Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2011. Том 52, № 3

УДК 517.518.222

ОБ АБСОЛЮТНОЙ ε–ЭНТРОПИИ ОДНОГО КОМПАКТА БЕСКОНЕЧНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В. Н. Белых

Аннотация. Вычислен главный член асимптотики колмогоровской ε-энтропии компакта периодических бесконечно дифференцируемых функций, непрерывно вложенного в пространство C непрерывных периодических функций.

Ключевые слова: ε-энтропия, компакт, бесконечно дифференцируемая функция, класс Жеврея.

При конструировании алгоритмов численного решения краевых задач речь всегда идет об аппроксимации континуальных объектов конечномерными и о построении аналогов последних на основе понятий, допускающих финитную формализацию. Такой подход к проблемам современной (цифровой) компьютерной математики оказывается основным, становясь своеобразным источником свежих математических идей и трудных аналитических задач [1]. Процедура финитизации — этап вынужденный и необходимый, и без потери информации не обходится. Желание оценить эти потери снизу берет свое начало в работе А. Н. Колмогорова [2] и находит достойную прикладную мотивацию у К. И. Бабенко [1].

Будем рассматривать двоичные слова, т. е. конечные слова в алфавите из двух букв 0 и 1. Если x — элемент компакта $X \subset \Phi$, где Φ — метрическое пространство с метрикой ρ, то *таблицей* элемента x будем называть двоичное слово T_x. Длину N слова T_x назовем *длиной* (или *объемом*) таблицы. Зафиксировав длину N таблицы, рассмотрим множество всевозможных таблиц элементов $x \in X$. Ясно, что число элементов этого множества не превосходит 2^N. Для компакта X по теореме Хаусдорфа при любом $\varepsilon > 0$ существует конечная ε-сеть в Φ. Следовательно, элемент компакта можно задать с любой заданной точностью с помощью конечного числа битов. Множество таблиц $\{T_x\}$ данной длины N и расшифровывающий алгоритм $\mathscr{R}$, который по таблице T_x восстанавливает элемент $x_0 \in \Phi$, являющийся приближенным представлением элемента $x \in X$, определяют способ табулирования элементов компакта X. Таблица T_x характеризуется объемом N и точностью $\varepsilon = \sup\limits_{x\in X} \rho(x, \mathscr{R}(T_x))$. При таком подходе точность способа табулирования не может быть гарантированно достигнута

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 08–01–00207–а, 11–01–00147–а) и Междисциплинарного интеграционного проекта № 40 Президиума СО РАН.

финитным образом. Поэтому одной из задач теории табулирования компакта X является задача построения способа табулирования, имеющего заданную точность при минимальном объеме таблицы.

Математическим отражением указанной ситуации является понятие абсолютной (или колмогоровской) ε-энтропии $H_\varepsilon(X)$, характеризующее нижнюю оценку роста объема таблицы элемента компакта X с увеличением точности $\varepsilon > 0$ его запоминания. При этом сама функция $H_\varepsilon(X)$ рассматривается как числовая характеристика сложности финитного устройства компакта $X \subset \Phi$. Чем быстрее величина $H_\varepsilon(X)$ при $\varepsilon \to 0$ стремится к бесконечности, тем сложнее устроен компакт X. Для компактов X конечной гладкости функция $H_\varepsilon(X)$ при $\varepsilon \to 0$ растет как $(1/\varepsilon)^\beta$, где $\beta > 0$. Этот рост тем медленнее, чем выше запас гладкости компакта X [2]. Для компактов X из аналитических функций рост $H_\varepsilon(X)$ характеризуется всего лишь некоторой фиксированной степенью $\log(1/\varepsilon)$ [3–6]. Что касается компактов X, состоящих из неаналитических C^∞-гладких функций, то здесь до сих пор не было никаких результатов (даже для случая функций одной переменной).

Проблема наилучшего финитного описания классов C^∞-гладких функций, определенным образом организованных в компакт X, поставлена в книге К. И. Бабенко [1, с. 301] как проблема отыскания главного члена в асимптотической формуле для $H_\varepsilon(X)$ при $\varepsilon \to 0$. Асимптотику (абсолютной) колмогоровской ε-энтропии компакта $X \subset C^\infty$ требуется найти, рассматривая X как ограниченное подмножество пространства C непрерывных функций.

В настоящей работе вычислена абсолютная ε-энтропия компакта C^∞-гладких периодических функций, вложенного ограниченно в пространство $C[S]$ непрерывных на единичной окружности S функций. Рассуждения основаны на новой характеризации класса C^∞-гладких периодических функций, апеллирующей к его конструктивному чебышёвскому описанию [7, 8].

Пусть X — метрический компакт, а $\Phi \supset X$ — его метрическое расширение, т. е. такое метрическое пространство, которое содержит X и имеет на нем ту же метрику. Колмогоровская ε-энтропия $H_\varepsilon(X)$ компакта X определяется по количеству элементов в минимальном его 2ε-покрытии и равна двоичному логарифму от минимального их числа. Величина $h_\varepsilon(X)$, равная двоичному логарифму от максимального числа элементов из X, попарно удаленных друг от друга строго более чем на 2ε, называется *ε-емкостью* компакта X. *Относительной ε-энтропией* компакта X называется величина $H_\varepsilon^\Phi(X)$, равная двоичному логарифму мощности ε-сети в Φ, минимальной для X. Величина $H_\varepsilon^\Phi(X)$ в отличие от $H_\varepsilon(X)$ зависит как от способа расширения Φ компакта X, так и от введенной на Φ метрики. Величины $h_\varepsilon(X)$, $H_\varepsilon(X)$ и $H_\varepsilon^\Phi(X)$ непрерывны по ε справа, не убывают при $\varepsilon \to 0$, монотонны по включению и связаны следующими неравенствами [2]:

$$H_{2\varepsilon}(X) \le H_{2\varepsilon}^\Phi(X) \le h_\varepsilon(X) \le H_\varepsilon(X) \le H_\varepsilon^\Phi(X) \quad \forall \varepsilon > 0. \tag{1}$$

Известна следующая теорема А. Г. Витушкина [3]:

$$H_\varepsilon(X) = \inf_{\Phi \supset X} H_\varepsilon^\Phi(X) = H_\varepsilon^C(X).$$

Иными словами, среди всех расширений, сохраняющих топологию компакта $X \subset \Phi$, пространство C непрерывных функций доставляет абсолютный минимум относительной ε-энтропии компакта X, совпадающий с минимальным объемом таблицы, требуемым для отделения элементов X с точностью $\varepsilon > 0$.

Пусть $C \equiv C[S]$ — пространство вещественных периодических функций, непрерывных на единичной окружности S, с нормой $\|\varphi\| = \max\limits_{t\in S} |\varphi(t)|$, а $C^k \equiv C^k[S]$ — банахово пространство k раз непрерывно дифференцируемых периодических функций с нормой

$$p_k(\varphi) \equiv \|\varphi\|_k = \max_{0\le\alpha\le k} \sup_{t\in S} |D^\alpha \varphi(t)| < \infty, \quad D^\alpha \equiv d^\alpha/dt^\alpha. \tag{2}$$

При $k = 0$ норма (2) переходит в чебышёвскую норму в пространстве $C \equiv C^0[S]$. Согласно определению (2) имеем

$$\|\varphi\|_{k'} \le \|\varphi\|_k, \quad k' \le k. \tag{3}$$

Пусть $C^\infty \equiv C^\infty[S]$ — множество всех бесконечно дифференцируемых периодических на S функций. Учитывая, что $C^\infty[S] = \bigcap\limits_{k\ge 0} C^k[S]$, введем на C^∞ топологию проективного предела τ с базисом окрестностей нуля, состоящим из множеств вида

$$U_{p,\varepsilon} = \{\varphi \in C^\infty : \|\varphi\|_p < \varepsilon\}, \quad \varepsilon > 0,\ p \text{ натуральное.}$$

Система окрестностей $U_{p,\varepsilon}$ равносильна счетной системе окрестностей нуля $U_{p,\frac{1}{n}}$ $(p, n = 1, 2, \dots)$. Поэтому пространство C^∞ метризуемое с трансляционно инвариантной метрикой ρ, порождающей исходную топологию τ. Все топологические соотношения в C^∞ описываются на языке сходимости последовательностей $\{\varphi_\nu\} \subset C^\infty$. Совместимые с топологией τ трансляционно инвариантные метрики ρ определяют в C^∞ один и тот же запас последовательностей Коши. Поэтому им соответствует один и тот же класс сходящихся последовательностей (в топологии τ). Понятия ограниченности, фундаментальности и сходимости в $C^\infty = \bigcap\limits_{k\ge 0} C^k$ понимаются так, как они понимаются в каждом метрическом пространстве из указанной совокупности.

Элементы пространства C^∞ образуют всюду плотное множество в пространстве C^k. Поэтому при любом $k \ge 0$ замыкание множества C^∞ в банаховом пространстве C^k совпадает с его пополнением (метрическим расширением) по норме (2). Эти пополнения упорядочены по включению, и в силу неравенства (3) одно является частью другого, если $k \ge k'$.

Полнота пространств, составляющих проективный предел, не влечет полноту его самого. Пусть $C^{k'}$ и C^k — два пространства с метриками ϱ_1 и ϱ_2 соответственно. Тогда, полагая $X = C^{k'} \cap C^k$ и наделяя X метрикой проективного предела $\varrho = \varrho_1 + \varrho_2$, мы, вообще говоря, не можем утверждать полноту X даже для полных $C^{k'}$ и C^k. В самом деле, если последовательность φ_ν фундаментальна в X, то она, очевидно, фундаментальна и в $C^{k'}$, и в C^k, поэтому в силу полноты последних пространств сходится: $\varphi_\nu \to \varphi^{(k')} \in C^{k'}$, $\varphi_\nu \to \varphi^{(k)} \in C^k$. Пространство X было бы полным, если бы $\varphi^{(k')} = \varphi^{(k)}$, что, вообще говоря, ниоткуда не следует.

Между тем иерархическая упорядоченность пространств C^k, участвующих в определении C^∞, эффективно разрешает проблему его полноты.

Действительно, в силу неравенства (3) отображение $i^k_{k'} : C^k \to C^{k'}$ — каноническая инъекция, и поэтому каждый элемент $\bar{\bar{\varphi}} \in C^k$ однозначно определяет элемент $\bar{\varphi} \in C^{k'}$. Убедимся, что соответствие $\bar{\bar{\varphi}} \to \bar{\varphi}$ взаимно однозначно (на части пространства $C^{k'}$), для чего проверим, что ненулевой элемент $\bar{\bar{\varphi}}$ пространства C^k не может перейти в нулевой элемент пространства $C^{k'}$, если $k > k'$.

Рассуждая от противного, предположим, что для фундаментальной последовательности $\varphi_\nu \in C^\infty$, определяющей элемент $\overline{\overline{\varphi}} \in C^k$, выполнены равенства

$$\lim_{\nu\to\infty} p_k(\varphi_\nu) = p_k(\overline{\overline{\varphi}}) > 0, \quad \lim_{\nu\to\infty} p_{k'}(\varphi_\nu) = 0 \quad (k > k' \geq 0).$$

Иными словами, хотя функции $D^\alpha \overline{\overline{\varphi}}(t) = \lim\limits_{\nu\to\infty} D^\alpha \varphi_\nu(t)$ для $0 \leq \alpha \leq k'$ равномерно сходятся к нулю, их производные порядков $\beta + \alpha > k'$ равномерно стремятся к ненулевым пределам $D^{\beta+\alpha}\overline{\overline{\varphi}}(t) \neq 0$. Последнее противоречит теореме классического анализа о возможности в таком случае дифференцирования последовательности $D^\alpha \varphi_\nu(t)$ под знаком предела. Значит, $\overline{\overline{\varphi}}(t) \equiv 0$.

Таким образом, отображение $i^k_{k'} : C^k \to C^{k'}$ взаимно однозначно на части пространства $C^{k'}$, т. е. элементы пространства C^k отождествляются с соответствующими элементами пространства $C^{k'}$, если $k \geq k' \geq 0$. При этом если $0 \leq m \leq k' \leq k \leq \infty$, то каждый элемент φ пространства C^∞ переходит в себя в силу равенств $i^k_m = i^{k'}_m i^k_{k'}$. Иначе говоря, если вместо $\varphi \in C^k$ писать $\varphi^{(k)}$, то функцию φ из проективного предела $C^\infty = \bigcap\limits_{k\geq 0} C^k$ можно изобразить последовательностью $\varphi = \{\varphi^{(0)}, \varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(k)}, \dots\}$, поскольку для любых $k \geq 0$ символ $\varphi^{(k)}$ определен лишь для элементов $\varphi \in C^\infty$. Если принять такое соглашение, то пространство C^∞ реализуется как класс последовательностей $\varphi = \{\varphi^{(k)}\}$, элементы которых удовлетворяют для любых $k \geq k' \geq 0$ условиям $i^k_{k'}\varphi^{(k)} = \varphi^{(k')}$. Таким образом, через $\varphi^{(k)}$ и $\varphi^{(k')}$ обозначен один и тот же элемент $\varphi \in C^\infty$, рассматриваемый одновременно в пространствах C^k и $C^{k'}$, т. е. $\varphi^{(k')} = \varphi^{(k)}$.

Следующие леммы широко известны.

Лемма 1. *Пространство $C^\infty = \bigcap\limits_{k\geq 0} C^k$ полно, т. е. является пространством Фреше.*

Лемма 2 [9]. *Система функций $\{1/2, \cos nt, \sin nt\}$ $(n > 0)$ является абсолютным топологическим базисом пространства $C^\infty[S]$.*

Лемма 3. *Всякое замкнутое ограниченное множество F из C^∞ компактно.*

Класс C^∞-гладких функций обычно задается явным указанием мажоранты $G(k)$ производной порядка $k \geq 0$. При этом формулировка основных ограничений на рост мажоранты $G(k)$ при $k \to \infty$ является одним из принятых способов классификации. Множество

$$G^\infty_c \equiv \bigl\{f \in C^\infty : \|f\| \leq c, \|D^p f\| \leq G(p), \varlimsup_{p\to\infty} \sqrt[p]{G(p)} = \infty\bigr\} \tag{4}$$

с фиксированной константой $c > 0$ и заданной числовой последовательностью $\{G(p)\}^\infty_{p=1}$ является компактом в C^∞. Но класс $G^\infty_c \subset C^\infty$ вкладывается в C непрерывно, а запас компактных множеств при ослаблении топологии не уменьшается. Поэтому множество G^∞_c является компактом также и в C.

В [7] предложен новый способ описания класса C^∞-гладких периодических функций, состоящий в указании пары эффективно конструируемых по набору $\{G(p)\}$ монотонных функций $\mu(x)$ и $\vartheta(x)$ переменной $x \geq 0$, связанных посредством классических теорем Джексона с мажорантой класса G^∞_c и обладающих при условии $\varlimsup\limits_{p\to\infty} \sqrt[p]{G(p)} = \infty$ рядом полезных свойств. Напомним здесь определения этих функций.

Задача наилучшей чебышёвской аппроксимации периодической функции $f \in C[S]$ состоит в отыскании такого элемента $R_m \in \mathscr{T}^m$, что

$$e_m(f) \equiv \inf_{H_m \in \mathscr{T}^m} \|f - H_m\| = \|f - R_m\|.$$

Здесь $\mathscr{T}^m$ — подпространство тригонометрических многочленов степени не выше m ($m > 0$ целое). Для $f \in C^\infty$ справедливы неравенства Джексона $e_m(f) \le (\pi/2)\|D^k f\|/m^k$ ($k \ge 0$ целое). При условии $f \notin \mathscr{T}^m$, $\|f\| = G(0) \ne 0$, $\|D^k f\| \le G(k)$, $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{G(k)} = \infty$ сопоставим f следующие две функции числового аргумента $x \in [0,\infty)$:

$$\mu(x) = \begin{cases} G(0) & \text{при } 0 \le x < 1, \\ \inf\limits_{k\ge 0} \frac{G(k)}{x^k} & \text{при } x \ge 1, \end{cases}$$

$$\vartheta(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \le x < 1, \\ \max\bigl\{k \mid \mu(x) = \frac{G(k)}{x^k}\bigr\} & \text{при } x \ge 1. \end{cases}$$

Указанные классы C^∞-гладких периодических функций непусты: им принадлежат, например, известные классы Жеврея, имеющие мажоранту $G(k) = cA^k(k!)^\alpha$ (где $\alpha > 0$, $c > 0$, $A > 0$ — константы).

Теорема 1 [7]. *При $x \ge 1$ функция $\vartheta(x)$ целочисленна, неотрицательна, не убывает, непрерывна справа и стремится к бесконечности при $x \to \infty$. Функция $\mu(x)$ строго монотонно убывает, непрерывна и стремится к нулю при $x \to \infty$. При этом для любого $\xi \ge 0$ справедливо равенство*

$$\mu(x) = \mu(\xi)\exp\left(-\int\limits_\xi^x \frac{\vartheta(t)}{t}\,dt\right), \quad x \ge \xi. \tag{5}$$

Следствие 1. *Функция $\mu(x)$ стремится к нулю при $x \to \infty$ быстрее любой степени x, т. е. для любого $p \ge 0$ справедливо соотношение $\lim\limits_{x\to\infty} x^p\mu(x) = 0$.*

Доказательство. Из равенства (5), пользуясь монотонностью функции $\vartheta(x)$, получаем при $x > 1$ следующие соотношения:

$$\vartheta_*(x) = \ln\frac{\mu(1)}{\mu(x)} = \int\limits_1^x \frac{\vartheta(t)}{t}\,dt > \int\limits_{\sqrt{x}}^x \frac{\vartheta(t)}{t}\,dt \ge \frac{1}{2}\vartheta(\sqrt{x})\ln x.$$

Пользуясь ими, а также равенством $\lim\limits_{x\to\infty}\vartheta(x) = \infty$, имеем $\lim\limits_{x\to\infty}\vartheta_*(x)(\ln x)^{-1} = \infty$. Следовательно, для любого $p \ge 0$ справедливы равенства

$$\lim_{x\to\infty} x^p\mu(x) = \mu(1)\lim_{x\to\infty} x^p e^{-\vartheta_*(x)} = 0.$$

Следствие 2. *Для классов Жеврея $\vartheta(x) = O(\sqrt[\alpha]{x})$ при $x \to \infty$.*

Доказательство. Пусть $G(k) = A^k k^{\alpha k}$, где $A > 1$ и $\alpha > 0$. Обозначим $y(k) = k^{\alpha k}/\sigma^k$, где $\sigma = x/A < x$. Функция $\ln y(\xi)$ выпукла вниз, так как $(\ln y)'' = \alpha/\xi > 0$. Выражение $\alpha\xi\ln\xi - \xi\ln\sigma$, где ξ — переменная, $\xi > 0$, и $\sigma = x/A$ фиксировано, достигает своего минимума при $\xi = e^{-1}\sigma^{1/\alpha} = \xi_0$. Если при этом ξ

принимает целочисленное значение n, то по определению функции $\mu(x)$ выражение $y(n)$ является минимальным: $y(n) = n^{\alpha n}\sigma^{-n} = e^{-\alpha\xi_0} = \exp(-\alpha e^{-1}\sqrt[\alpha]{\sigma})$. Если же $\xi = n + t$, где $0 \le t \le 1$, то

$$y(n) = n^{\alpha n}\sigma^{-n} = e^{-\alpha n}[(1 + t/n)^n]^{-\alpha} \sim e^{-\alpha(n+t)} = \exp(-\alpha e^{-1}\sqrt[\alpha]{\sigma}).$$

Тем самым при достаточно больших x будут справедливы следующие асимптотические соотношения:

$$\mu(x) \sim \exp(-\alpha e^{-1}\sqrt[\alpha]{x/A}), \quad \vartheta(x) \sim e^{-1}\sqrt[\alpha]{x/A}.$$

Следствие 3. *Если* $x > \max\limits_{0\le k\le p-1}\{\sqrt[p-k]{G(p)/G(k)}\} \ge \sqrt[p]{G(p)/\|f\|}$, *то* $\vartheta(x) \ge p$.

Доказательство. Ввиду определения функции $\mu(x)$ выражение $G(p)/x^p$ принимает наименьшее значение начиная с наибольшего x, удовлетворяющего неравенствам

$$G(p)/x^p \le G(0),\ G(p)/x^p \le G(1)/x, \dots, G(p)/x^p \le G(p-1)/x^{p-1}.$$

Стало быть, это значение x удовлетворяет неравенству $\vartheta(x) \ge p$.

Следствие 4. *Пусть k — произвольное вещественное и $r \ge 1$ — целое числа. Тогда для достаточно больших $r > r_0$ имеем*

$$s_r \equiv \sum_{n=r}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^k} \le \frac{\pi^2}{6}\frac{\mu(r)}{r^{k-2}}, \quad r_0 = \sqrt[m]{\frac{G(m+1)}{G(0)}}, \quad m = [|k|] + 1.$$

Доказательство. Согласно следствию 3 параметр r выбираем, исходя из условия $k + \vartheta(r) \ge 2$, т. е. равным $r > r_0$. В результате получаем

$$s_r \equiv \frac{\mu(r)}{r^k}\sum_{n=r}^{\infty}\left(\frac{r}{n}\right)^k\frac{\mu(n)}{\mu(r)} = \frac{\mu(r)}{r^k}\sum_{n=r}^{\infty}\left(\frac{r}{n}\right)^k\exp\left(-\int\limits_r^n\frac{\vartheta(t)}{t}dt\right)$$
$$\le \frac{\mu(r)}{r^k}\sum_{n=r}^{\infty}\left(\frac{r}{n}\right)^k\exp\left(-\vartheta(r)\ln\frac{n}{r}\right) \le \frac{\mu(r)}{r^k}\sum_{n=r}^{\infty}\left(\frac{r}{n}\right)^{k+\vartheta(r)} \le \frac{\mu(r)}{r^{k-2}}\sum_{n=r}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Следствие 5. *Справедливы следующие неравенства:*

$$\frac{1}{\vartheta(x)} \le \frac{\ln x}{\int\limits_1^x\frac{\vartheta(t)}{t}dt} \le \frac{2}{\vartheta(\sqrt{x})}.$$

Доказательство. Неравенства являются следствием очевидных оценок

$$\vartheta(x)\ln x \ge \int\limits_1^x\frac{\vartheta(t)}{t}\,dt > \int\limits_{\sqrt{x}}^x\frac{\vartheta(t)}{t}\,dt \ge \frac{1}{2}\vartheta(\sqrt{x})\ln x, \quad x > 1.$$

Теорема 2. *Пусть k — вещественное число, $\delta > 0$ достаточно мало и $x = \mu^{-1}(\delta)$ — корень уравнения $\mu(x) = \delta$. Тогда единственный корень уравнения $x^k\mu(x) = \delta$ имеет следующее асимптотическое представление при $\delta \to 0$:*

$$x_*(\delta) = \mu^{-1}(\delta)+k\ln\mu^{-1}(\delta)+k^2\frac{\ln\mu^{-1}(\delta)}{\vartheta(\mu^{-1}(\delta))}+k^3\frac{\ln\mu^{-1}(\delta)}{\vartheta^2(\mu^{-1}(\delta))}+o\left(\frac{\ln\mu^{-1}(\delta)}{\vartheta^2(\mu^{-1}(\delta))}\right). \quad (6)$$

Доказательство. Запишем уравнение $x^k\mu(x) = \delta$ в виде

$$\ln\frac{1}{\mu(x)} - k\ln x = \ln\frac{1}{\delta}, \quad 0 < \mu(x) \le 1,\ x \ge 1,\ 0 < \delta < 1.$$

Введя обозначения $\xi = \ln\frac{1}{\mu(x)}$, $f(\xi) = k\ln\mu^{-1}(e^{-\xi})$, перепишем последнее равенство так:

$$F(\xi) = u, \quad F(\xi) \equiv \xi - f(\xi), \quad u \equiv \ln\frac{1}{\delta},\ 0 < \delta < 1. \quad (7)$$

Пусть функция $F(\xi)$ непрерывна, строго возрастает в интервале $\eta_0 < \xi < \infty$ и $F(\xi) \sim \xi$ при $\xi \to \infty$. Пусть $\xi(u)$ — корень уравнения $F(\xi) = u$, лежащий в интервале (η_0, ∞) при $u > F(\eta_0)$. Тогда $\xi(u) \sim u$ при $u \to \infty$.

В самом деле, корень $\xi(u)$ единствен, возрастает и неограничен при $u \to \infty$. Из равенства $F(\xi) = u$ и соотношения $\lim\limits_{\xi\to\infty} F(\xi)/\xi = 1$ имеем $u = (1 + o(1))\xi$ при $\xi \to \infty$. Поэтому $u \to \infty$ при $\xi \to \infty$. Деление на $1 + o(1)$ дает равенство $\xi = (1 + o(1))u$, которое эквивалентно соотношению $\xi(u) \sim u$ при $u \to \infty$, т. е. условию $\lim\limits_{u\to\infty} \xi(u)/u = 1$.

Выполнимость требований, налагаемых на функцию $F(\xi)$ в (7), следует из теоремы 1. Действительно, согласно следствию 5 выполняется соотношение

$$\frac{F(\xi)}{\xi} = 1 - \frac{f(\xi)}{\xi} = 1 - k\left(\frac{\ln x}{\int_1^x \frac{\vartheta(t)}{t}\,dt}\right) \to 1 \quad \text{при} \quad \xi \to \infty \text{ или } x \to \infty.$$

Из (5) и свойств функции $\vartheta(\mu^{-1}(e^{-\xi}))$ вытекает $F'(\xi) = 1 - f'(\xi) > 0$, поскольку

$$f'(\xi) \equiv k\frac{d}{d\xi}\ln\mu^{-1}(e^{-\xi}) = -\frac{k}{x}\frac{\mu(x)}{\mu'(x)} = \frac{k}{\vartheta(x)} \to 0 \quad \text{при } \xi \to \infty \text{ или } x \to \infty.$$

Таким образом, для достаточно больших $\xi > \eta_0$ функция $F(\xi) = \xi - f(\xi)$ в (7) удовлетворяет всем требуемым условиям. Значение η_0 определяется условием единственности корня уравнения (7) и выбирается согласно следствию 3 равным $\eta_0 = -\ln\mu(x_0)$, где $x_0 \ge \sqrt[m]{G(m)/G(0)}$ и $m = [|k|] + 1$. Для $u > F(\eta_0)$ единственный корень $\xi(u)$ уравнения (7) задается асимптотическим равенством

$$\xi = (1 + o(1))\,u, \quad u = \ln\frac{1}{\delta} \to \infty \quad \text{при } \delta \to 0.$$

С учетом обозначения $\xi = \ln\frac{1}{\mu(x)}$ это соотношение записывается в виде

$$x_* \equiv x_*(\delta) = \mu^{-1}(\delta)\,(1 + o(1)) \quad \text{при } \delta \to 0 \text{ или } x_* \to \infty. \quad (8)$$

Корень $x_*(\delta)$ — это функция от малого параметра $\delta > 0$, и информация об условиях его асимптотического при $\delta \to 0$ «примыкания» к корню $x = \mu^{-1}(\delta)$ уравнения $\mu(x) = \delta$ будет далее уточняться.

Уточним[1)] представление (8) методом итераций. Из условия $\lim\limits_{\xi\to\infty} \frac{f(\xi)}{\xi} \to 0$ следует, что функция $\xi - f(\xi)$ стремится к $+\infty$ вместе с ξ. Таким образом, функция $\xi - f(\xi)$ обратима в окрестности бесконечности. Функция $u(\xi)$, обратная к сужению $\xi - f(\xi)$ на интервал (η_0, ∞), непрерывна и строго монотонна в окрестности $+\infty$. Определим индуктивно последовательность функций

$$u_0(\xi) = \xi, \quad u_n(\xi) = \xi + f(u_{n-1}(\xi)), \quad n \geq 1. \tag{9}$$

Покажем, что при $\xi \to \infty$

$$u_n(\xi) \to \infty, \tag{10a}$$

$$u(\xi) - u_n(\xi) \sim f(\xi)[f'(\xi)]^n \quad \text{при } \xi \to \infty. \tag{10b}$$

Пусть $y = u(\xi)$ и $y_n = u_n(\xi)$. Тогда $\xi = y - f(y)$, $y_0 = u_0(\xi) = \xi$ и $y_n = \xi + f(y_{n-1})$. Отсюда получаем, что $\xi/y = 1 - f(y)/y$. Так как y стремится к ∞ вместе с ξ и $f(y)/y \to 0$, на нулевом индуктивном шаге имеем

$$y = u(\xi) \sim y_0 = u_0(\xi) = \xi.$$

Принимая во внимание монотонность и непрерывность справа производной $f'(\xi)$, по второй теореме о среднем значении в форме Бонне [11] получаем

$$y - \xi = f(y) = f(\xi) + \int\limits_{\xi}^{y} f'(z)\,dz = f(\xi) + f'(\xi + 0)\int\limits_{\xi}^{z_1} dz = f(\xi) + f'(\xi)(z_1 - \xi),$$

где $z_1 \in [\xi, y]$. Следовательно, при $\xi \to \infty$ имеем соотношение $z_1 \to \infty$. Но $f'(\xi)$ стремится к нулю при $\xi \to \infty$. Поэтому $y - \xi = f(\xi) + o(y - \xi)$. Отсюда для первого индуктивного шага имеем

$$u(\xi) - \xi \sim f(\xi), \quad \text{или } u(\xi) \sim \xi + f(\xi).$$

Индукцией по n докажем, что

$$|u(\xi) - u_n(\xi)| = o(|u(\xi) - u_{n-1}(\xi)|) \quad \text{при } \xi \to \infty. \tag{11}$$

Все по той же теореме о среднем значении в форме Бонне имеем

$$y - y_n = f(y) - f(y_{n-1}) = \int\limits_{y_{n-1}}^{y} f'(z)\,dz = f'(y_{n-1})(z_{n-1} - y_{n-1}), \tag{12}$$

где $z_{n-1} \in [y_{n-1}, y]$. Согласно предположению индукции $z_{n-1} \to \infty$, $f'(y_{n-1}) \to 0$ при $\xi \to \infty$, что доказывает соотношение (11), а с ним и эквивалентное ему утверждение

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \eta_1 > \eta_0 \forall \xi > \eta_1 \quad |u(\xi) - u_n(\xi)| \leq \varepsilon |u(\xi) - u_{n-1}(\xi)|. \tag{13}$$

Покажем, что $u_n(\xi) \to \infty$. Учитывая соотношение $u(\xi) - \xi \sim f(\xi)$, полученное на первом индуктивном шаге, условие $f(\xi)/\xi \to 0$, а также соотношение $u(\xi) \sim \xi$, полученное на нулевом индуктивном шаге, из неравенства (13) для всех $\xi > \eta_1$ выводим цепочку неравенств

$$|u(\xi) - u_n(\xi)| \leq \varepsilon^n |u(\xi) - \xi| \leq \varepsilon^n c_1 |f(\xi)| \leq \varepsilon^{n+1} c_1 |\xi| = \varepsilon^{n+1} c_1 |u_0(\xi)| \leq \varepsilon^{n+1} c_1 c_2 |u(\xi)|$$

[1)] Прием, который используется ниже, был употреблен в [10].

с некоторыми постоянными $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$. Она, в частности, содержит неравенство

$$|u(\xi) - u_n(\xi)| \le \varepsilon_0 |u(\xi)|, \quad \varepsilon_0 = \varepsilon^{n+1} c_1 c_2 \ \forall \xi > \eta_1.$$

Если переписать его в виде

$$(1 - \varepsilon_0)|u(\xi)| \le |u_n(\xi)| \le (1 + \varepsilon_0)|u(\xi)|$$

и воспользоваться произвольностью $\varepsilon_0 > 0$, то получим $u(\xi) \sim u_n(\xi)$. Отсюда $u_n(\xi) \to \infty$ при $\xi \to \infty$ и, следовательно, соотношение $(10a)$ установлено.

Используя повторно все те же соображения, из неравенства

$$|u(\xi) - u_n(\xi)| \le \varepsilon_1 |u(\xi) - \xi|, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon^n,$$

извлекаем двойное неравенство

$$(1 - \varepsilon_1)|u(\xi) - \xi| \le |u_n(\xi) - \xi| \le (1 + \varepsilon_1)|u(\xi) - \xi|,$$

из которого ввиду произвольности $\varepsilon_1 > 0$ приходим к заключению

$$u_n(\xi) - \xi \sim u(\xi) - \xi \sim f(\xi) \quad \text{при } \xi \to \infty. \tag{14}$$

Соотношения (11) и (14) являются базовыми при получении эффективной асимптотической при $\xi \to \infty$ оценки рекуррентного процесса (9), т. е. соотношения $(10b)$.

Переходя к доказательству $(10b)$, обратим внимание, что рекуррентный процесс (9) определяет отображение $w : u_{n-1} \to u_n$, которое в силу оценок (11) превращает «хорошее» приближение u_{n-1} в более хорошее u_n. При этом значение $u_n(\xi)$ в силу (14) оказывается настолько близким к $u(\xi)$, что $u_n(\xi)$ можно считать асимптотически равным $u(\xi)$ при $\xi \to \infty$. Модифицируем отображение $w(\xi)$ так, чтобы $w(\xi) \sim \xi + f(\xi)$. Тогда справедливо следующее соотношение:

$$f'(w(\xi)) \sim f'(\xi) \quad \text{при } \xi \to \infty. \tag{15}$$

Доказательства соотношения (15) для случаев $\xi \ne \xi_i$ и $\xi = \xi_i$ различаются (ξ_i — точка разрыва функции $f'(\xi)$). При этом из монотонности $f'(\xi)$ следует, что, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, значение $f'(w(\xi))$ всегда заключено между $f'[w(\xi) + \varepsilon f(\xi)]$ и $f'[w(\xi) - \varepsilon f(\xi)]$ и знаки функций $f(\xi)$, $f'(\xi)$ определяются знаком числа k (из условий теоремы 2).

Пусть $\xi \ne \xi_i$. Введем функции $\bar f(\xi) = |k| \ln \mu^{-1}(e^{-\xi}) > 0$ и $w(\xi) \equiv w_\pm(\xi) \sim \xi \pm \bar f(\xi)$. Тогда при достаточно большом ξ справедливы следующие равенства:

$$w_+(\xi) = (\xi + \bar f(\xi))(1 + \delta_+), \ w_-(\xi) = (\xi - \bar f(\xi))(1 + \delta_-) \ (\delta_+, \delta_- \text{ достаточно малы}).$$

Из монотонности функции $\bar f'(\xi) > 0$ следуют неравенства

$$\bar f'[w(\xi) + \varepsilon \bar f(\xi)] \le \bar f'(w(\xi)) \le \bar f'[w(\xi) - \varepsilon \bar f(\xi)] \quad \forall \varepsilon > 0. \tag{16}$$

С учетом соотношений

$$w_\pm(\xi) + \varepsilon \bar f(\xi) = \xi(1 + \delta_\pm) \pm (1 + \delta_\pm \pm \varepsilon) \bar f(\xi),$$

$$w_\pm(\xi) - \varepsilon \bar f(\xi) = \xi(1 + \delta_\pm) \pm (1 + \delta_\pm \mp \varepsilon) \bar f(\xi)$$

перепишем их в виде

$$\bar f'[\xi(1 + \delta_\pm) \pm (1 + \delta_\pm \pm \varepsilon) \bar f(\xi)] \le \bar f'(w_\pm(\xi)) \le \bar f'[\xi(1 + \delta_\pm) \pm (1 + \delta_\pm \mp \varepsilon) \bar f(\xi)].$$

Учитывая, что $\bar{f}(\xi)/\xi \to 0$ при $\xi \to \infty$, для достаточно малого $\delta > 0$ получаем двусторонние неравенства $-\delta\xi \le \bar{f}(\xi) \le \delta\xi$. Следовательно,

$$\xi(1+\delta_\pm) \pm (1+\delta_\pm \pm \varepsilon)\bar{f}(\xi) \le \xi(1+\delta_\pm) + (1+\delta_\pm \pm \varepsilon)\delta\xi,$$

$$\xi(1+\delta_\pm) - (1+\delta_\pm \mp \varepsilon)\delta\xi \le \xi(1+\delta_\pm) \pm (1+\delta_\pm \mp \varepsilon)\bar{f}(\xi).$$

В силу (16) и монотонности $\bar{f}'(\xi)$, заключаем из этих неравенств, что

$$\bar{f}'[\xi(1+\delta_\pm) + (1+\delta_\pm \pm \varepsilon)\delta\xi] \le \bar{f}'[w_\pm(\xi)] \le \bar{f}'[\xi(1+\delta_\pm) - (1+\delta_\pm \mp \varepsilon)\delta\xi].$$

При этом поскольку знак функции $f'(\xi)$ совпадает со знаком числа k, получаем

$$f'[\xi(1+\delta_+ + (1+\delta_+ + \varepsilon)\delta)] \le f'[w_+(\xi)] \le f'[\xi(1+\delta_+ - (1+\delta_+ - \varepsilon)\delta)] \text{ для } k > 0,$$

$$f'[\xi(1+\delta_- - (1+\delta_- + \varepsilon)\delta)] \le f'[w_-(\xi)] \le f'[\xi(1+\delta_- + (1+\delta_- - \varepsilon)\delta)] \text{ для } k < 0.$$

Отсюда ввиду непрерывности $f'(\xi)$ в точке $\xi \ne \xi_i$, произвольности ε, δ, а также достаточной малости δ_+, δ_- получим $f'(\xi) \le f'(w(\xi)) \le f'(\xi)$, т. е. $f'(w(\xi)) \sim f'(\xi)$.

Соотношение (15) сохраняется и в случае $\xi = \xi_i$. В самом деле, пусть ξ — точка из промежутка $[\xi_i, \xi_{i+1})$, отличная от ξ_i. По доказанному неравенство $|f'(w(\xi)) - f'(\xi)| \le \varepsilon$ выполняется для любых $\varepsilon > 0$ и $\xi \in (\xi_i, \xi_{i+1})$, а так как функция $f'(\xi)$ имеет в точке ξ_i предел справа, найдется такая точка η, $\xi_i < \eta$, что выполняются неравенства $|f'(w(\xi_i)) - f'(w(\eta))| \le \varepsilon$, $|f'(\eta) - f'(\xi_i)| \le \varepsilon$, а значит, и неравенство $|f'(w(\xi_i)) - f'(\xi_i)| \le 3\varepsilon$; это показывает, что $f'(w(\xi_i)) \sim f'(\xi_i)$ при $\xi_i \to \infty$. Доказательство (15) тем самым завершено.

Далее, исходя из (15) и второй теоремы о среднем в форме Бонне [11], покажем, что соотношения (11) и (14) влекут асимптотическое равенство

$$u(\xi) - u_n(\xi) \sim f(\xi)[f'(\xi)]^n \quad \text{при } \xi \to \infty,$$

чем и завершим доказательство соотношения (10b).

Значение z_{n-1} в (12) заключено между y и y_{n-1}. Поэтому, как следует из формулы (14), $z_{n-1} - \xi \sim f(\xi)$. Значит, на основании (15) для достаточно больших ξ имеем $f'(z_{n-1}) \sim f'(\xi)$. Далее,

$$y - y_n = \int\limits_{y_{n-1}}^{y} f'(z)\,dz = f'(y_{n-1})(y - y_{n-1}) + o(y - y_{n-1}),$$

и тем самым $y - y_n \sim (y - y_{n-1})f'(\xi)$. Таким образом, асимптотическое равенство (10b) доказано по индукции.

В процессе доказательства теоремы 2 предложено приближенно находить значение функции $u(\xi)$, обратной к $\xi - f(\xi)$, посредством рекуррентного вычисления величин $u_n(\xi)$. При этом оценка (11) дает основание считать, что итерация $u_n(\xi)$ при $\xi \to \infty$ будет близка к $u(\xi)$ асимптотически [11]. Причем, как следует из (10a, b), близость эта тем заметнее, чем быстрее рост функции $\vartheta(\mu^{-1}(e^{-\xi}))$ при $\xi \to \infty$.

Исходя из сказанного, выпишем теперь асимптотическое при $\delta \to 0$ разложение корня уравнения $x^k\mu(x) = \delta$. Из формулы (10b) и (9) имеем

$$u(\xi) - u_2(\xi) \sim f(\xi)[f'(\xi)]^2, \quad u_2(\xi) = \xi + f(u_1(\xi)), \quad u_1(\xi) = \xi + f(\xi), \quad u_0(\xi) = \xi.$$

Так как

$$u_2(\xi) = \xi + f(\xi + f(\xi)) \sim \xi + f(\xi) + f'(\xi)f(\xi),$$

получаем
$$u(\xi) = \xi + f(\xi) + f'(\xi)f(\xi) + f(\xi)[f'(\xi)]^2 + o(ff'^2).$$
Вспоминая обозначения
$$\xi = \ln(1/\mu(x)), \quad f(\xi) = k \ln \mu^{-1}(e^{-\xi}), \quad f'(\xi) = k/\vartheta(\mu^{-1}(e^{-\xi}))$$
и учитывая, что корень $x = \mu^{-1}(\delta)$ уравнения $\mu(x) = \delta$ известен, приходим к формуле (6). Теорема доказана.

Замечание 1. Согласно теореме 1 порядок роста функции $\vartheta(\mu^{-1}(\delta))$ к бесконечности при $\delta \to 0$ связан со структурой класса C^∞-гладких функций. Условие $\delta \to 0$ обеспечивает однозначное соответствие корней исследуемого и эталонного уравнений посредством функции $o(\ln \mu^{-1}(\delta)/\vartheta^2(\mu^{-1}(\delta)))$ — остатка, задающего степень «близости» этого соответствия. Получаемый асимптотический ряд, вообще говоря, не является сходящимся, хотя и представляет корень $x_*(\delta)$ тем эффективнее, чем быстрее рост функции $\vartheta(\mu^{-1}(\delta))$ при $\delta \to 0$. Впрочем, только достаточно тривиальные классы C^∞-гладких функций (например, аналитические) порождают асимптотические ряды, которые заведомо сходятся [12].

В дальнейшем будем рассматривать классы C^∞-гладких функций, для которых на функцию $\vartheta(x)$ налагаются несколько более жесткие, чем указано в теореме 1, требования к ее росту при $x \to \infty$.

Сохранив в целом структуру доказательства А. Г. Витушкина [13] и преодолев ряд дополнительных аналитических трудностей, докажем следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть* $\varliminf_{x\to\infty} \vartheta(x)/\ln x = \infty$. *Тогда колмогоровская ε-энтропия компакта $G_c^\infty \subset C^\infty[S]$, вложенного непрерывно в пространство $C[S]$ непрерывных периодических функций, вычисляется по формуле*
$$H_\varepsilon(G_c^\infty) = \frac{2}{\ln 2} \int\limits_1^{r(\varepsilon)} \vartheta(t)\, dt + O(r \ln r), \quad \text{где } r = r(\varepsilon) = \mu^{-1}\left(\frac{\varepsilon}{c}\right).$$

Доказательство. Теорема 3 следует из теорем 1, 2 и лемм 4–6, приведенных ниже.

Доказательству теоремы 3 предпошлем ряд утверждений, связанных с тригонометрическим разложением функции $\psi \in C^\infty[S]$.

Существуют разные способы, следуя которым, периодическую функцию $\psi \in C^\infty[S]$ связывают с ее разложением в тригонометрический ряд.

В силу леммы 2 наличие в пространстве C^∞ абсолютного базиса наводит на мысль реализовать элемент $\psi \in C^\infty[S]$ в виде разложения Фурье по этому базису.

Вопрос о том, можно ли разложение
$$\psi(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \tag{17}$$
произвольной периодической функции $\psi(t) \in C^\infty[S]$ по базису $\{1/2, \cos pt, \sin pt\}$ $(p > 0)$ отождествить с ее рядом Фурье, равносилен вопросу о представимости коэффициентов a_p, b_p ряда (17) в виде известных формул Фурье. Заметим,

что тригонометрический ряд (17) сходится в τ-топологии пространства $C^\infty[S]$ (т. е. равномерно!). Поэтому он сходится и в смысле гильбертова пространства $L_2[S]$ и в силу полноты и ортогональности тригонометрической системы $\{1/2, \cos pt, \sin pt\}$ является рядом Фурье своей суммы $\psi(t) \in C^\infty[S]$. Если умножить (17) на $\cos pt$ и $\sin pt$ соответственно и проинтегрировать почленно, то для коэффициентов разложения (17) получим выражения в виде стандартных формул Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \psi(t)\,dt, \quad \begin{pmatrix} a_p \\ b_p \end{pmatrix} = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \psi(t)\begin{pmatrix} \cos pt \\ \sin pt \end{pmatrix} dt,\ p \geq 1.$$

Следовательно, ряд (17) можно отождествить с рядом Фурье его суммы $\psi(t) \in C^\infty[S]$.

К формальным достоинствам разложения Фурье функции $\psi(t) \in C^\infty[S]$ относятся его нелокальность и то обстоятельство, что допускается приближенное задание $\psi(t)$ в виде частной суммы $\psi_N(t)$, содержащей конечное число N элементов тригонометрического базиса. Поэтому «эффективность» такого способа задания функции $\psi(t) \in C^\infty[S]$ определяется количеством элементов базиса, присутствующих в $\psi_N(t)$, и, стало быть, определяется ограничениями лишь общематематической природы самого класса $C^\infty[S]$.

Перейдем к формулировке такого рода ограничений, описав компакт $G_c^\infty \subset C^\infty[S]$ в терминах коэффициентов разложения элемента $\psi \in G_c^\infty$ по базису в $C^\infty[S]$.

Лемма 4. *Если функция ψ принадлежит компакту* (4), *то*

$$|a_0| \leq c, \quad |a_p| \leq 2c\mu(p), \quad |b_p| \leq 2c\mu(p) \quad \forall p \geq 1. \tag{18}$$

Обратно, если коэффициенты разложения функции $\psi \in C^\infty$ по базису удовлетворяют неравенствам

$$|a_0| \leq c, \quad |a_p| \leq \frac{1}{8}\frac{\mu(p)}{p^2}, \quad |b_p| \leq \frac{1}{8}\frac{\mu(p)}{p^2} \quad \forall p \geq 1, \tag{19}$$

то функция ψ принадлежит компакту (4).

Доказательство. Пусть $\psi \in G_c^\infty$. Тогда интегрирование m раз по частям равенств

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \psi(t)\,dt, \quad \begin{pmatrix} a_p \\ b_p \end{pmatrix} = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \psi(t)\begin{pmatrix} \cos pt \\ \sin pt \end{pmatrix} dt, \quad p = 1, 2, \dots,$$

приводит к соотношениям

$$\begin{pmatrix} a_p \\ b_p \end{pmatrix} = \frac{\pm 1}{\pi p^m}\int\limits_0^{2\pi} D^m\psi(t)\begin{pmatrix} \cos pt \\ \sin pt \end{pmatrix} dt, \quad m \geq 1,\ p = 1, 2, \dots.$$

Поэтому

$$|a_0| \leq c, \quad |a_p| \leq 2c\frac{G(m)}{p^m}, \quad |b_p| \leq 2c\frac{G(m)}{p^m} \quad \forall m \geq 1,\ p = 1, 2, \dots.$$

Пользуясь еще определением функции $\mu(p)$, приходим к неравенствам (18).

Предположим, что выполнены неравенства (19). Тогда поскольку $\mu(p) \leq c$, имеем

$$|\psi(t)| \leq \frac{|a_0|}{2} + \sum_{p=1}^{+\infty}(|a_p| + |b_p|) \leq \frac{c}{2} + \frac{1}{4}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{\mu(p)}{p^2} = \frac{c}{2}\left(1 + \frac{\pi^2}{12}\right) < c.$$

Далее, для $l \geq 1$ получаем также

$$|D^l\psi(t)| \leq \frac{1}{4}\sum_{p=1}^{+\infty} p^l\frac{\mu(p)}{p^2} \leq \frac{1}{4}G(l)\sum_{p=1}^{+\infty}\left(\inf_{l\geq 0}\frac{G(l)}{p^l}\right)^{-1}\frac{\mu(p)}{p^2} = \frac{1}{4}G(l)\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^2} < G(l).$$

Лемма 4 доказана.

Полученный результат позволяет отождествлять компакт (4) с совокупностью тригонометрических рядов (17). Тем самым создается необходимый конструктивный аппарат для получения энтропийных оценок. Действительно, зафиксировав произвольное вещественное число k и положительное d, введем множество $X_{k,d}^{\infty}$ сходящихся в $C^{\infty}[S]$ тригонометрических рядов вида (17), для коэффициентов которых выполняются неравенства

$$|a_0| \leq d, \quad |a_p| \leq d\frac{\mu(p)}{p^k}, \quad |b_p| \leq d\frac{\mu(p)}{p^k} \quad \forall p > 0.$$

Рассмотрение множества рядов $X_{k,d}^{\infty} \subset C^{\infty}[S]$ преследует единственную цель: используя параметры k, d и свойство монотонности ε-энтропии по включению множеств, добиться «окружения» компакта G_c^{∞} компактами канонической структуры, ε-энтропия которых поддается вычислению.

Лемма 5. *Если* $0 < a \leq 1/8$, *а* $b \geq 2c$, *то* $X_{2,a}^{\infty} \subset G_c^{\infty} \subset X_{0,b}^{\infty}$. *Следовательно,*

$$H_\varepsilon\big(X_{2,a}^{\infty}\big) \leq H_\varepsilon\big(G_c^{\infty}\big) \leq H_\varepsilon\big(X_{0,b}^{\infty}\big).$$

Лемма 5 следует из леммы 4 и неравенств Колмогорова (1).

Свойство монотонности ε-энтропии по включению множеств сыграло важную роль в доказательстве следующего утверждения.

Лемма 6. *При достаточно малых* ε *для колмогоровской* ε*-энтропии пространства* $X_{k,d}^{\infty}$ *справедливо равенство*

$$H_\varepsilon\big(X_{k,d}^{\infty}\big) = 2\sum_{p=0}^{r(\varepsilon)}{}' H_{\delta_p^\varepsilon}(I), \quad r \equiv r(\varepsilon) = \mu^{-1}\left(\frac{\varepsilon}{d}\right)(1 + o(1)) \tag{20}$$

(*штрих у суммы означает, что нулевой коэффициент берется с множителем* $1/2$).

Здесь

$$I \equiv [-d, d], \quad \delta_0^\varepsilon = 3\varepsilon, \quad \delta_p^\varepsilon = \varepsilon\frac{p^k}{\mu(p)}\psi(\varepsilon),\ 1 \leq p \leq r, \quad \frac{1}{4\mu^{-1}\left(\frac{\varepsilon}{d}\right)} \leq \psi(\varepsilon) \leq 3. \tag{21}$$

Доказательство. Пусть $I \equiv [-d, d]$, а $h_\varepsilon(I)$ и $H_\varepsilon(I)$ — его ε-емкость и ε-энтропия соответственно [13]. Фиксируем положительные числа r, $\delta \leq 2d$, $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_r$ таким образом, чтобы выполнялись соотношения

$$\delta_0 = \delta;\ \delta_p = \frac{\delta p^k}{\mu(p)}\ (p = 1, 2, \ldots, r);\ \delta_p \leq 2d\ (p = 0, 1, \ldots, r);\ \frac{2d\mu(r)}{r^k} > \delta. \tag{22}$$

Пусть c_p^m $(m = 1, 2, \ldots, n_{\frac{\delta_p}{2}})$ — набор из максимального $n_{\frac{\delta_p}{2}}$ числа точек отрезка I, попарно удаленных друг от друга больше, чем на δ_p. Тогда $h_{\frac{\delta_p}{2}}(I) = \log_2 n_{\frac{\delta_p}{2}}$.

Перенумеруем точки c_p^m двумя какими-либо способами, обозначив перенумерованные наборы через a_p^j и b_p^i $(j,i=1,2,\dots,n_{\frac{\delta_p}{2}})$ соответственно. Положим

$$f^{\delta}_{j_0,j_1,\dots,j_r;i_1,i_2,\dots,i_r}(t)=\sum_{p=0}^{r}{}'\big(a_p^{j_p}\cos pt+b_p^{i_p}\sin pt\big),\tag{23}$$

$$j_p=1,\dots,n_{\frac{\delta_p}{2}}\ (p=0,1,\dots,r);\quad i_p=1,\dots,n_{\frac{\delta_p}{2}}\ (p=1,2,\dots,r).$$

Число σ_r^δ всех функций вида $f^{\delta}_{j_0,j_1,\dots,j_r;i_1,i_2,\dots,i_r}(t)$ равно $\sigma_r^\delta=n_{\frac{\delta_0}{2}}\left(\prod\limits_{p=1}^{r}n_{\frac{\delta_p}{2}}\right)^2$.

Выбирая два конкретных значения пары r и δ, получим нижнюю и верхнюю оценки ε-энтропии пространства $X^\infty_{k,d}$.

Нижнюю оценку для $H_\varepsilon\big(X^\infty_{k,d}\big)$ получим с помощью оценок (1), положив $\delta=3\varepsilon$ в соотношениях (22) и приняв за r максимальное целое число, удовлетворяющее неравенству $3\varepsilon<2d\mu(r)/r^k$. Из теоремы 2, считая ε достаточно малым, получаем $r=\mu^{-1}(\varepsilon/d)[1+\omega(\varepsilon)]$, где $\omega(\varepsilon)$ — функция от ε и $\lim\limits_{\varepsilon\to0}\omega(\varepsilon)=0$. При этом можно указать $\varepsilon_0(k,d)>0$ такое, что при $3\varepsilon<\varepsilon_0(k,d)$ соотношения (22) для выбранного r и $\delta=3\varepsilon$ выполняются, а в силу следствия 5 найдется такая не зависящая от ε константа $\beta>0$, что

$$|k|\frac{\beta^{-1}}{\vartheta(\mu^{-1}(\varepsilon/d))}\le|\omega(\varepsilon)|\le|k|\frac{2\beta}{\vartheta(\sqrt{\mu^{-1}(\varepsilon/d)})}.\tag{24}$$

Фиксируем две различные функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$ типа $f^{3\varepsilon}_{j_0,j_1,\dots,j_r;i_1,i_2,\dots,i_r}(t)$ и покажем, что они отличаются (по норме в $C[S]$) не меньше, чем на 3ε. Пусть

$$f_1(t)-f_2(t)=\sum_{p=0}^{r}{}'(a_p\cos pt+b_p\sin pt).$$

Коэффициенты этого тригонометрического многочлена кратны 3ε, и хотя бы один из них отличен от нуля. Поэтому модуль старшего отличного от нуля коэффициента многочлена f_1-f_2 будет не менее 3ε. Следовательно, в силу классической теоремы Чебышёва [1] тригонометрический многочлен f_1-f_2 порядка r уклоняется от нуля не менее, чем на 3ε. Это означает, что $\|f_1(t)-f_2(t)\|\ge3\varepsilon$, т. е. что функции $\big\{f^{3\varepsilon}_{j_0,j_1,\dots,j_r;i_1,i_2,\dots,i_r}(t)\big\}$ в пространстве $X^\infty_{k,d}$ образуют множество элементов, попарно удаленных друг от друга больше, чем на 2ε. Из неравенств (1) имеем

$$H_\varepsilon\big(X^\infty_{k,d}\big)\ge h_\varepsilon\big(X^\infty_{k,d}\big)\ge h_{\frac{3\varepsilon}{2}}\big(X^\infty_{k,d}\big)=\log_2\sigma_r^{3\varepsilon}=2\sum_{p=0}^{r}{}'h_{\frac{\delta_p}{2}}(I)\ge2\sum_{p=0}^{r}{}'H_{\delta_p}(I).$$

В результате получается следующая оценка снизу:

$$H_\varepsilon\big(X^\infty_{k,d}\big)\ge2\sum_{p=0}^{r}{}'H_{\delta_p}(I),\quad\text{где }\delta_0=3\varepsilon,\ \delta_p=3\frac{\varepsilon p^k}{\mu(p)}\ (1\le p\le r).\tag{25}$$

Верхнюю оценку для $H_\varepsilon\big(X^\infty_{k,d}\big)$ получим, если покажем, что множество (23) образует ε-сеть в пространстве $X^\infty_{k,d}$, где $\varepsilon=2\delta(r+1)+2s_{r+1}$. Зафиксируем наименьшее целое r такое, что $s_{r+1}\le\varepsilon/4$, и положим $\delta(r+1)=\varepsilon/4$. Из теоремы 2 в силу следствия 4 получим, что $r=\mu^{-1}(\varepsilon/d)[1+\chi(\varepsilon)]$, где $\chi(\varepsilon)$ — функция от ε, стремящаяся к нулю при $\varepsilon\to0$. По аналогии с тем, как это делалось при получении нижней оценки, нетрудно убедиться, что при достаточно малом ε

соотношения (22) также выполняются и для функции $\chi(\varepsilon)$ справедливы оценки типа (24), но с другой константой $\beta > 0$.

Фиксируем некоторую функцию

$$f(t) = {\sum_{p=0}^{r}}' (A_p \cos pt + B_p \sin pt)$$

из множества $X_{k,d}^{\infty}$ и подберем индексы $j_0, j_1, \dots, j_r$ и $i_1, i_2, \dots, i_r$ так, чтобы

$$\bigl|A_p - a_p^{j_p}\bigr| \le \delta, \quad \bigl|B_p - b_p^{i_p}\bigr| \le \delta \quad (p = 0, 1, \dots, r).$$

Это возможно, поскольку δ_p-различимое множество отрезка I есть его δ_p-сеть. Тогда выполняется соотношение

$$\bigl\|f(t) - f^{\delta}_{j_0,j_1,\dots,j_r;i_1,i_2,\dots,i_r}(t)\bigr\| = \Bigl\|f(t) - {\sum_{p=0}^{r}}' \bigl(a_p^{j_p} \cos pt + b_p^{i_p} \sin pt\bigr)\Bigr\|$$

$$\le {\sum_{p=0}^{r}}' \bigl(\bigl|A_p - a_p^{j_p}\bigr| + \bigl|B_p - b_p^{i_p}\bigr|\bigr) + \sum_{p=r+1}^{\infty} (|A_p| + |B_p|) \le 2\delta(r+1) + 2s_{r+1} \equiv \varepsilon.$$

Следовательно, функции $\bigl\{f^{\delta}_{j_0,j_1,\dots,j_r;i_1,i_2,\dots,i_r}(t)\bigr\}$ при выбранных значениях параметров r и δ образуют в пространстве $X_{k,d}^{\infty}$ ε-сеть. Из неравенств (1) получаем теперь

$$H_\varepsilon\bigl(X_{k,d}^{\infty}\bigr) \le \log_2 \sigma_r^{\delta} \le 2 {\sum_{p=0}^{r}}' \log_2(n_{\frac{\delta_p}{2}}) = 2 {\sum_{p=0}^{r}}' h_{\frac{\delta_p}{2}}(I) \le 2 {\sum_{p=0}^{r}}' H_{\frac{\delta_p}{2}}(I).$$

Тем самым имеет место оценка сверху:

$$H_\varepsilon\bigl(X_{k,d}^{\infty}\bigr) \le 2 {\sum_{p=0}^{r}}' H_{\frac{\delta_p}{2}}(I), \quad \text{где } \delta_0 = \frac{\varepsilon}{2(r+1)}, \ \delta_p = \frac{1}{2(r+1)} \frac{\varepsilon p^k}{\mu(p)}. \tag{26}$$

Объединив оценки (25) и (26) для малых ε, получаем равенство (20). Лемма 6 доказана.

Итак, проблема вычисления ε-энтропии компакта $G_c^{\infty} \subset C^{\infty}[S]$ сведена к вычислению ε-энтропии пространств $X_{k,d}^{\infty}$.

Доказательство теоремы 3. Поскольку $H_\varepsilon(I) = \log_2(d/\varepsilon) + O(1)$ [13], из равенства (20) в силу соотношений (21) следует, что

$$(\ln 2) H_\varepsilon\bigl(X_{k,d}^{\infty}\bigr) = 2r \ln \frac{d}{\varepsilon} + 2 \int_1^r \ln \mu(t)\, dt - 2k(r \ln r - r + 1) + O(r \ln r). \tag{27}$$

Второе слагаемое в (27) преобразуется с помощью соотношения (5) к виду

$$2 \int_1^r \ln \mu(t)\, dt = -2r \ln \frac{d}{\mu(r)} + 2 \int_1^r \vartheta(t)\, dt + 2r \ln d - 2 \ln \mu(1).$$

Подставляя полученное в (27) и учитывая, что $r = r(\varepsilon) = \mu^{-1}(\varepsilon/d)$, имеем

$$(\ln 2) H_\varepsilon\bigl(X_{k,d}^{\infty}\bigr) = 2 \int_1^r \vartheta(t)\, dt - 2kr \ln r + O(r \ln r) = 2 \int_1^r \vartheta(t)\, dt + O(r \ln r).$$

Отсюда, поскольку $\varliminf\limits_{r\to\infty} \vartheta(r)/\ln r = \infty$, из леммы 5 и очевидного неравенства

$$\int\limits_1^r \vartheta(t)\,dt > \int\limits_{r/2}^r \vartheta(t)\,dt \geq \frac{r}{2}\vartheta\Big(\frac{r}{2}\Big)$$

следует доказательство теоремы 3.

Замечание 2. Теорема 3, будучи весьма общей, применима и в частном случае компактов аналитических функций.

Замечание 3. При условии $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n} < \infty$, где $\gamma_n = \inf\limits_{k\geq n} \sqrt[k]{G(k)}$, класс $G_c^\infty \subset C^\infty[S]$ состоит из финитных функций [14]. Подобные классы C^∞-гладких функций интересны тем, что позволяют полностью отделить свойство бесконечной дифференцируемости от основного свойства аналитических функций — теоремы единственности. В частности, неаналитическим классом C^∞-гладких функций является, например, класс Жеврея с $\alpha > 1$. Его ε-энтропия согласно теореме 3 выражается формулой $H_\varepsilon(G_c^\infty) \sim B\log_2^{\alpha+1}(c/\varepsilon)$, где $B, c > 0$ — положительные постоянные (значениям $0 < \alpha \leq 1$ соответствуют классы аналитических функций).

Полученный в работе результат появился как реакция на реальную потребность в вычислительной гидродинамике [15–17].

Автор благодарен С. К. Годунову за вопросы, которые послужили первоначальным толчком к получению результата, и за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бабенко К. И.* Основы численного анализа. М.; Ижевск: РХД, 2002.
2. *Колмогоров А. Н.* О некоторых асимптотических характеристиках вполне ограниченных метрических пространств // Докл. АН СССР. 1956. Т. 106, № 3. С. 385–388.
3. *Витушкин А. Г.* Абсолютная ε-энтропия метрических пространств // Докл. АН СССР. 1957. Т. 117, № 5. С. 745–747.
4. *Бабенко К. И.* Об энтропии одного класса аналитических функций // Научные доклады высшей школы. 1958. № 2. С. 9–16.
5. *Ерохин В. Д.* Об асимптотике ε-энтропии аналитических функций // Докл. АН СССР. 1958. Т. 120, № 5. С. 949–952.
6. *Widom H.* Rational approximation and n-dimensional diameters // J. Approx. Theory. 1972. V. 5. P. 343–361.
7. *Белых В. Н.* О свойствах наилучших приближений C^∞-гладких функций на отрезке вещественной оси (к феномену ненасыщаемости численных методов) // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 3. С. 483–499.
8. *Белых В. Н.* Об асимптотике колмогоровской ε-энтропии некоторых классов бесконечно дифференцируемых периодических функций (к проблеме К. И. Бабенко) // Докл. РАН. 2010. Т. 431, № 6. С. 731–735.
9. *Митягин Б. С.* Аппроксимативная размерность и базисы в ядерных пространствах // Успехи мат. наук. 1961. Т. 16, № 4. С. 63–132.
10. *Бурбаки Н.* Функции действительного переменного. М.: Наука, 1965.
11. *Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н.* Курс современного анализа. Ч. I. Основные операции анализа. М.: Физматгиз, 1962.
12. *де Брейн Н. Г.* Асимптотические методы в анализе. М.: Изд-во иностр. лит., 1961.
13. *Витушкин А. Г.* Оценка сложности задачи табулирования. М.: Физматгиз, 1959.
14. *Carleman T.* Les fonctions quasi analytiques. Paris: Gauthier-Villars, 1926.
15. *Belykh V. N.* To the problem of evolutionary «blow-up» of axially symmetric gas bubble in ideal incompressible fluid (main constructive hypothesis) // Proc. Intern. Conf. dedicated to M. A. Lavrentyev on the occasion on his birthday centenary. Kiev, 2000. P. 6–8.

16. *Белых В. Н.* К проблеме обтекания осесимметричных тел большого удлинения потоком идеальной несжимаемой жидкости // Прикл. математика и техн. физика. 2006. Т. 47, № 5. С. 56–67.

17. *Белых В. Н.* Внешняя осесимметричная задача Неймана для уравнения Лапласа: ненасыщаемые методы численного решения // Докл. РАН. 2007. Т. 417, № 4. С. 442–445.

Статья поступила 21 июня 2010 г.

Белых Владимир Никитич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
`belykh@math.nsc.ru`