*Сибирский математический журнал*
*Май—июнь, 2011. Том 52, № 3*

*УДК 519.17*

# АЦИКЛИЧЕСКАЯ ПРЕДПИСАННАЯ 5–РАСКРАШИВАЕМОСТЬ ПЛОСКИХ ГРАФОВ БЕЗ 4–ЦИКЛОВ

**О. В. Бородин, А. О. Иванова**

**Аннотация.** Гипотеза о предписанной ациклической 5-раскрашиваемости плоских графов (О. В. Бородин и др., 2002) пока что подтверждена лишь для некоторых узких классов графов: с обхватом не менее 5 (Монтасьер, Ошам и Распо, 2006), без 4- и 5-циклов, или без 4- и 6-циклов (Монтасьер, Ванг и Распо, 2007), без 4-циклов и хордальных 6-циклов (Занг и Кзу, 2009), без 4-циклов и 3-циклов на расстоянии менее 3 (Чен и Ванг, 2008), а также без 4-циклов и пересекающихся 3-циклов (Чен и Распо, 2010). Ванг и Чен (2009) доказали, что плоские графы без 4-циклов предписанно ациклически 6-раскрашиваемы. В работе доказано, что плоский граф без 4-циклов предписанно ациклически 5-раскрашиваем, что является совместным усилением всех вышеперечисленных результатов.

**Ключевые слова:** граф, плоский граф, раскраска, ациклическая раскраска, предписанная раскраска.

## 1. Введение

Через $V(G)$ и $E(G)$ обозначим множество вершин и ребер графа $G$ соответственно. Правильная *$k$-раскраска* графа $G$ есть отображение $f : V(G) \longrightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ такое, что $f(x) \neq f(y)$, если вершины $x$ и $y$ смежны в $G$.

Правильная вершинная раскраска графа называется *ациклической*, если каждый цикл окрашен не менее чем тремя цветами (Грюнбаум [1]). О. А. Бородин [2, 3] доказал гипотезу Грюнбаума о том, что каждый плоский граф ациклически 5-раскрашиваем, улучшив тем самым оценки 9, 8, 7 и 6, полученные Грюнбаумом [1], Митчемом [4], Альбертсоном и Берманом [5] и А. В. Косточкой [6] соответственно. Оценка 5 неулучшаема; более того, существует двудольный 2-вырожденный плоский граф, не являющийся ациклически 4-раскрашиваемым (А. В. Косточка и Л. С. Мельников [7]). Ациклическая раскраска оказалась полезной при получении результатов в задачах о других типах раскраски (см. обзор в монографиях [8, 9]).

Пусть теперь у каждой вершины $v$ графа $G$ имеется список $L(v)$ допустимых цветов, представленных целыми положительными числами. Говорят, что предписание $L$ *хроматично*, если существует правильная вершинная раскраска $G$ такая, что цвет каждой вершины $v$ принадлежит $L(v)$. Граф $G$ называется *предписанно $k$-раскрашиваемым*, если любое предписание $L$ на $G$, обладающее свойством $|L(v)| \geq k$ для всех $v \in V(G)$, является хроматичным.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 09–01–00244, 08–01–00673).

Очевидно, что любой плоский граф предписанно 6-раскрашиваем, поскольку каждый его подграф содержит вершину степени не более 5. Томассен [10] доказал знаменитую теорему о том, что каждый плоский граф является предписанно 5-раскрашиваемым, а Фогт [11] показала, что эта оценка неулучшаема.

О. В. Бородин и др. [12] доказали, что каждый плоский граф предписанно ациклически 7-раскрашиваем, и высказали предположение, обобщающее результаты Бородина и Томассена [3, 10].

**Гипотеза 1.** *Каждый плоский граф предписанно ациклически* 5*-раскрашиваем.*

Однако эта гипотеза очень трудна; пока что удалось подтвердить ее только для некоторых узких классов плоских графов: для графов с обхватом не менее 5 (Монтасьер, Ошам и Распо [13]), для графов без 4- и 5-циклов, или без 4- и 6-циклов (Монтасьер, Ванг и Распо [14]), для графов без 4-циклов и без хордальных 6-циклов (Занг и Кзу [15]), для графов без 4-циклов и без 3-циклов на расстоянии менее 3 друг от друга (Чен и Ванг [16]), а также для графов без 4-циклов и пересекающихся 3-циклов (Чен и Распо [17]).

Ванг и Чен [18] доказали, что плоские графы без 4-циклов предписанно ациклически 6-раскрашиваемы. Были также получены достаточные условия ациклической 4- и 3-раскрашиваемости плоских графов (как обычной, так и предписанной). Минимальное $k$, при котором $G$ является ациклически $k$-раскрашиваемым (предписанно ациклически $k$-раскрашиваемым), обозначим через $a(G)$ (соответственно через $a^l(G)$).

О. В. Бородин, А. В. Косточка и Вудал [19] показали, что если $G$ — плоский граф с обхватом $g$, то $a(G) \le 4$ при $g \ge 5$ и $a(G) \le 3$ при $g \ge 7$. Недавно было доказано, что $a^l(G) \le 3$ при $g \ge 7$ (О. В. Бородин и др. [20]) или если $G$ не содержит циклов длины от 4 до 12 (О. В. Бородин [21], и, независимо, Окар и Монтасьер [22]); последний результат усилен О. В. Бородиным и А. О. Ивановой [23] запрещением циклов длины от 4 до 11.

Оценка $a^l(G) \le 4$ доказана в следующих случаях: для $g \ge 5$ (Монтасьер [24]), для $G$, не содержащего 4-, 5- и 6-циклов (Монтасьер, Распо и Ванг [25]), при отсутствии 4-, 6- и 7-циклов, либо 4-, 6- и 8-циклов (Чен, Распо и Ванг [26]). О. В. Бородин [27] доказал оценку $a(G) \le 4$ для $G$, не содержащего ни 4-, ни 6-циклов. О. В. Бородин, А. О. Иванова и Распо [28] дали совместное обобщение результатов из [24–27], доказав оценку $a^l(G) \le 4$ при отсутствии 4-циклов и треугольных 6-циклов (т. е. 6-циклов, смежных с 3-циклами).

Кроме того, Монтасьер, Распо и Ванг [25] доказали, что $a^l(G) \le 4$ для любого плоского графа без 4-, 5- и 7-циклов, или без 4-, 5- и пересекающихся 3-циклов, тогда как Чен и Распо [29] доказали это же для $G$, не имеющего ни 4- и 5-циклов, ни 8-циклов с треугольными хордами. О. В. Бородин [30] доказал $a(G) \le 4$ для $G$ без 4- и 5-циклов. Перечисленные выше результаты из [13, 25, 29, 30] улучшены О. В. Бородиным и А. О. Ивановой в [31], где доказано, что каждый плоский граф без 4- и 5-циклов предписанно ациклически 4-раскрашиваем.

Целью данной работы является

**Теорема 1.** *Каждый плоский граф без* 4*-циклов предписанно ациклически* 5*-раскрашиваем.*

Очевидно, что теорема 1 — совместное усиление упомянутых выше результатов из [13–18].

## 2. Доказательство теоремы 1

Предположим, что граф $G$ с предписанием $L$ — наименьший по числу вершин контрпример к теореме 1. Очевидно, что $G$ связен и не содержит 1-вершин. Зафиксируем укладку графа $G$ на плоскости; таким образом, все грани графа $G$ определены.

Формулу Эйлера $|V(G)| - |E(G)| + |F(G)| = 2$ перепишем в виде

$$\sum_{x \in V(G)} (2d(x) - 6) + \sum_{x \in F(G)} (d(x) - 6) = -12, \tag{1}$$

где $F(G)$ — множество граней графа $G$, а $d(x)$ — степень вершины или ранг грани $x \in V(G) \cup F(G)$.

Пусть *начальные заряды* каждой вершины $v \in V(G)$ и каждой грани $f \in F(G)$ равны $\mathrm{ch}(v) = 2d(v) - 6$ и $\mathrm{ch}(f) = d(f) - 6$ соответственно. Основываясь на структурных свойствах графа $G$, сначала дадим правила перераспределения зарядов, приводящие к финальному заряду $\mathrm{ch}^*$ такому, что

$$\sum_{x \in V(G) \cup F(G)} \mathrm{ch}^*(x) = \sum_{x \in V(G) \cup F(G)} \mathrm{ch}(x) = -12.$$

Затем получим противоречие, доказав, что $\mathrm{ch}^*(x) \geq 0$ для каждого $x \in V(G) \cup F(G)$.

**2.1. Структурные свойства минимального контрпримера.** Вершину или ребро назовем *треугольными*, если они инцидентны 3-грани. Очевидно, в $G$ нет треугольных 2-вершин. Число 3-граней, инцидентных вершине $v$, обозначим через $\tau(v)$. Понятно, что для любой $v$ выполняется неравенство $\tau(v) \leq \left\lfloor \frac{d(v)}{2} \right\rfloor$; в частности, 3-вершина инцидентна не более чем одной 3-грани.

Треугольную 3-вершину, соединенную с $v$ нетреугольным ребром, назовем *плохим соседом* вершины $v$, а число плохих соседей вершины $v$ обозначим через $\beta(v)$.

Вершину степени не менее $k$ или не более $k$ будем называть $k^+$- или $k^-$-*вершиной* соответственно и такое же обозначение будем использовать для граней. Через $\nu_2(v)$ обозначим число 2-вершин, смежных с $v$, а через $\varphi_6(v)$ — число $6^+$-граней, инцидентных вершине $v$.

Вершину $v$ назовем *бедной*, если $d(v) \leq 3$ или $d(v) = 4$, а $\tau(v) = 2$, все остальные вершины — *богатыми*. (Далее на всех рисунках бедные вершины изображены белыми, а богатые — черными кружками.) *Бедной* назовем 3-грань, инцидентную двум бедным 4-вершинам. Назовем 3-грань *слабой*, если она инцидентна 3-вершине, и *плохой*, если она является слабой и инцидентна двум бедным вершинам. Не являющуюся плохой 3-грань будем называть *хорошей*.

Иногда 3-грань $uvw$ будем называть $(d(u), d(v), d(w))$*-гранью*. Пусть $\tau_{3,t}(v)$, где $3 \leq t \leq 4$, — число плохих $(3, t, d(v))$-граней, инцидентных вершине $v$. Положим $\tau_b(v) = \tau_{3,3}(v) + \tau_{3,4}(v)$ и $\tau_g(v) = \tau(v) - \tau_b(v)$.

5-Грань $v_1 \dots v_5$ является *специальной для вершин* $v_3$ *и* $v_5$, если $v_1$ и $v_2$ — нетреугольные 3-вершины.

**Лемма 1.** *Для $G$ справедливы следующие свойства* (*рис.* 1)*:*
(a) [14] *нет 2-вершины, смежной с $4^-$-вершиной;*
(b) [32] *нет $4^-$-вершины, имеющей плохого соседа;*
(c) [19, 24] *нет 3-вершины, смежной с двумя 3-вершинами;*
(d) [14] *нет ни $(3, 4^-, 4^-)$-, ни $(3, 3, 5)$-граней;*

(e) *нет треугольной 4-вершины, смежной с двумя нетреугольными 3-вершинами;*

(f) *нет такой $(3,4,5)$-грани, 4-вершина которой смежна с нетреугольной 3-вершиной;*

(g) *нет $(3,4,5)$-грани, 4-вершина которой была бы бедной;*

(h) *нет $(4,4,4)$-грани, инцидентной бедной вершине.*

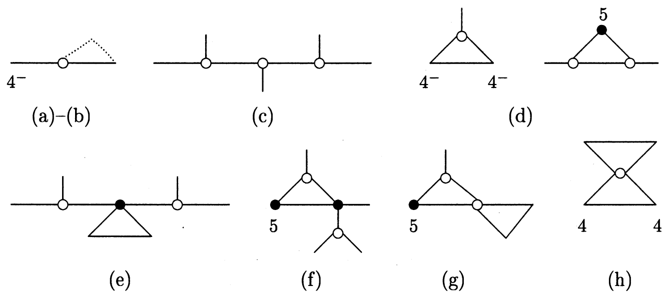


Рис. 1. Сводимые конфигурации в лемме 1.

Доказательство. Обозначим вершины, смежные с 4-вершиной $v$, через $v_1, v_2, v_3, v_4$ по часовой стрелке, и пусть $v$ инцидентна 3-грани $v_1vv_2$.

(e) Предположим, что $v_i$, $3 \le i \le 4$, — нетреугольная 3-вершина, смежная с $v$, $v'_i$ и $v''_i$. Из минимальности $G$ следует, что граф $G - v$ имеет раскраску $c$, удовлетворяющую списку $L$. Без ограничения общности предположим, что $c(v_1) = 1$, $c(v_2) = 2$.

Случай 1. $c(v_3) = 3$ и $c(v_4) = 4$. Достаточно положить $c(v) \ge 5$.

Случай 2. $c(v_3) = 3$ и $c(v_4) = 1$. Попытка положить $c(v) \ge 4$ оказывается неудачной только в случае, когда $\{c(v'_4), c(v''_4)\} = \{4,5\}$ и $L(v) = \{1,2,3,4,5\}$. Кроме того, можно считать, что и $L(v_4) = \{1,2,3,4,5\}$. Но это означает, что должны существовать все четыре двухцветные цепи между $\{v_1, v_2\}$ и $\{v'_4, v''_4\}$, что невозможно.

Случай 3. $c(v_3) = c(v_4) = 3$. Попытка положить $c(v) \ge 4$ не приводит к успеху, лишь если $\{c(v'_3), c(v''_3)\} = \{c(v'_4), c(v''_4)\} = \{4,5\}$, где $\{4,5\} \subset L(v)$. В этом случае, произвольно перекрасив $v_3$, оказываемся в случае 1 или в случае 2.

Случай 4. $c(v_3) \in \{1,2\}$ и $c(v_4) \in \{1,2\}$. Предположим, что $\{3,4,5\} \subset L(v)$. Попытка положить $c(v) \ge 3$ не годится только из-за появления двухцветных цепей. Значит, $\{3,4,5\} \subset \{c(v'_3), c(v''_3), c(v'_4), c(v''_4)\}$. Но тогда если, скажем, $\{c(v'_3), c(v''_3)\} = \{3,4\}$, то, положив $c(v_3) \ge 5$, приходим к случаю 2.

(f) Предположим, что $v_3$ — нетреугольная 3-вершина, окруженная вершинами $v$, $v'_3$ и $v''_3$. Возьмем раскраску $c$ графа $G - v_1$, где $d(v_1) = 3$, и положим $c(v'_1) = 1$, где $v'_1$ — смежная с $v_1$ вершина, отличная от $v$ и $v_2$. Остается рассмотреть случай $1 \in \{c(v), c(v_2)\}$. Если $c(v) = 1$, то достаточно покрасить $v_1$ отлично от ее соседей и от вершин $v_3$ и $v_4$.

Без ограничения общности допустим, что $c(v_2) = 1$ и $c(v) = 2$. Затем предположим, что $\{3,4,5\} \subset L(v_1)$. В рассмотрении нуждается только случай, когда все цвета 3, 4 и 5 присутствуют на соседях вершины $v_2$. Если $6 \in L(v_2)$, то достаточно покрасить $v_2$ в 6. Иначе имеем $L(v_2) = \{1,2,3,4,5\}$ и полагаем $c(v_2) = 2$. Если $c(v_3) \ne c(v_4)$, то достаточно покрасить $v$ в цвет, отличный от 1 (и не встречающийся на ее соседях).

Наконец, допустим, что $c(v_3) = c(v_4)$. Если $c(v_3') \neq c(v_3'')$, то полагаем $c(v_3) \notin \{2, c(v_4)\}$ и приходим к только что рассмотренному случаю. Если же $c(v_3') = c(v_3'')$, то можем положить $c(v) \notin \{1, 2, c(v_3), c(v_3')\}$.

(g) Рассуждаем, как в случае (f), опуская лишь последний абзац.

(h) Предположим, что существуют 3-грани $vv_1v_2$ и $vv_3v_4$, где $d(v_3) = d(v_4) = 4$, а вершины $v_i$, $3 \le i \le 4$, окружены вершинами $v$, $v_{7-i}$, $v_i'$ и $v_i''$. Возьмем раскраску $c$ графа $G - v$ и допустим, что $c(v_1) = 1$, $c(v_2) = 2$. Мы легко раскрасим $v$, если $c(v_3) = 3$ и $c(v_4) = 4$.

Случай 1. $c(v_3) = 3$ и $c(v_4) = 1$. Без ограничения общности можем считать, что $\{4, 5\} \subset L(v)$; значит, должны существовать $(4,1)$- и $(5,1)$-цепи, соединяющие $\{v_4', v_4''\}$ с $v_1$. Если $6 \in L(v_4)$, то достаточно положить $c(v_4) = 6$. Иначе $L(v_4) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, стало быть, можем положить $c(v_4) = 2$ и покрасить $v$ в 4 или 5 благодаря конфликту между двухцветными цепями, соединяющими $\{v_4', v_4''\}$ и $\{v_1, v_2\}$.

Случай 2. $c(v_3) = 2$ и $c(v_4) = 1$. Предположим, что $\{3, 4, 5\} \subset L(v)$; тогда без ограничения общности считаем, что $c(v_3') = 3$, $c(v_3'') = 4$ и $c(v_4') = 5$. Полагая $c(v_3) \ge 5$, приходим к случаю 1. $\square$

**Лемма 2.** *Пусть $d(v) = 5$. Тогда (рис. 2)*

(a) [14, 16] $\nu_2(v) \le 1$, *причем если $\nu_2(v) = 1$, то $v$ не смежна ни с одной треугольной 3-вершиной;*

(b) [17] $\beta(v) \le 3$, *причем если $\beta(v) = 3$, то $\tau(v) = 0$;*

(c) *если $v$ инцидентна бедной 3-грани и $\nu_2(v) = 1$, то $\tau(v) = 1$;*

(d) *если $v$ инцидентна бедной 3-грани и $\beta(v) = 2$, то $v$ не смежна с нетреугольной 3-вершиной;*

(e) *если $v$ инцидентна бедной 3-грани и $\beta(v) = 1$, то $v$ не инцидентна слабой 3-грани;*

(f) *если $v$ инцидентна двум бедным 3-граням, то $\beta(v) = 0$.*

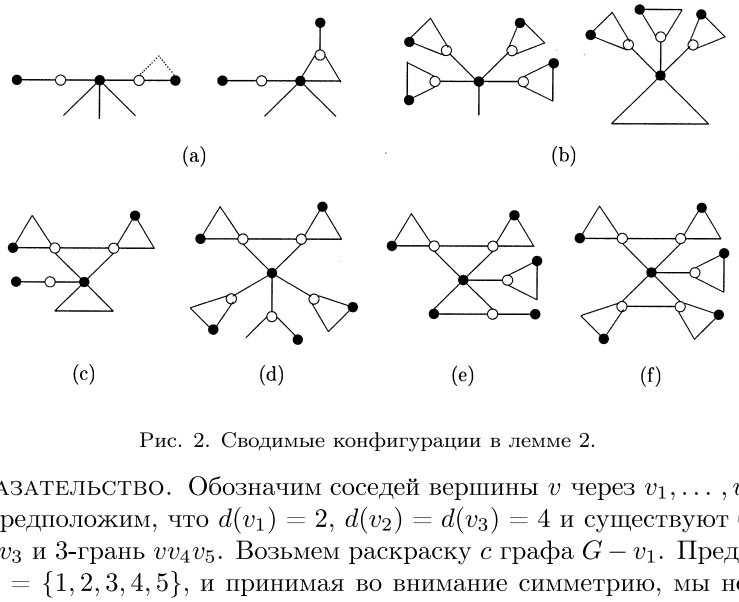

Рис. 2. Сводимые конфигурации в лемме 2.

Доказательство. Обозначим соседей вершины $v$ через $v_1, \dots, v_5$.

(c) Предположим, что $d(v_1) = 2$, $d(v_2) = d(v_3) = 4$ и существуют бедная 3-грань $vv_2v_3$ и 3-грань $vv_4v_5$. Возьмем раскраску $c$ графа $G - v_1$. Предположив, что $L(v_1) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, и принимая во внимание симметрию, мы не сможем покрасить $v_1$ сразу же, только если $v$ и другой сосед вершины $v_1$ покрашены в цвет 1, $c(v_i) = i$ при $2 \le i \le 5$ и цвет 1 присутствует на соседях вершин $v_2$ и $v_3$, отличных от $v$. Мы легко продолжим раскраску, если $6 \in L(v)$; иначе мы перекрасим $v$ в цвет 2 и положим $c(v_2) \ge 4$. Если при этом возникает двухцветный $(3, c(v_2))$-цикл, проходящий через ребро $v_2v_3$, то перекрашиваем вершину $v_2$.

(d) Предположим, что существуют бедная 3-грань $vv_1v_2$ и нетреугольная 3-вершина $v_3$, а $v_4$ и $v_5$ — плохие соседи вершины $v$. Через $v_i'$ и $v_i''$, где $1 \le i \le 2$, обозначим соседей вершины $v_i$, отличных от $v$ или $v_{3-i}$. Если $3 \le i \le 5$, то $v_i'$ и $v_i''$ — соседи вершины $v_i$, отличные от $v$.

Пусть $c$ — раскраска графа $G - v$. Пусть $c(v_1) = 1$ и $c(v_2) = 2$, а $\{3, 4, 5\} \subset L(v)$. Также мы можем считать, что $c(v_3) \notin \{4, 5\}$. Отметим следующие два факта.

($\star$) Если, скажем, цвет 4 присутствует не более одного раза на $\{v_4', v_4'', v_5', v_5''\}$ и избегает $\{v_3', v_3''\}$, то достаточно положить $c(v) = 4$, а затем — $c(v_5) \ge 3$, если, скажем, $4 \in \{c(v_5'), c(v_5'')\}$.

($\star\star$) Если цвет 4 присутствует и на $\{v_4', v_4''\}$, и на $\{v_5', v_5''\}$, но не на $\{v_3', v_3''\}$, то цвет 4 присутствует и на $\{v_1', v_1''\}$, и на $\{v_2', v_2''\}$. Действительно, если $4 \notin \{c(v_1'), c(v_1'')\}$, то мы можем покрасить $v_4$ и $v_5$ в два разных цвета, отличных от 2.

Если $c(v_3') \ne c(v_3'')$, то из ($\star$) следует, что каждый из цветов 3, 4 и 5 должен присутствовать ровно дважды на $\{v_3', v_3'', v_4', v_4'', v_5', v_5''\}$, поэтому мы получаем требуемое, применив ($\star\star$) к цвету из $\{3, 4, 5\} \setminus \{c(v_1'), c(v_1'')\}$.

Наконец, предположим, что $c(v_3') = c(v_3'')$, и вспомним, что $c(v_3) \notin \{4, 5\}$.

Случай 1. $c(v_3') \notin \{4, 5\}$. Из ($\star$) и ($\star\star$) имеем $\{c(v_i'), c(v_i'')\} = \{4, 5\}$, где $i \in \{1, 2, 4, 5\}$, так что достаточно положить $c(v) \notin \{c(v_3), c(v_3'), 4, 5\}$ (и перекрасить вершину $v_2$, если $c(v) = 2$).

Случай 2. $c(v_3') = 4$ и $c(v_3) \ne 3$. Заметим, что ($\star$) и ($\star\star$) применимы к цветам 3 и 5, т. е. $\{c(v_i'), c(v_i'')\} = \{3, 5\}$ при $i \in \{1, 2, 4, 5\}$, так что достаточно взять $c(v) = 4$.

Случай 3. $c(v_3') = 4$ и $c(v_3) = 3$. Согласно ($\star$) и ($\star\star$) имеем $c(v_i') = 5$ при $i \in \{1, 2, 4, 5\}$. Если цвет 4 не присутствует на $\{v_4', v_4'', v_5', v_5''\}$, то достаточно положить $c(v) = 4$.

Итак, пусть $c(v_4'') = 4$. Это означает, что $L(v) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, так как иначе достаточно положить $c(v) \ge 6$, а затем $c(v_5) \ge 3$, если $c(v_5'') = c(v)$.

Теперь предположим, что еще и $c(v_5'') \ne 4$. Если $c(v_1'') \ne 4$, то мы можем положить $c(v) = 4$ и $c(v_4) \notin \{2, 3, 4, 5\}$. Если же $c(v_1'') = c(v_2'') = 4$, то достаточно взять $c(v) = 2$.

Наконец, пусть $c(v_4'') = c(v_5'') = 4$. Положим $c(v) = 2$. В рассмотрении нуждается только случай $c(v_2'') = 1$; здесь нас устраивает $c(v_2) \notin \{1, 2, 5, c(v_1'')\}$.

(e) Пусть $v$ инцидентна бедной 3-грани $vv_1v_2$ и 3-грани $vv_4v_5$ с $d(v_4) = 3$ и имеет плохого соседа $v_3$. Через $v_i'$ и $v_i''$, где $1 \le i \le 3$, обозначим соседей вершины $v_i$, отличных от $v$ и соседей вершины $v$, и пусть $v_4'$ — сосед вершины $v_4$, отличный от $v$ и $v_5$. Возьмем раскраску $c$ графа $G - v_3$ и допустим, что $c(v) = c(v_3') = 4$, $c(v_3'') = 5$ и $\{1, 2, 3\} \subset L(v_3)$. Отметим, что если положить $c(v_3) = \alpha$, где $\alpha \le 3$, то возникает $(\alpha, 4)$-цикл. Значит, каждый из цветов 1, 2, 3 встречается на $v_1$, $v_2$, $v_4$, $v_5$. Можно считать, что $c(v_1) = 1$.

Случай 1. $c(v_2) \geq 5$, $c(v_4) = 3$ и $c(v_5) = 2$. Отметим, что $c(v'_4) = 4$. Если $3 \in L(v)$, то достаточно взять $c(v) = 3$ (и перекрасить $v_4$). В противном случае положим $c(v_3) = 3$ и $c(v) \geq 5$.

Случай 2. $c(v_2) = 2$ и $\{c(v_4), c(v_5)\} = \{3, \beta\}$, где $\beta \geq 5$. Заметим, что цвет 4 должен встречаться как на $\{v'_1, v''_1\}$, так и на $\{v'_2, v''_2\}$. Если $1 \in L(v)$, то достаточно взять $c(v) = 1$, а затем перекрасить $v_1$, причем если цвет 2 встречается на $\{v'_1, v''_1\}$, то нужно взять $c(v_1) \notin \{c(v'_2), c(v''_2)\}$. Теперь ввиду симметрии можно считать, что $\{1, 2\} \cap L(v) = \varnothing$. Тогда полагаем $c(v) \notin \{4, 5\}$.

Случай 3. $c(v_2) = 2$, $c(v_4) = 1$ и $c(v_5) = 3$. Заметим, что $c(v'_4) \notin \{2, 4\}$, так как иначе перекраска $c(v_4) \geq 5$ дает случай 2. Следовательно, цвет 4 встречается на $\{v'_1, v''_1\}$ и на $\{v'_2, v''_2\}$. Если $2 \in L(v)$, то полагаем $c(v) = 2$ и перекрашиваем $v_2$ так же, как перекрашивали $v_1$ в случае 2. В противном случае полагаем $c(v) = \gamma$, где $\gamma \geq 6$. Теперь единственная опасность состоит в $(1, \gamma)$-цикле через $v$, но если он возникает, то делаем перекраску $c(v_4) \notin \{1, 2\}$.

Случай 4. $c(v_2) = 2$, $c(v_4) = 3$ и $c(v_5) = 1$. Вариант $c(v_3) = 3$ (при $c(v) = 4$) должен создавать $(3, 4)$-цикл, и здесь берем $c(v_4) \geq 5$.

(f) Предположим, что $v$ инцидентна бедным 3-граням $vv_1v_2$ и $vv_3v_4$ и имеет плохого соседа $v_5$. Через $v'_i$ и $v''_i$, где $1 \leq i \leq 5$, обозначим соседей вершины $v_i$, отличных от $v$ и соседей вершины $v$.

Пусть $c$ — раскраска графа $G - v_5$, причем $c(v) = c(v'_5) = 1$, $c(v''_5) = 2$ и $\{3, 4, 5\} \subset L(v_5)$. Благодаря симметрии можем также считать, что $c(v_1) = 3$, $c(v_2) = 4$, $c(v_3) = 5$, $c(v_4) \in \{2, 3, 6\}$ и цвет 1 встречается на каждой паре вершин $\{v'_i, v''_i\}$, где $2 \leq i \leq 3$.

Случай 1. $c(v_4) \in \{2, 6\}$. Заметим, что цвет 1 присутствует и на $\{v'_1, v''_1\}$. Если $3 \in L(v)$, то достаточно положить $c(v) = 3$ с дополнительным требованием, чтобы $c(v_1) \notin \{c(v'_2), c(v''_2)\}$ в случае, когда $4 \in \{c(v'_1), c(v''_1)\}$. Теперь ввиду симметрии считаем, что $\{3, 4\} \cap L(v) = \varnothing$, и берем $c(v) \geq 7$.

Случай 2. $c(v_4) = 3$. Можно считать, что $c(v'_1) = 1$. Сначала рассмотрим случай $6 \in L(v)$. При $c(v) = 6$ должна возникать $(3, 6)$-цепь $\dots v_1vv_4 \dots$, значит, $c(v''_1) = 6$ и $6 \in \{c(v'_4), c(v''_4)\}$. Взяв $c(v_1) \in L(v_1) \setminus \{1, 3, 4, 5, 6\}$, достигаем цели всегда, кроме случая, когда $L(v_1) = \{1, 3, 4, 5, 6\}$. Если так, то положим $c(v_1) = 5$. Теперь видим, что $\{c(v'_3), c(v''_3)\} = \{1, 6\}$. Нам было бы достаточно взять $c(v_3) \notin \{1, 3, 4, 5, 6\}$, поэтому пусть $L(v_3) = \{1, 3, 4, 5, 6\}$. Из варианта $c(v_3) = 4$ следует, что $\{c(v'_2), c(v''_2)\} = \{1, 6\}$, и теперь можем положить $c(v) \notin \{1, 2, 3, 6\}$ и $c(v_1) = c(v_4) = 3$, а затем покрасить $v_2$ и $v_3$.

Таким образом, можем считать, что $L(v) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Положим $c(v) = 4$, а затем дополнительно потребуем, чтобы $c(v_2) \notin \{c(v'_1), c(v''_1)\}$, если $3 \in \{c(v'_2), c(v''_2)\}$. Единственная опасность — это $(3, 4)$-цепь $\dots v_1vv_4 \dots$, поэтому будем считать, что $c(v''_1) = 4$ и $4 \in \{c(v'_4), c(v''_4)\}$. Беря теперь $c(v) = 5$ вместо $c(v) = 4$, мы видим, что $3 \in \{c(v'_3), c(v''_3)\}$. Но если так, то можно положить $c(v) = 2$ и $c(v_5) \geq 5$. $\square$

**Лемма 3.** *Пусть $d(v) = 6$. Тогда*

(a) *если $\nu_2(v) = 2$, $\tau_{3,3}(v) = 0$ и $v$ инцидентна либо двум слабым хорошим 3-граням, либо слабой хорошей 3-грани и бедной 3-грани, то $\varphi_6(v) \geq 1$ (рис. 3);*

(b) *если $\tau(v) = 1$, $\nu_2(v) = 3$ и $v$ имеет нетреугольного 3-соседа, то $\varphi_6(v) \geq 1$ (рис. 4);*

(c) *если $v$ принадлежит слабой 3-грани, $\nu_2(v) = 3$ и $v$ смежна с $4^+$-вершиной по нетреугольному ребру, то $\varphi_6(v) \geq 1$;*

(d) *если* $\tau(v) = 0$, $\nu_2(v) = 4$ *и* $v$ *имеет нетреугольного* 3*-соседа, а также* $4^+$*-соседа, то* $\varphi_6(v) \geq 1$;

(e) *если* $v$ *имеет двух нетреугольных* 3*-соседей и* $\nu_2(v) \geq 2$, *то*

(1) *из* $\nu_2(v) = 4$ *следует, что* $\varphi_6(v) \geq 2$;

(2) *из* $\nu_2(v) = 3$ *и* $\beta(v) = 1$ *следует, что* $\varphi_6(v) \geq 1$;

(3) *из* $\nu_2(v) = 2$ *и* $\tau_{3,3}(v) = 1$ *следует, что* $\varphi_6(v) \geq 1$;

(f) *если* $\tau_g(v) = 1$ *и* $\nu_2(v) + \beta(v) + 2\tau_b(v) = 4$, *то* $\beta(v) + \tau_{3,3}(v) + 2\tau_{3,4}(v) \geq 3$; *более того, если* $\beta(v)+\tau_{3,3}(v)+2\tau_{3,4}(v) = 3$, *то хорошая* 3*-грань при* $v$ *не является слабой* (*рис.* 5);

(g) *если* $\nu_2(v) + \beta(v) + 2\tau_b(v) = 5$, *то* $\beta(v) + \tau_{3,3}(v) + 2\tau_{3,4}(v) \geq 4$ (*рис.* 6(g));

(h) $\nu_2(v) + \beta(v) + 2\tau_b(v) \leq 5$ (*см. рис.* 6(h)).

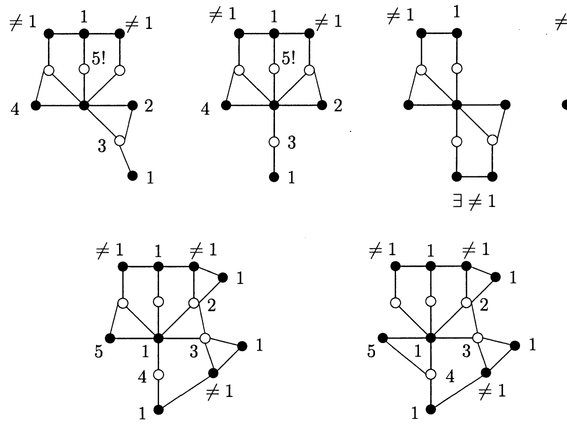


Рис. 3. Конфигурации в лемме 3(a).

Доказательство. Пусть $v_1 \dots v_6$ — соседи вершины $v$ в циклическом порядке, где $d(v_1) = 2$ или $v_1$ — плохой сосед вершины $v$. Если $d(v_j) = 2$ или существует 3-грань $v_j v v_{j+1}$, где $d(v_j) = 3$, то через $v'_j$ обозначим соседа вершины $v_j$, отличного от $v$ и $v_{j+1}$. Если $v_j$ — нетреугольная 3-вершина, то через $v'_j$ и $v''_j$ обозначим соседей вершины $v_j$, отличных от $v$.

В тех случаях, когда $v$ смежна хотя бы с одной 2-вершиной, будем всегда брать раскраску $c$ графа $G - v_1$, где $d(v_1) = 2$, и предполагать, что $c(v) = c(v'_1) = 1$ и $\{2, 3, 4, 5\} \subset L(v_1)$. Следует рассматривать лишь случай, когда, положив $c(v_1) = i$, где $2 \leq i \leq 5$, получаем $(1, i)$-цикл.

Используем одну идею из [19], которую в простейшем виде можно представить следующим образом. Предположим, что $d(v_j) = d(v_{j+1}) = 2$ и грань $v'_j v_j v v_{j+1} v'_{j+1} \dots$ есть пятиугольник, т. е. $v'_j$ смежна с $v'_{j+1}$. Поскольку только одна из $v'_j$ и $v'_{j+1}$ может быть покрашена в 1, то лишь одна из этих вершин может принадлежать двухцветному циклу, который может возникнуть при окраске вершины $v_1$ в цвета 2, 3, 4 и 5. Эта идея позволит нам обнаружить при $v$ одну или даже две $6^+$-грани.

(a) Пусть $T_1$ и $T_2$ суть 3-грани при $v$ (см. рис. 3).

Сначала предположим, что $T_1$ и $T_2$ слабые и хорошие, а это значит, что $v$ имеет двух богатых соседей и двух треугольных 3-соседей. Имеем одну из следующих ситуаций: среди вершин $v_i$ существуют либо три последовательные $3^-$-вершины $v_6$, $v_1$ и $v_2$, либо существуют две пары последовательных $3^-$-вершин. В обоих случаях среди четырех вершин $v'_j$ не менее двух окрашены отлично от

1, но это означает, что мы можем благополучно покрасить $v_1$ в цвет, которого нет на богатых соседях вершины $v$.

Теперь предположим, что $T_1$ — слабая хорошая 3-грань, $T_2$ бедная, $d(v_6) \leq 3$ и $d(v_m) \leq 3$, где $m \neq 6$. Если $m = 2$, то действуем, как в предыдущем абзаце, поэтому ввиду симметрии будем считать, что $m = 4$. Имеем $c(v'_6) \neq 1$, $c(v'_4) = 1$ и $c(v_i) = i$, где $2 \leq i \leq 5$.

Случай 1. $d(v_6) = 3$ (см. рис. 3, конфигурация слева в нижнем ряду). Сначала допустим, что $c(v'_6) \neq 5$. Положим $c(v) \in \{4, 6\}$ и перекрасим $v_4$, если $c(v) = 4$. Если получилось $c(v) \neq c(v'_6)$, то достаточно взять $c(v_6) \notin \{c(v), c(v'_6), 5\}$. Пусть $c(v) = c(v'_6)$; тогда положим, что $c(v_6) \notin \{2, 3, 5, c(v)\}$.

Допустим, что $c(v'_6) = 5$. Если $L(v) \neq \{1, 2, 3, c(v_6), 5\}$, то достаточно положить $c(v) \in L(v) \setminus \{1, 2, 3, c(v_6), 5\}$. Пусть $L(v) = \{1, 2, 3, c(v_6), 5\}$. Положим $c(v) = 2$. Это не приводит к немедленному успеху лишь если $3 \in \{c(v'_2), c(v''_2)\}$. Аналогично показывается, что $2 \in \{c(v'_3), c(v''_3)\}$. Теперь можно положить $c(v_2) \in L(v_2) \setminus \{c(v'_2), c(v''_2), c(v'_3), c(v''_3)\}$, сохраняя $c(v) = 2$ и $c(v_3) = 3$.

Случай 2. $d(v_6) = 2$ (конфигурация справа в нижнем ряду на рис. 3). Положим $c(v) \in \{4, 6\}$ и перекрасим $v_4$, если $c(v) = 4$. Если получилось $c(v) \neq c(v'_6)$, то достаточно перекрасить $v_6$. Если же $c(v) = c(v'_6)$, то положим $c(v_6) \notin \{2, 3, 5, c(v)\}$.

(b) Допустим, что $v$ окружена пятью 5-гранями и 3-гранью (см. рис. 4(b)). Если $d(v_6) = d(v_2) = 2$, то $c(v'_6) \neq 1$ и $c(v'_2) \neq 1$, т. е. через вершину $v$ (и $v_3$, $v_4$ и $v_5$) может проходить не более трех двухцветных циклов, так что мы можем покрасить $v_1$.

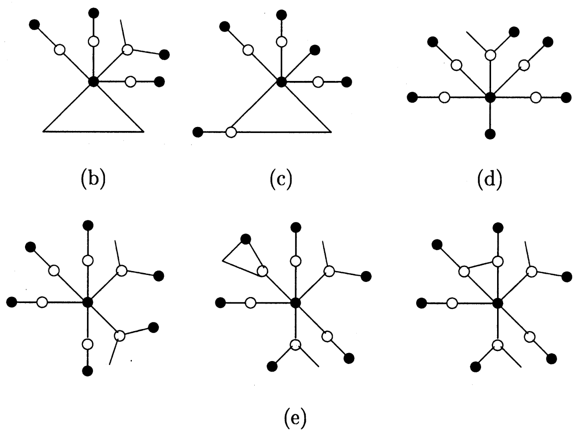


Рис. 4. Конфигурации в лемме 3(b)–(e).

Если $d(v_6) = 2$, а $v_2$ — нетреугольная 3-вершина, то $c(v'_6) \neq 1$ и, скажем, $c(v'_2) \neq 1$. Поскольку случай 1 уже не имеет места, то $d(v_3) = 2$. Заметим, что по крайней мере одна из вершин $v''_2$ и $v'_3$ не покрашена в 1, поэтому у нас снова есть свободный цвет для $v_1$.

(c) Если $d(v_6) = 2$, а $v_2$ есть либо треугольная 3-вершина, либо 2-вершина (см. рис. 4(c)), то $c(v'_6) \neq 1$ и $c(v'_2) \neq 1$, так что мы действуем, как выше. Если же $d(v_6) = d(v_4) = 2$, а $v_3$ есть треугольная 3-вершина, то достаточно заметить, что $c(v'_6) \neq 1$ и либо $c(v'_3) \neq 1$, либо $c(v'_4) \neq 1$.

(d) Можно считать, что $d(v_6) = 2$, а $d(v_2) \leq 3$ (см. рис. 4(d)). Здесь $c(v_6') \neq 1$ и $c(v_2') \neq 1$. Если не существует $(1, i)$-цикла, проходящего через $v_2$, то доказывать нечего, стало быть, считаем, что $d(v_2) = 32$ и $c(v_2'') = 1$. Это означает, что $d(v_5) \geq 4$, поэтому $d(v_3) = d(v_4) = 2$ и, таким образом, хотя бы одна из $v_3$ и $v_4$ не окрашена в 1.

(e) (см. рис. 4(e)). Будем говорить, что 2-вершина либо 3-вершина $v_i$ из $(3, 3, d(v))$-грани *заблокирована* (с точки зрения прохождения двухцветных циклов через $v$ при $c(v) = 1$), если $c(v_i') \neq 1$. Плохой сосед или нетреугольный 3-сосед $v_i$ вершины $v$ *заблокирован*, если $c(v_i') \neq 1 \neq c(v_i'')$. Утверждение леммы 3(e) будет доказано, если по меньшей мере два соседа вершины $v$ будут заблокированы, но предположим противное.

Для доказательства п. (e)(1) заметим, что сначала каждый заблокированный сосед (если он существует) дает нам не более двух 5-граней, инцидентных $v$, а затем каждый незаблокированный 3-сосед дает дополнительно не более одной 5-грани при $v$ (из числа тех, что не инцидентны заблокированному соседу вершины $v$). Понятно, что незаблокированный 2-сосед не может давать таких дополнительных 5-граней. Это значит, что всего при $v$ имеется не более $2 + 1 + 1 = 6 - 2$ пятиугольников; противоречие.

В (e)(2) наихудшим является случай, когда ни один из 3-соседей не заблокирован (но одна из смежных 2-вершин заблокирована), и тогда при $v$ не более $2 + 1 + 1 + 1 < 6$ граней ранга 5.

Для доказательства (e)(3) заметим, что каждый заблокированный 3-сосед $v_i$, входящий в $(3, 3, d(v))$-грань, создает не более одной 5-грани при $v$. Поэтому и здесь наихудшим является случай, когда заблокирована одна из 2-вершин, и тогда $v$ инцидентна самое большее $2 + 1 + 1$ пятиугольникам.

Отметим, что нетрудно найти конфигурации, показывающие неулучшаемость всех трех утверждений в лемме 3(e) в терминах $\varphi_6$.

Для доказательства леммы 3(f),(g),(h) и последующих лемм 4–6 воспользуемся следующими простыми наблюдениями.

**Утверждение 1.** (a) *Если $d(v_1) = 2$ и $c(v) = c(v_1')$, то $v_1$ можно покрасить четырьмя способами.*

(b) *Если $v_1$ — плохой сосед для $v$, а $c(v) = c(v_1')$, то имеется выбор из трех цветов для $v_1$.*

(c) *Если $v_1 v v_2$ — 3-грань с $d(v_1) = d(v_2) = 3$, то вершины $v_1$ и $v_2$ можно покрасить без образования двухцветных цепей через ребро $v_1 v_2$, причем если еще и $c(v) = c(v_1')$, то $v_1$ можно покрасить тремя способами, и то же самое верно для $v_2$.*

(d) *Если $v_1 v v_2$ — плохая 3-грань с $d(v_1) = 3$ и $d(v_2) = 4$, то вершины $v_1$ и $v_2$ можно покрасить без образования двухцветных цепей через ребро $v_1 v_2$, причем если $c(v) = c(v_1')$ либо $c(v) = c(v_2')$, либо и то и другое вместе, то соответственно имеется выбор из трех цветов для $v_1$ либо для $v_2$, либо для обеих этих вершин.*

Доказательство. Утверждения (a) и (b) тривиальны.

(c) Если $c(v_1') = c(v) = c(v_2')$, то сначала можно покрасить вершину $v_1$ четырьмя способами, а затем $v_2$ тремя способами. Если $c(v_1') = c(v) \neq c(v_2')$, то сначала красим $v_1$ четырьмя способами, а затем красим $v_2$. Если $c(v) \neq c(v_1')$ и $c(v_2') \neq c(v)$, то сначала возьмем $c(v_2) \neq c(v_1')$, а затем покрасим $v_1$.

(d) Если $c(v_1') = c(v) = c(v_2') = 1$, то сначала красим $v_2$ тремя способами, а затем $v_1$ также тремя способами. Если $c(v_1') = c(v)$, а $c(v) \notin \{c(v_2'), c(v_2'')\}$, то сначала красим $v_1$ четырьмя способами, а затем красим $v_2$. Если $c(v_1') \neq c(v)$, а $c(v) \in \{c(v_2'), c(v_2'')\}$, то сначала красим $v_2$ (тремя способами), а затем берем $c(v_1) \notin \{c(v_2'), c(v_2'')\}$. Наконец, если $c(v) \notin \{c(v_1'), c(v_2'), c(v_2'')\}$, то сначала возьмем $c(v_2) \neq c(v_1')$, а затем покрасим вершину $v_1$. $\square$

Вернемся к доказательству леммы 3.

(f) (См. рис. 5.) Предположим, что $\beta(v)+\tau_{3,3}(v)+2\tau_{3,4}(v) \leq 2$ и существует хороший треугольник $v_1vv_2$. Пусть $W_2(v)$ — множество вершин на расстоянии 2 от $v$, которые соединяются с $v$ цепями длины 2, проходящими через $\{v_3 \dots v_6\}$. Каждая вершина $v_i$, $3 \leq i \leq 6$, вносит вклад в $v_i'$ из $W_2(v)$, тогда как $v_i$, будучи плохим соседом или 4-вершиной в плохой 3-грани, также вносит вклад в $v_i''$. Поскольку в нашем $G$ нет 4-циклов, это значит, что $|W_2(v)| = \nu_2(v) + 2\beta(v) + 2\tau_{3,3}(v) + 3\tau_{3,4}(v)$.

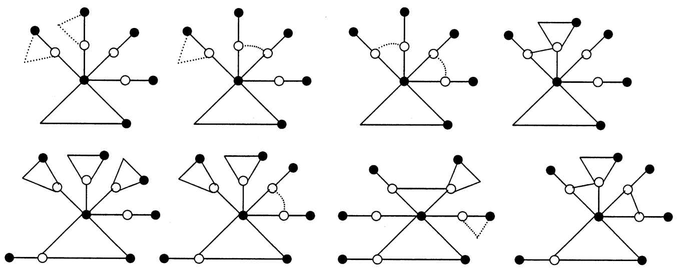

Рис. 5. К лемме 3(f).

Возьмем раскраску $c$ графа $G - v$ и обесцветим $v_3, \dots, v_6$. Будем сначала красить $v$ в цвет, который встречается в $W_2$ наименьшее число раз, а затем красить обесцвеченных соседей, используя утверждение 1. Напомним, что у нас есть по четыре свободных цвета на 2-вершинах и не менее трех цветов на остальных обесцвеченных соседях.

Сначала рассмотрим конфигурации из верхнего ряда на рис. 5. Заметим, что $|W_2(v)| \leq 3 \times 2 + 2 \times 1 = 6$. Пусть $c(v_1) = 1$, $c(v_2) = 2$ и $\{3, 4, 5\} \subset L(v)$. Если, скажем, цвет 3 присутствует самое большее один раз в $W_2(v)$, то полагаем $c(v) = 3$ и легко красим вершины $v_3, \dots, v_6$ согласно утверждению 1, используя цвета, отличные от 1, 2 или 3.

Иначе каждый из цветов 3, 4 и 5 присутствует в $W_2(v)$ в точности дважды. Это может иметь место, только если $\nu_2(v) = \beta(v) = 2$, и в этом случае мы можем дополнительно считать, что цвет 3 встречается на такой вершине $v_i'$, что $d(v_i) = 2$. Возьмем $c(v) = 3$. Заметим, что мы можем покрасить эту 2-вершину $v_i$ в последнюю очередь среди обесцвеченных соседей $\{v_3, \dots, v_6\}$ вершины $v$ по утверждению 1, поскольку $|L(v_i) \setminus \{1, 2, 3\}| \geq 2$.

Теперь докажем вторую часть утверждения (f); а именно, пусть $\beta(v) + \tau_{3,3}(v) + 2\tau_{3,4}(v) = 3$ и хорошая 3-грань при $v$ является слабой. Видим, что $W_2(v) \leq 7$. Дополняя рассуждения предыдущего абзаца, предположим, что $d(v_1) = 3$, $v_1$ смежна с $v_1' \notin \{v, v_2\}$, а цвета 3 и 4 встречаются ровно по два раза на множестве вершин $W_2(v)$, причем $c(v_1') \neq 3$. Пусть, скажем, $c(v_3') = c(v_4') = 3$.

Положим $c(v) = 3$. Утверждение 1 гарантирует по три допустимых цвета для каждой из вершин $v_3$ и $v_4$. Из этих троек мы должны вычеркнуть цвет 2, но не обязаны удалять цвет 1. Таким образом, на $v_3$ и $v_4$ остается по два допустимых цвета, так что мы можем выбрать $c(v_3) \neq c(v_4)$.

(g) (См. рис. 6(g).) Допустим, что $\beta(v)+\tau_{3,3}(v)+2\tau_{3,4}(v)\le 3$, и пусть $d(v_1)\ge 4$ или $v_1$ есть нетреугольная 3-вершина. Теперь $W_2(v)$ определяется так же, как в (f), но для $2\le i\le 6$, и имеем $|W_2(v)|\le 8$. В отличие от (f) только $c(v_1)$ нужно удалять из троек свободных цветов. Это значит, что нам подходит любой из не менее чем четырех цветов из $L(v)\setminus\{c(v_1)\}$, который присутствует не более двух раз в $W_2(v)$. (Заметим, что это справедливо для всех $|W_2(v)|<4\times 3$.)

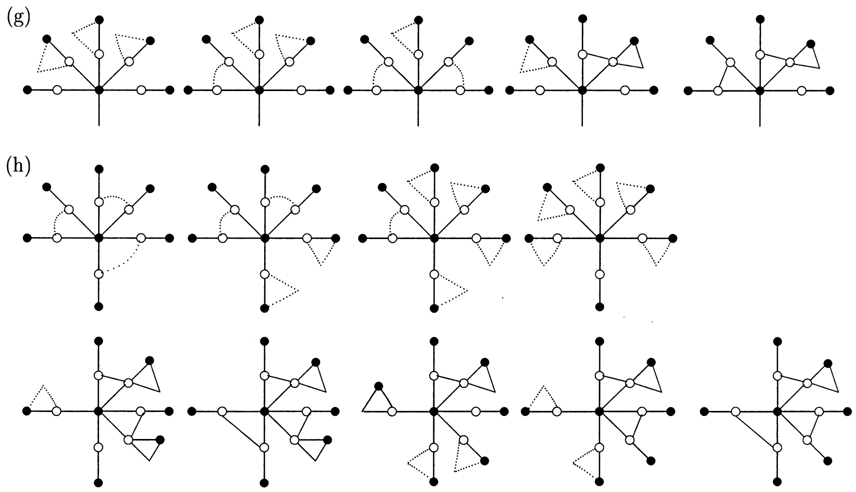


Рис. 6. Конфигурации в лемме 3(g),(h).

(h) (См. рис. 6(h).) Рассуждая точно так же, имеем больше свободы, чем в (g): подходит любой цвет $\alpha\in L(v)$, присутствующий самое большее три раза на множестве вершин $W_2(v)$, определенном на сей раз при всех $1\le i\le 6$, тогда как $|W_2(v)|\le 12<5\times 4$. $\square$

Напомним, что $\tau_b(v)=\tau_{3,3}(v)+\tau_{3,4}(v)$ — число плохих 3-граней при вершине $v$.

**Лемма 4.** *Пусть $d(v)=7$. Тогда*
(a) *если $\tau_g(v)=1$, $\nu_2(v)+\beta(v)+2\tau_b(v)=5$, то $\beta(v)+\tau_{3,3}(v)+2\tau_{3,4}(v)\ge 2$;*
(b) *если $\nu_2(v)+\beta(v)+2\tau_b(v)=6$, то $\beta(v)+\tau_{3,3}(v)+2\tau_{3,4}(v)\ge 3$;*
(c) *если $\nu_2(v)+\beta(v)+2\tau_b(v)=7$, то $\beta(v)+\tau_{3,3}(v)+2\tau_{3,4}(v)\ge 5$.*

Доказательство. (a) Если $\tau_{3,4}=0$ и $\beta(v)+\tau_{3,3}(v)\le 1$, то годятся рассуждения из доказательства леммы 3(f), поскольку $|W_2(v)|=\nu_2(v)+2\beta(v)+2\tau_{3,3}(v)\le 5+\beta(v)\le 6$.

(b) Снова годятся рассуждения из леммы 3(g), так как $|W_2(v)|\le 6+2<4\times 3$.

(c) Заметим, что если $\beta(v)+\tau_{3,3}(v)+2\tau_{3,4}(v)\le 4$, то $|W_2(v)|\le 7+4=11<5\times 4$, поэтому мы можем рассуждать так же, как в доказательстве леммы 3(h). $\square$

**Лемма 5.** *Пусть $d(v)=8$. Тогда*
(a) *если $\tau_g(v)=1$ и $\nu_2(v)+\beta(v)+2\tau_b(v)=6$, то $\beta(v)+\tau_b(v)\ge 1$;*
(b) *если $\nu_2(v)+\beta(v)+2\tau_{3,3}(v)=7$, то $\beta(v)+\tau_b(v)\ge 1$;*
(c) *если $\nu_2(v)+\beta(v)+2\tau_b(v)=8$, то $\beta(v)+\tau_{3,3}(v)+2\tau_{3,4}(v)\ge 3$.*

Доказательство оставляем читателю. $\square$

**Лемма 6.** *Если* $d(v) = 9$ *и* $\nu_2(v) + \beta(v) + 2\tau_b(v) = 9$*, то* $\beta(v) + \tau_{3,3}(v) + 2\tau_{3,4}(v) \geq 2$.

Доказательство оставляем читателю. □

**2.2. Перераспределение зарядов.** Используем следующие правила перераспределения зарядов (рис. 7).

**R0.** Каждая 2-вершина получает заряд 1 от каждой смежной $5^+$-вершины.

**R1.** Если $5^+$-вершина $v$ имеет плохого соседа $x$, то $v$ отдает заряд $\frac{3}{5}$ треугольнику $xyz$.

**R2.** Каждый треугольник $xyz$ получает следующий заряд.

(a) 2 от $x$, если $d(x) \geq 6$ и $d(y) = d(z) = 3$.

(b) $\frac{8}{5}$ от $x$ и 1 от $y$, если $d(x) \geq 6$, $y$ — бедная 4-вершина и $d(z) = 3$.

(c) $\frac{6}{5}$ от $x$ и 1 от каждой из $y$ и $z$, если обе они являются бедными 4-вершинами.

(d) Пусть $d(z) = 3$. Тогда

• $\frac{7}{5}$ от $x$ и 1 от $y$, если $d(x) \geq 6$, а $y$ — богатая 4-вершина;

• $\frac{6}{5}$ от каждой из вершин $x$ и $y$, если $x$ — богатая 4-вершина, смежная с тремя богатыми вершинами, а $d(z) = 5$;

• $\frac{6}{5}$ от каждой из вершин $x$ и $y$, если $d(x) \geq 5$ и $d(y) \geq 5$.

(e) 1 от каждой из вершин $x$, $y$ и $z$ в остальных случаях.

**R3.** Если 5-грань $f$ смежна с 3-гранью $T = xyz$ по ребру $xy$, где $z$ богатая, а обе вершины $x$ и $y$ бедные, то $T$ дает заряд $\frac{1}{5}$ грани $f$.

**R4.** 5-грань $f = v_1 \dots v_5$ получает от богатой вершины $v_2$ заряд:

(a) $\frac{2}{5}$, если обе вершины $v_1$ и $v_3$ бедные, за исключением случая, когда обе вершины $v_3$ и $v_4$ являются нетреугольными 3-вершинами, а в этом случае $v_2$ (как и $v_5$) дает грани $f$ заряд $\frac{1}{2}$;

(b) $\frac{3}{10}$, если $v_1$ богатая, а $v_3$ бедная, за исключением случая, когда обе вершины $v_3$ и $v_4$ являются нетреугольными 3-вершинами, а в этом случае вершина $v_2$ (как и $v_5$) дает грани $f$ заряд $\frac{2}{5}$;

(c) $\frac{1}{5}$, если обе вершины $v_1$ и $v_3$ богатые.

**2.3. Проверка того, что** $\mathrm{ch}^* \geq 0$ **для всех вершин и граней графа** $G$.

Случай 1. $v \in V(G)$. Пусть вершина $v$ богатая. Чтобы оценить суммарный заряд, передаваемый вершиной $v$ по правилам R0–R2 и R4, сделаем следующее усреднение, которое позволяет упростить приведенный ниже разбор вариантов.

R1*. Если у $v$ есть плохой сосед $x$, то заряд $\frac{3}{5}$ от $v$ отдается вершине $x$, а не 3-грани $xyz$.

R2*. Заряд, посылаемый 3-грани $uvw$ по R2, распределим поровну между вершинами $u$ и $w$.

R4*. Заряд, посылаемый 5-грани $f = uvwxy$ по R4, распределим между вершинами $u$ и $w$ следующим образом: богатая вершина получает $\frac{1}{10}$, а бедная — $\frac{3}{10}$, если она смежна с бедной вершиной, лежащей в границе грани $f$, и $\frac{1}{5}$ в противном случае.

Отметим, что в правиле R4* заряд $\frac{3}{10}$ фактически получает нетреугольная 3-вершина, смежная с нетреугольной 3-вершиной, лежащей в границе грани $f$.

Теперь все заряды от вершины $v$ расходятся вдоль ребер к смежным вершинам. Заметим, что максимальный заряд, который уходит по ребру $vx$, равен

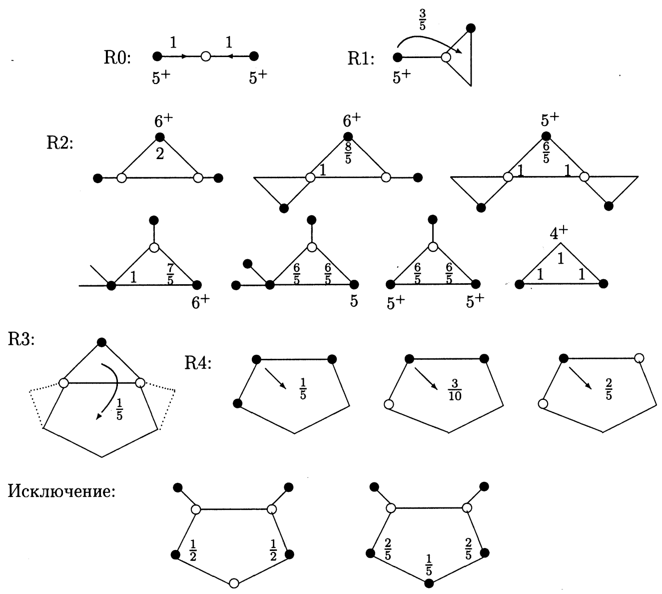


Рис. 7. Правила перераспределения зарядов.

$\frac{7}{5}$; это возможно, только если $d(x) = 2$ и $x$ получает $2 \times \frac{1}{5}$ по R4*. Другие соседние вершины, как легко видеть, создают для вершины $v$ строго положительные накопления относительно уровня расхода в $\frac{7}{5}$.

Определим *дефицит* нашей вершины $v$ как $D(v) = \frac{7}{5}d(v) - \mathrm{ch}(v) = \frac{3}{5}(10 - d(v))$. Поскольку $\mathrm{ch}^*(v) \geq \mathrm{ch}(v) - \frac{7}{5}d(v) = -D(v)$, нам уже нечего доказывать, если $d(v) \geq 10$. Однако чтобы разобрать случай $4 \leq d(v) \leq 9$, нужно более тщательно оценить эти накопления.

Если $vx$ есть нетреугольное ребро, то *накопление, $\sigma(x)$, вызванное вершиной $x$*, по определению равно $\frac{7}{5}$ минус заряд, полученный вершиной $x$ после усреднения. Если $T = uvw$ — 3-грань, то *накопление, $\sigma(T)$, вызванное гранью $T$*, положим равным $2 \times \frac{7}{5}$ минус суммарный заряд, полученный вершинами $u$ и $w$ после усреднения. *Накопление, $\Sigma(v)$, богатой вершины $v$* есть суммарное накопление вдоль всех ребер, инцидентных $v$.

Заметим, что доказываемое утверждение $\mathrm{ch}^*(v) \geq 0$ равносильно тому, что $\Sigma(v) \geq D(v)$.

**Утверждение 2.** *Накопления богатой вершины $v$ вдоль нетреугольного ребра $vx$ и вдоль пары ребер $\{vu, vw\}$ треугольника $T = uvw$ оцениваются следующим образом:*

(a) *если $d(x) = 2$, то $\sigma(x) \geq \frac{7}{5} - 1 - 2 \times \frac{1}{5} = 0$;*

(b) *если $x$ — нетреугольная 3-вершина, то $\sigma(x) \geq \frac{7}{5} - \frac{3}{10} - \frac{1}{5} = \frac{9}{10}$;*

(c) *если $x$ — плохой сосед вершины $v$, то $\sigma(x) \geq \frac{7}{5} - \frac{3}{5} - 2 \times \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$;*

(d) *если $x$ — богатая вершина, то $\sigma(x) \geq \frac{7}{5} - 2 \times \frac{1}{10} = \frac{6}{5}$;*

(e) *если $T$ получает от $v$ заряд $\nu(T) \in \left\{\frac{7}{5}, \frac{6}{5}, 1\right\}$ по правилу R2, то $\sigma(T) \geq 2 \times \frac{7}{5} - \nu(T) - \frac{1}{5} - \frac{1}{10} = \frac{5}{2} - \nu(T) \geq \frac{11}{10}$, если грань $T$ не бедная, в противном случае $\sigma(T) = 2 \times \frac{7}{5} - \frac{6}{5} - 2 \times \frac{1}{5} = \frac{6}{5}$;*

(f) *если $T$ — $(3, 3, N)$-грань, то $\sigma(T) \geq 2 \times \frac{7}{5} - 2 - 2 \times \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$;*

(g) *если $T$ — плохая $(3, 4, N)$-грань, то $\sigma(T) \geq 2 \times \frac{7}{5} - \frac{8}{5} - 2 \times \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$.*

Доказательство. Единственный момент, заслуживающий упоминания, касается п. (b): здесь $x$ не может принадлежать двум парам нетреугольных 3-вершин благодаря лемме 1(c), поэтому $x$ не может получать $2\times\frac{3}{10}$ по R4*. $\square$

Следуя пунктам утверждения 2, разобьем ребра вокруг вершины $v$ на накопители $S_b$–$S_g$. Среди них $S_c$ (плохой сосед) и $S_f$ ($(3,3,N)$-грань) являются самыми слабыми накопителями; каждый обеспечивает для $v$ накопление лишь в $\frac{2}{5}$. При разборе случаев ниже будем на передний план выдвигать сильнейшие накопители, чтобы исчерпать дефицит $D(v)$ вершины $v$ как можно быстрее.

Подслучай 1.1. $d(v)=9$. Теперь $D(v)=\frac{3}{5}$, так что надо рассмотреть только случай, когда вершина $v$ имеет не более одного накопителя, причем этот накопитель должен быть «слабым», т. е. быть либо $S_c$, либо $S_f$. Однако это исключается леммой 6, согласно которой $\Sigma(v)\geq\frac{2}{5}(\beta(v)+\tau_{3,3}(v)+2\tau_{3,4}(v))\geq\frac{2}{5}\times2>D(v)$.

Подслучай 1.2. $d(v)=8$. Здесь $D(v)=\frac{6}{5}$. Если $v$ имеет накопитель вида $S_b$ или $S_d$, приносящий не менее $\frac{9}{10}$, то надо исключить лишь случай, когда $v$ смежна с семью 2-вершинами, но это следует из леммы 5(b). Допустим, что имеется накопитель $S_e$ (хорошая 3-грань); теперь $v$ не может быть смежной с шестью 2-вершинами по лемме 5(a), откуда $\Sigma(v)\geq1+\frac{2}{5}$, что и требовалось. Предположим, наконец, что каждый накопитель при $v$ экономит не более $\frac{4}{5}$; тогда по лемме 5(c) $v$ получает не менее $\Sigma(v)\geq3\times\frac{2}{5}\geq D(v)$.

Подслучай 1.3. $d(v)=7$. Теперь $D(v)=\frac{9}{5}$. Если имеется $S_e$, экономящий не менее 1, то мы должны позаботиться только о наличии не более одного из $S_c$ и $S_f$ при условии, что все остальные соседи вершины $v$ являются 2-вершинами; но это невозможно согласно лемме 4(a).

Заметим, что каждый $S_b$ или $S_d$ экономит не менее $\frac{9}{10}$, так что наличия не менее двух из них уже достаточно. Если существует в точности один из $S_b$ и $S_d$, то суммарное накопление от $S_c$, $S_f$ и $S_g$ не менее $\frac{6}{5}$ по лемме 4(b).

Наконец, если при $v$ существуют только накопители $S_c$, $S_f$ и $S_g$, то $\Sigma(v)\geq5\times\frac{2}{5}>D(v)$ по лемме 4(c).

Подслучай 1.4. $d(v)=6$. Теперь $D(v)=\frac{12}{5}$. Ведем разбор вариантов в терминах накопителей, но в критических случаях прибегаем к исходным правилам R0–R4.

Можно считать, что при $v$ существует не более двух $S_e$. Если имеется в точности два, т. е. $\tau_g(v)=2$, то надо рассмотреть только случай, когда один из них экономит ровно $\frac{11}{10}$, так как иначе каждый экономит не менее $\frac{6}{5}$. Кроме того, $v$ должна быть смежна с двумя 2-вершинами, а другой накопитель должен экономить $\frac{11}{10}$ или $\frac{6}{5}$, т. е. быть либо слабой, либо бедной 3-гранью. Однако в этом случае вершина $v$ отдает заряд не более чем трем 5-граням согласно лемме 3(a), поэтому $\mathrm{ch}^*(v)\geq6-2\times\frac{7}{5}-2\times1-3\times\frac{2}{5}=0$ по правилам R0, R2 и R4.

Подслучай 1.4.1. $v$ имеет в точности один накопитель $S_e$, т. е. хорошую 3-грань $T=v_1vv_2$. Учитывая специфику этого $S_e$, нам остается дополнительно сэкономить не более $\frac{13}{10}$. Очевидно, что наличия двух накопителей вида $S_b$ или $S_d$ было бы достаточно. Сначала предположим, что имеется в точности один из $S_b$ и $S_d$. Напомним, что каждый из них экономит не менее $\frac{9}{10}$ согласно утверждению 2.

Очевидно, что уже нечего доказывать, если $\beta(v)+\tau_{3,3}(v)\geq1$ или при $v$ есть $S_g$, поэтому предположим, что $\nu_2(v)=3$ и $\beta(v)=0$.

Если при $v$ имеется $S_b$, то $v$ не дает заряд хотя бы одной инцидентной $6^+$-грани по R4 благодаря лемме 3(b), откуда $\mathrm{ch}^*(v) \geq 0$. В самом деле, в рассмотрении нуждается лишь вариант, когда $v$ дает $\frac{7}{5}$ грани $T$, $\frac{1}{2}$ своей специальной 5-грани и $3 \times \frac{2}{5}$ остальным трем инцидентным 5-граням. Такое может случиться, лишь если инцидентная богатой вершине $v_2$ грань $f_2$ при $v$ имеет $d(f_2) \geq 6$, так как иначе 5-грань $f_2$ получает лишь $\frac{3}{10}$ от $v$, если $f_2$ не является специальной для $v$, либо получает $\frac{2}{5}$ вместо $\frac{1}{2}$ от $v$, будучи специальной для $v$. Следовательно, имеются $3^-$-вершины $v_1, v_6, \ldots, v_3$, последовательно расположенные вокруг $v$ и все принадлежащие 5-граням, инцидентным $v$. Однако удалив 2-вершину этой последовательности, находящуюся ближе всего к $v_1$, мы можем продолжить раскраску полученного графа на весь $G$ точно так же, как мы делали при доказательстве леммы 3; противоречие.

Теперь допустим, что при $v$ есть $S_d$ вместе с $S_e$. Тогда $v$ дает своим 5-граням не более $\frac{9}{5} = 2 \times \frac{3}{10} + 3 \times \frac{2}{5}$ по R4, так что остается рассмотреть лишь случай, когда $T$ получает $\frac{7}{5}$ от $v$. Однако по лемме 3(c) $v$ тратит на 5-грани не более $4 \times \frac{2}{5}$, что и требовалось.

Наконец, пусть при $v$ нет ни $S_b$, ни $S_d$. Мы находимся в ситуации леммы 3(f). Напомним, что $v$ накапливает не менее $\frac{2}{5}(\beta(v)+\tau_{3,3}(v)+2\tau_{3,4}(v))$ благодаря своим плохим соседям и плохим 3-граням. Если $\beta(v)+\tau_{3,3}(v)+2\tau_{3,4}(v) \geq 4$, то $v$ экономит не менее $\frac{11}{10}+4\times\frac{2}{5} > \frac{12}{5}$. В противном случае $v$ экономит не менее $\frac{6}{5} + 3 \times \frac{2}{5} = \frac{12}{5}$ согласно лемме 3(f), поскольку $T$ не является слабой.

Подслучай 1.4.2. При $v$ нет $S_e$, т. е. $\tau_g(v) = 0$. Очевидно, мы можем считать, что при $v$ существует не более двух накопителей $S_b$ и $S_d$. Сначала допустим, что их в точности два. Если при $v$ имеется еще и $S_g$, то доказывать нечего, поскольку $2 \times \frac{9}{10} + \frac{4}{5} > \frac{12}{5}$.

Если при $v$ имеется два накопителя $S_d$, то $v$ отдает не более 4 на вершины по правилам R0 и R1 и не более $2 \times \frac{2}{5} + 4 \times \frac{3}{10} = 3 \times \frac{2}{5} + 2 \times \frac{3}{10} + \frac{1}{5} = 2$ на грани по правилу R4, откуда $\mathrm{ch}^*(v) \geq 0$.

Предположим, что при $v$ имеется один $S_b$ и один $S_d$. Они обеспечивают суммарную экономию не менее, чем $\frac{9}{10} + \frac{6}{5} = 2\frac{1}{10}$, поэтому можно считать, что $\nu_2(v) = 4$, поскольку $S_c$ или $S_f$ дают недостающую экономию в $\frac{2}{5}$. Теперь по лемме 3(d) имеем $\varphi_6(v) \geq 1$, откуда следует, что суммарный расход вершины $v$ на грани по правилу R4 снова не превышает $\frac{1}{2} + 3 \times \frac{2}{5} + \frac{3}{10} = 2$, поскольку 5-грань, инцидентная $S_d$, забирает от $v$ лишь $\frac{3}{10}$, не будучи специальной для $v$, в противном случае — лишь $\frac{2}{5}$.

Пусть $v$ смежна с двумя нетреугольными 3-вершинами. Можем считать, что при $v$ есть разве что один из накопителей $S_c$ или $S_f$. Однако лемма 3(e) позволяет сэкономить еще $\frac{2}{5}$ при $\nu_2(v) \leq 3$ или $2\times\frac{2}{5}$ при $\nu_2(v) = 4$ из-за наличия $6^+$-граней при $v$, так что всегда $\mathrm{ch}^*(v) \geq 0$.

Наконец, пусть при $v$ имеется в точности один из накопителей $S_b$ и $S_d$. Из леммы 3(g) получаем, что $\Sigma(v) \geq \frac{9}{10} + 4 \times \frac{2}{5} > \frac{12}{5}$.

Подслучай 1.4.3. При $v$ нет накопителей $S_e$, $S_b$ и $S_d$. Все такие конфигурации сводимы согласно лемме 3(h).

Подслучай 1.5. $d(v) = 5$. С этого момента отказываемся от усреднения и возвращаемся к правилам R0–R4. Заметим, что вершина $v$ отдает не более $\frac{6}{5}$ каждой инцидентной 3-грани по правилу R2.

Подслучай 1.5.1. $\tau(v) = 0$. Здесь $\nu_2(v) \leq 1$ по лемме 2(a). Более того, если $\nu_2(v) = 1$, то $\beta(v) = 0$, откуда $\mathrm{ch}^*(v) \geq 4 - 1 - 5 \times \frac{1}{2} > 0$ по правилам R0 и R4.

Итак, пусть $\nu_2(v) = 0$. Теперь $\beta(v) \le 3$ согласно лемме 2(b). Если $\beta(v) \le 2$, то $\mathrm{ch}^*(v) \le 4 - 2 \times \frac{3}{5} - 5 \times \frac{1}{2} > 0$ по R1 и R4. Напомним, что нетреугольная 3-вершина не может быть смежна более чем с одной нетреугольной 3-вершиной по лемме 1(c). Отсюда следует, что число 5-граней, являющихся специальными для $v$, не превышает числа нетреугольных 3-соседей вершины $v$. Следовательно, если $\beta(v) = 3$, то $v$ инцидентна не более чем двум специальным 5-граням, получающим $\frac{1}{2}$ от $v$, так что $\mathrm{ch}^*(v) \ge 4 - 3 \times \frac{3}{5} - 2 \times \frac{1}{2} - 3 \times \frac{2}{5} = 0$ по R1 и R4.

Подслучай 1.5.2. $\tau(v) = 1$. Пусть $T = uvw$ — 3-грань при вершине $v$. Если $\nu_2(v) = 1$, то $\beta(v) = 0$, $d(u) \ge 4$ и $d(w) \ge 4$ по лемме 2(a). Поскольку при $v$ имеется не более двух специальных граней, то $\mathrm{ch}^*(v) \ge 4 - 1 - 2 \times \frac{1}{2} - 2 \times \frac{2}{5} - \frac{6}{5} = 0$ по правилам R0, R2 и R4.

Пусть $\nu_2(v) = 0$. Теперь $\beta(v) \le 2$ по лемме 2(b). Если $\beta(v) \le 1$, то $\mathrm{ch}^*(v) \le 4 - \frac{6}{5} - \frac{3}{5} - 4 \times \frac{1}{2} > 0$ по правилам R1, R2 и R4, поэтому допустим, что $\beta(v) = 2$. Через $z \notin \{u, w\}$ обозначим смежную с $v$ вершину, не являющуюся плохим соседом для $v$. Если $z$ богатая, то $v$ отдает не больше $2 \times \frac{2}{5} + 2 \times \frac{3}{10} = \frac{7}{5}$ инцидентным 5-граням, откуда $\mathrm{ch}^*(v) \ge 4 - \frac{6}{5} - 2 \times \frac{3}{5} - \frac{7}{5} > 0$.

Остается предположить, что $d(z) = 3$, а это значит, что вершина $v$ может быть инцидентна (самое большее одной) специальной 5-грани. Если $v$ отдает заряд 1 грани $T$, то $\mathrm{ch}^*(v) \ge 4 - 1 - 2 \times \frac{3}{5} - 3 \times \frac{2}{5} - \frac{1}{2} > 0$. Если, скажем, $d(u) = 3$, то $w$ является богатой вершиной ввиду леммы 1(d),(g), так что $v$ отдает не больше $\frac{8}{5} = 4 \times \frac{2}{5} = 2 \times \frac{2}{5} + \frac{1}{2} + \frac{3}{10}$ своим инцидентным 5-граням, откуда $\mathrm{ch}^*(v) \ge 4 - \frac{6}{5} - 2 \times \frac{3}{5} - \frac{8}{5} = 0$. Наконец, отметим, что $T$ не может быть $(4, 4, 5)$-гранью, получающей $\frac{6}{5}$ по R2 согласно лемме 2(d).

Подслучай 1.5.3. $\tau(v) = 2$. Пусть $T_1$ и $T_2$ суть 3-грани при $v$, и пусть $z$ — сосед вершины $v$, который не принадлежит $T_1 \cup T_2$. Сначала предположим, что $d(z) = 2$. Заметим, что $v$ не смежна с 3-вершинами по лемме 2(a). Поскольку ни одна из граней $T_1$ и $T_2$ не содержит двух бедных 4-вершин согласно лемме 2(c), каждая из $T_1$ и $T_2$ получает 1 от $v$, тогда как три инцидентные $5^+$-грани получают не более $2 \times \frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5} + 2 \times \frac{3}{10} = 1$, а значит, $\mathrm{ch}^*(v) \ge 0$.

Если $z$ не является плохим соседом, то $\mathrm{ch}^*(v) \ge 4 - 2 \times \frac{6}{5} - 3 \times \frac{1}{2} > 0$, поэтому предположим, что это так. В частности, отсюда следует, что $v$ не инцидентна специальным 5-граням, которые получают по $\frac{1}{2}$ от $v$. Если у вершины $v$ не менее двух богатых соседей, то суммарная передача от $v$ ее 5-граням не больше 1, откуда $\mathrm{ch}^*(v) \ge 4 - 2 \times \frac{6}{5} - \frac{3}{5} - 1 = 0$. Итак, далее можем считать, что $T_1 = vxy$, где $d(x) = d(y) = 4$ и $\tau(x) = \tau(y) = 2$. Если $T_2$ получает только 1 от $v$ по R2, то $\mathrm{ch}^*(v) \ge 4 - \frac{6}{5} - 1 - \frac{3}{5} - 3 \times \frac{2}{5} = 0$. Следовательно, проблемы могли возникнуть лишь если $T_2$ была бы того же типа, что и $T_1$, либо являлась $(3, 4^+, 5)$-гранью. Однако это противоречит лемме 2(e),(f).

Подслучай 1.6. $d(v) = 4$ и $v$ богатая (рис. 8). Заметим, что $\nu_2(v) = \beta(v) = 0$ согласно лемме 1(a),(b), и, значит, $v$ не отдает заряд своим соседям $v_1, \dots, v_4$ по правилам R0 и R1. Если $\tau(v) = 0$, то $\mathrm{ch}^*(v) \ge 2 - 4 \times \frac{1}{2} = 0$ по R4, поэтому предположим, что $\tau(v) = 1$, и существует 3-грань $T = v_1 v v_2$.

Как следует из леммы 1(d),(h), хотя бы одна из вершин $v_1$ и $v_2$ богатая. По лемме 1(e) хотя бы одна из $v_3$ и $v_4$ не является нетреугольной 3-вершиной, т. е. она богатая. Отсюда следует, что $v$ инцидентна не больше чем одной специальной грани (см. исключения в R4). Напомним, что $T$ получает заряд 1 от $v$ по R2, кроме случая, когда $d(v_1) = 3$, $d(v_2) = 5$ и каждая из $v_3$ и $v_4$ является богатой, а в этом случае имеем $\mathrm{ch}^*(v) \ge 2 - \frac{6}{5} - 2 \times \frac{1}{5} - \frac{3}{10} > 0$.

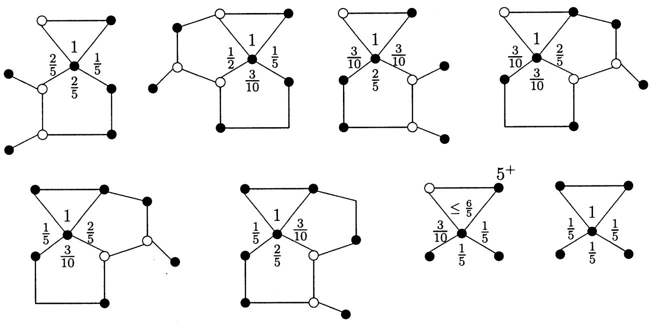

Рис. 8. Передачи от богатой 4-вершины.

Небольшой перебор (см. рис. 8) показывает, что $v$ отдает своим $5^+$-граням в сумме не более $1 = 2 \times \frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5} + 2 \times \frac{3}{10} = \frac{1}{2} + \frac{3}{10} + \frac{1}{5}$, так что $\mathrm{ch}^*(v) \geq 0$.

Подслучай 1.7. $v$ бедная. Если $d(v) = 4$, то $\mathrm{ch}^*(v) = \mathrm{ch}(v) - 2 \times 1 = 0$ по R2. Если $d(v) = 3$, то $\mathrm{ch}^*(v) = \mathrm{ch}(v) = 0$, поскольку 3-вершины не участвуют в перераспределении зарядов. Наконец, если $d(v) = 2$, то $\mathrm{ch}^*(v) \geq 4 - 6 + 2 \times 1 = 0$ по R0 согласно лемме 1(a).

Случай 2. $f \in F(G)$.

Подслучай 2.1. $d(f) = 3$. Поскольку по меньшей мере одна из инцидентных грани $f$ вершин является богатой по лемме 1(d),(h), из R1–R3 следует, что $\mathrm{ch}^*(f) = 0$ (см. рис. 7). Действительно, если $f$ не участвует в R3, то $\mathrm{ch}^*(f) = -3 + 3 \times 1 = 0$; иначе $\mathrm{ch}^*(f) = -3 + \frac{16}{5} - \frac{1}{5} = 0$.

Подслучай 2.2. $d(f) = 5$. Пусть $f = v_1 \dots v_5$. Если $v_1$ и $v_2$ являются бедными, то либо существует 3-грань $v_1 v v_2$, где $d(v_1) \leq 4$, $d(v_2) \leq 4$ и $v$ богатая по лемме 1(d),(g),(h), либо $v_1$ и $v_2$ — нетреугольные 3-вершины (в этом случае $v_5$ и $v_3$ богатые по лемме 1(c)). Отсюда следует, что если все вершины $v_1$, $v_2$ и $v_3$ бедные, то $d(v_1) \leq 4$, $d(v_2) = 4$ и $d(v_3) \leq 4$.

Пусть $\nu_P(f)$ есть число бедных вершин, инцидентных грани $f$. Если $\nu_P(f) = 5$, то $\mathrm{ch}^*(f) = -1 + 5 \times \frac{1}{5} = 0$ согласно R3. Если же $\nu_P(f) = 4$, то $\mathrm{ch}^*(f) = -1 + \frac{2}{5} + 3 \times \frac{1}{5} = 0$ по R3 и R4.

Пусть $\nu_P(f) = 3$. Если $v_1$, $v_2$ и $v_3$ бедные, то $\mathrm{ch}^*(f) = -1 + 2 \times \frac{1}{5} + 2 \times \frac{3}{10} = 0$. Допустим $v_1$, $v_2$ и $v_4$ бедные. Если ребро $v_1 v_2$ треугольное, то имеем $\mathrm{ch}^*(f) = -1 + \frac{1}{5} + 2 \times \frac{2}{5} = 0$; иначе $d(v_1) = d(v_2) = 3$, поэтому $\mathrm{ch}^*(f) = -1 + 2 \times \frac{1}{2} = 0$.

Если же только $v_1$ и $v_3$ бедные, то $\mathrm{ch}^*(f) = -1 + \frac{2}{5} + 2 \times \frac{3}{10} = 0$. Предположим, что только $v_1$ и $v_2$ бедные. Если ребро $v_1 v_2$ треугольное, то $\mathrm{ch}^*(f) = -1 + \frac{2}{5} + 2 \times \frac{3}{10} = 0$ по правилам R3 и R4; иначе $d(v_1) = d(v_2) = 3$, откуда $\mathrm{ch}^*(f) = -1 + \frac{1}{5} + 2 \times \frac{2}{5} = 0$ по R4.

Если $\nu_P(f) = 1$, то $\mathrm{ch}^*(f) = -1 + 2 \times \frac{1}{5} + 2 \times \frac{3}{10} = 0$. Наконец, если $\nu_P(f) = 0$, то $\mathrm{ch}^*(f) = -1 + 5 \times \frac{1}{5} = 0$ снова по R4.

Подслучай 2.3. $d(f) \geq 6$. Теперь $\mathrm{ch}^*(f) = \mathrm{ch}(f) = d(f) - 6 \geq 0$.

Полученное противоречие с (1) завершает доказательство теоремы 1.

Авторы благодарят А. Н. Глебова за тщательную проверку доказательства и полезные замечания.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Grünbaum B.* Acyclic colorings of planar graphs // Israel J. Math. 1973. V. 14, N 3. P. 390–408.
2. *Бородин О. В.* Доказательство гипотезы Б. Грюнбаума об ациклической 5-раскрашиваемости плоских графов // Докл. АН СССР. 1976. Т. 231, № 1. С. 18–20.
3. *Borodin O. V.* On acyclic colorings of planar graphs // Discrete Math. 1979. V. 25, N 3. P. 211–236.
4. *Mitchem J.* Every planar graph has an acyclic 8-coloring // Duke Math. J. 1974. V. 14. P. 177–181.
5. *Albertson M. O., Berman D.* Every planar graph has an acyclic 7-coloring // Israel J. Math. 1977. V. 28, N 1–2. P. 169–177.
6. *Косточка А. В.* Ациклическая 6-раскраска плоских графов // Дискрет. анализ. 1976. Т. 28. С. 48–56.
7. *Kostochka A. V., Mel'nikov L. S.* Note to the paper of Grünbaum on acyclic colorings // Discrete Math. 1976. V. 14, N 4. P. 403–406.
8. *Jensen T. R., Toft B.* Graph coloring problems. New York: Wiley Intersci., 1995.
9. *Hell P., Nešetřil J.* Graphs and homomorphisms. Oxford: Oxford Univ. Press, 2004. (Oxf. Lect. Ser. Math. Appl.).
10. *Thomassen C.* Every planar graph is 5-choosable // J. Combin. Theory Ser. B. 1994. V. 62. P. 180–181.
11. *Voigt M.* List colorings of planar graph // Discrete Math. 1993. V. 120, N 1–3. P. 215–219.
12. *Borodin O. V., Fon-Der-Flaass D. G., Kostochka A. V., Raspaud A., Sopena E.* Acyclic list 7-coloring of planar graphs // J. Graph Theory. 2002. V. 40, N 2. P. 83–90.
13. *Montassier M., Ochem P., Raspaud A.* On the acyclic choosability of graphs // J. Graph Theory. 2006. V. 51, N 4. P. 281–300.
14. *Montassier M., Raspaud A., Wang W.* Acyclic 5-choosability of planar graphs without small cycles // J. Graph Theory. 207. V. 54, N 3. P. 245–260.
15. *Zhang H., Xu B.* Acyclic 5-choosable planar graphs with neither 4-cycles nor chordal 6-cycles // Discrete Math. 2009. V. 309, N 20. P. 6089–6091.
16. *Chen M., Wang W.* Acyclic 5-choosability of planar graphs without 4-cycles // Discrete Math. 2008. V. 308, N 24. P. 6216–6225.
17. *Chen M., Raspaud A.* A sufficient condition for planar graphs to be acyclically 5-choosable // Discrete Math. (Accepted).
18. *Wang W., Chen M.* Planar graphs without 4-cycles are acyclically 6-choosable // J. Graph Theory. 2009. V. 61, N 4. P. 307–323.
19. *Borodin O. V., Kostochka A. V., Woodall D. R.* Acyclic colorings of planar graphs with large girth // J. London Math. Soc. 1999. V. 60, N 2. P. 344–352.
20. *Borodin O. V., Chen M., Ivanova A. O., Raspaud A.* Acyclic 3-choosability of sparse graphs with girth at least 7 // Discrete Math. 2010. V. 310, N 17–18. P. 2426–2534.
21. *Бородин О. В.* Ациклическая предписанная 3-раскрашиваемость плоских графов, не содержащих циклов длины от 4 до 12 // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2009. Т. 16, № 6. С. 26–33.
22. *Hocquard H., Montassier M.* Every planar graph without cycles of lengths 4 to 12 is acyclically 3-choosable // Inf. Proc. Lett. 2009. V. 109, N 21–22. P. 1193–1196.
23. *Borodin O. V., Ivanova A. O.* Acyclic 3-choosability of planar graphs with no cycles of length from 4 to 11 // Сиб. электрон. мат. изв. 2010. V. 7. P. 275–283.
24. *Montassier M.* Acyclic 4-choosability of planar graphs with girth at least 5 // Trends in Math.: Graph Theory in Paris, 2007. P. 299–310.
25. *Montassier M., Raspaud A., Wang W.* Acyclic 4-choosability of planar graphs without cycles of specific lengths // Topics in discrete mathematics. Algorithms Combin. Berlin: Springer-Verl., 2009. V. 26. P. 473–491.
26. *Chen M., Raspaud A., Wang W.* Acyclic 4-choosability of planar graphs without prescribed cycles // Discrete Math. (Accepted).
27. *Бородин О. В.* Ациклическая 4-раскрашиваемость плоских графов без циклов длины 4 и 6 // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2009. Т. 16, № 6. С. 3–11.
28. *Borodin O. V., Ivanova A. O., Raspaud A.* Acyclic 4-choosability of planar graphs with neither 4-cycles nor triangular 6-cycles // Discrete Math. 2010. V. 310, N 21. P. 2946–2958.
29. *Chen M., Raspaud A.* On acyclic 4-choosability of planar graphs without short cycles // Discrete Math. 2010. V. 310. N 15–16. P. 2113–2118.

**30.** *Бородин О. В.* Ациклическая 4-раскрашиваемость плоских графов, не содержащих 4- и 5-циклов // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2010. Т. 17, № 2. С. 20–30.

**31.** *Borodin O. V., Ivanova A. O.* Acyclic 4-choosability of planar graphs with no 4- and 5-cycles // J. Graph Theory (submitted).

**32.** *Borodin O. V., Ivanova A. O.* Acyclic 5-choosability of planar graphs without adjacent short cycles // J. Graph Theory, published on-line. DOI 10.1002/jgt 20549.


*Статья поступила 18 июля 2010 г.*


Бородин Олег Вениаминович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет, ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
brdnoleg@math.nsc.ru

Иванова Анна Олеговна
Институт математики при Якутском гос. университете,
Северо-Восточный федеральный университет,
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677891
shmgnanna@mail.ru