_0 = \mathcal{U} \cap M_0$ также открытая окрестность $\mathcal{M}$ в M. В каждой точке $x \in \mathcal{M}$ существует окрестность U_x в слое $L = L(x)$, замыкание которой в M компактно. Найдется такое число $\varepsilon_x > 0$, что трубчатая окрестность $V_x = h_{\varepsilon_x}(U_x)$ радиуса ε_x [18] принадлежит $\mathcal{U}_0$ вместе с замыканием. В силу компактности $\mathcal{M}$ покрытие $\eta = \{V_x \mid x \in \mathcal{M}\}$ имеет конечное подпокрытие $\eta_0 = \{V_1, \dots, V_m\}$, причем объединение $V := V_1 \cup \dots \cup V_m$ имеет компактное замыкание $\overline{V} := \overline{V}_1 \cup \dots \cup \overline{V}_m$ в M, принадлежащее $\mathcal{U}_0$. Граница ∂V множества V в M замкнута и, следовательно, компактна.

Обозначим через d функцию расстояния в M_0, индуцированную римановой метрикой g_0. Поскольку $\overline{V}$ компактно, метрическое пространство $(\overline{V}, d|_{\overline{V}})$ полное.

Пусть $\mu := d(\partial V, \mathcal{M}) > 0$ — расстояние между двумя непересекающимися компактными подмножествами метрического пространства (M_0, d). Рассмотрим трубчатую окрестность $V_0 := h_\varepsilon(U_1)$ радиуса $\varepsilon = \min(\mu/2, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)$, где ε_i, $i \in \overline{1, m}$, — радиус трубчатой окрестности $V_i = h_{\varepsilon_i}(U_i)$. Положим $\mathscr{V} := \bigcup\limits_\alpha L_\alpha$, где $L_\alpha \cap V_0 \neq \varnothing$, тогда $\mathscr{V}$ — связное открытое насыщенное подмножество в M. Покажем, что $\mathscr{V}$ — искомая окрестность. Поскольку $V_0 \subset M_0$, все слои из $\mathscr{V}$ имеют несущественные группы голономии. Поэтому достаточно показать включение $\mathscr{V} \subset \mathcal{U}$.

Для любого слоя L_α, $L_\alpha \cap V_0 \neq \varnothing$, существует ортогональная слоям геодезическая σ длины $l(\sigma) = s_0 < \varepsilon$ такая, что $\sigma(0) = z_0 \in L_\alpha \cap V_0$, $\sigma(1) = x_0 \in L \subset \mathcal{M}$. Предположим, что слой L_α выходит из V, тогда $L_\alpha \cap \partial V \neq \varnothing$. Поэтому найдется путь $f : [0,1] \to L_\alpha \cap \overline{V}$ такой, что $f(0) = z_0 \in L_\alpha \cap V_0$, $f([0,1)) \in V$, $f(1) = z_1 \in L_\alpha \cap \partial V$.

Покажем, что существует в.г.г H с базой (σ, f) относительно слоения $(M_0, \mathcal{F}_0)$ и q-мерного ортогонального к $T\mathcal{F}_0$ распределения $\mathfrak{M}$. Заметим, что локально в.г.г с данной базой всегда существует. Поэтому найдутся такие числа $\tau, \delta \in (0,1]$, что определены переносы $\sigma|_{[0,\delta)}$ вдоль f и $f|_{[0,\tau)}$ вдоль σ. Следовательно, определены горизонтальные геодезические $\tilde{\sigma}_t$, $t \in [0, \tau)$, полученные переносом σ вдоль $f|_{[0,t]}$, причем $l(\tilde{\sigma}_t) = l(\sigma) < \varepsilon$. Так как $\tilde{\sigma}_t(1) \in L \subset \mathcal{M}$, то

$d(\mathcal{M}, f(t)) \leq l(\tilde{\sigma}_t) < \varepsilon$, $t \in [0, \tau)$. Отсюда, взяв $t_n \to \tau - 0$, по свойству пределов получаем $d(\mathcal{M}, f(\tau)) \leq \varepsilon$.

Пусть $\tilde{\sigma}_{\tau|[0,\delta)}$ — горизонтальная геодезическая, полученная переносом $\sigma_{[0,\delta)}$ вдоль $f|_{[0,\tau]}$. Тогда $d(\mathcal{M}, \tilde{\sigma}_\tau(s)) \leq d(\mathcal{M}, f(\tau)) + l(\tilde{\sigma}_\tau(s)) < 2\varepsilon < \mu$, $s \in [0, \delta)$, следовательно, $\tilde{\sigma}_\tau(s) \in V$. В силу полноты метрического пространства $(\overline{V}, d|_{\overline{V}})$ точка $\tilde{\sigma}_\tau(\delta)$ определена как предел $\tilde{\sigma}_\tau(s)$ при $s \to \delta - 0$, причем $\tilde{\sigma}_\tau(\delta) \in V$. Таким образом, подмножество A точек $s \in I_1$ таких, что существует перенос $\sigma|_{[0,s]}$ вдоль $f|_{[0,\tau]}$, открыто и замкнуто в отрезке I_1. Связность I_1 влечет равенство $A = I_1$, поэтому определена в.г.г H_τ с базой $(\sigma, f|_{[0,\tau]})$. Используя это и связность I_2, мы получаем, что определена в.г.г $H : I_1 \times I_2 \to M$ с базой (σ, f).

Пусть $\tilde{\sigma}$ — перенос пути σ вдоль f. Так как $\tilde{\sigma}(0) = h(1) = z_1$, $\tilde{\sigma}(1) \in L \subset \mathcal{M}$, то $d(z_1, \mathcal{M}) \leq l(\tilde{\sigma}) = l(\sigma) = s_0 < \varepsilon < \mu$. Получили противоречие с тем, что $d(\partial V, \mathcal{M}) = \mu$. Следовательно, $\mathscr{V} \subset V \subset \mathcal{U}$. $\square$

Замечание 3. Нетрудно показать, что $\mathfrak{M}|_{\mathscr{V}}$ — связность Эресмана для риманова слоения $(\mathscr{V}, \mathcal{F}|_{\mathscr{V}})$. Построенная окрестность $\mathscr{V}$ играет роль «ловушки для слоев» в доказательстве теоремы 4.

Доказательство теоремы 4. Предположим, что $(M, \mathcal{F})$ — конформное слоение коразмерности $q \geq 3$, не являющееся римановым, на компактном многообразии M. Пусть K — объединение замыканий слоев с существенной группой голономии. Согласно лемме 7 множество K замкнуто в M и, следовательно, компактно. Обозначим через $\mathscr{U}$ открытую насыщенную окрестность множества K, удовлетворяющую лемме 7.

Покажем, что $\mathscr{U} = M$. Поскольку M связно, достаточно показать, что $\mathscr{U}$ замкнуто в M. Предположим противное. Пусть $\mathscr{U}$ незамкнуто в M, тогда $\partial\mathscr{U} \neq \varnothing$. Так как граница $\partial\mathscr{U}$ является непустым насыщенным компактным подмножеством в M, то, как известно [16], существует минимальное множество $\mathcal{M} \subset \partial\mathscr{U}$. Заметим, что $\mathcal{M}$ — компактное минимальное множество, не содержащее слоев с существенной группой голономии.

Компактные непересекающиеся подмножества K и $\mathcal{M}$ имеют непересекающиеся окрестности U_K и $U_{\mathcal{M}}$. Будем считать, что $U_K \subset \mathscr{U}$, в противном случае заменим U_K пересечением $U_K \cap \mathscr{U}$. Согласно лемме 8 существует насыщенная окрестность $\mathscr{V}$ множества $\mathcal{M}$, принадлежащая $U_{\mathcal{M}}$, т. е. $\mathscr{V} \subset U_{\mathcal{M}}$. Поскольку $\mathcal{M} \subset \partial\mathscr{U}$, существует $x \in \mathscr{U} \cap \mathscr{V}$. Тогда слой $L_\alpha = L_\alpha(x)$ принадлежит $\mathscr{V}$, так как $\mathscr{V}$ — насыщенная окрестность, следовательно, $L_\alpha \cap U_K = \varnothing$. С другой стороны, $L_\alpha \subset \mathscr{U}$, и существует минимальное множество $\mathcal{M}_i \subset K$ такое, что $\mathcal{M}_i \subset \overline{L}_\alpha$. Поэтому необходимо, чтобы $L_\alpha \cap U_K \neq \varnothing$. Противоречие доказывает, что $\partial\mathscr{U} = \varnothing$ и $M = \mathscr{U}$ в силу связности M. Следовательно, слоение $(M, \mathcal{F}) = (\mathscr{U}, \mathcal{F}_{\mathscr{U}})$ имеет нулевую трансверсальную кривизну. Кроме того, все минимальные множества слоения $(M, \mathcal{F})$ представляют собой замыкания слоев (или замкнутые слои) с существенными группами голономии и являются аттракторами. Согласно лемме 7 их конечное число, причем каждый слой принадлежит бассейну по крайней мере одного из аттракторов. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Obata M.* The conjectures on conformal transformations of Riemannian manifolds // J. Differ. Geom. 1971. V. 6, N 2. P. 247–258.
2. *Алексеевский Д. В.* Группы конформных преобразований римановых пространств // Мат. сб. 1972. Т. 89, № 2. С. 280–296.
3. *Алексеевский Д. В.* S^n и E^n — единственные римановы пространства, допускающие существенное конформное преобразование // Успехи мат. наук. 1973. Т. 28, № 5. С. 225–226.

4. *Ferrand J.* The action of conformal transformations on a Riemannian manifold // Math. Ann. 1996. V. 304, N 2. P. 277–291.
5. *Vaisman I.* Conformal foliations // Kodai Math. J. 1979. V. 2, N 1. P. 26–37.
6. *Tarquini C.* Feuilletages conformes // Ann. Inst. Fourier. 2004. V. 52, N 2. P. 453–480.
7. *Frances C., Tarquini C.* Autour du theoreme de Ferrand–Obata // Ann. Global Anal. Geom. 2007. V. 21, N 1. P. 51–62.
8. *Жукова Н. И.* Минимальные множества картановых слоений // Тр. мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. 2007. Т. 256. С. 115–147.
9. *Жукова Н. И.* Вейлевы слоения // Нелинейная динамика. 2010. Т. 6, № 1. С. 219–231.
10. *Blumenthal R. A., Hebda J. J.* Ehresmann connections for foliations // Indiana Univ. Math. J. 1984. V. 33, N 4. P. 597–611.
11. *Deroin B., Kleptsyn V.* Random conformal dynamical systems // Geom. Funct. Anal. 2007. V. 17, N 4. P. 1043–1105.
12. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. М.: Наука, 1981. Т. 1.
13. *Кобаяси Ш.* Группы преобразований в дифференциальной геометрии. М.: Наука, 1986.
14. *Blumenthal R.* Cartan submersions and Cartan foliations // Ill. Math. J. 1987. V. 31, N 2. P. 327–343.
15. *Zhukova N. I.* Complete foliations with transversal rigid geometries and their basic automorphisms // Вестн. РУДН. Сер. Математика. Информатика. Физика. 2009. V. 2. P. 14–35.
16. *Candel A., Conlon L.* Foliations I. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2000. (Grad. Stud. Math.; V. 23).
17. *Годеман Р.* Алгебраическая топология и теория пучков. М.: Изд-во иностр. лит., 1961.
18. *Molino P.* Riemannian foliations. Boston: Birkhauser, 1988. (Progr. Math.).
19. *Ferrand J.* Sur un lemme d'Alekseevskii relatif aux transformations conformes // C. R. Acad. Sci., Paris. 1977. V. 284. P. 121–123.
20. *Yoshimatsu Y.* On the theorem of Alekseevskii concerning conformal transformations // J. Math. Jap. 1976. V. 28, N 2. P. 278–289.
21. *Hertrch-Yeromin H.* Introduction to Möbius differetial geometry. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2003. (London Math. Soc. Lecture Notes.; Ser 300).
22. *Palais R.* A global formulation of the Lie theory of transformation groups. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1957. (Mem. Amer. Math. Soc.; V. 22).
23. *Salem E.* Riemannian foliations and pseudogroups of isometries // Appendix D in [18].

Статья поступила 13 мая 2010 г.

Жукова Нина Ивановна
Нижегородский гос. университет им. Н. И. Лобачевского,
механико-математический факультет, кафедра геометрии и высшей алгебры,
пр. Гагарина, 23, корп. 6, Нижний Новгород 603950