Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2011. Том 52, № 2

УДК 517.98

РАЗНОСТИ ВЕСОВЫХ ОПЕРАТОРОВ КОМПОЗИЦИИ НА ЕДИНИЧНОМ ПОЛИКРУГЕ

С. Стевич, Ч. Ц. Цзян

Аннотация. Пусть φ_1 и φ_2 — голоморфные отображения единичного поликруга $\mathbb{D}^N$ в себя и u_1, u_2 — голоморфные функции на $\mathbb{D}^N$. Охарактеризованы ограниченность и компактность разности весовых операторов композиции W_{φ_1,u_1} и W_{φ_2,u_2} из весового пространства Бергмана $A^p_{\vec{\alpha}}$, $0 < p < \infty$, $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$, $\alpha_j > -1$, $j = 1, \dots, N$, в пространство весового типа H^∞_v голоморфных функций на единичном поликруге $\mathbb{D}^N$ в терминах порождающих функций φ_1, φ_2, u_1 и u_2.

Ключевые слова: весовой оператор композиции, весовое пространство Бергмана, пространство весового типа, компактный оператор, поликруг.

1. Введение

Пусть $\mathbb{C}$ — комплексная плоскость, $D(a,r)$ — открытый круг в $\mathbb{C}$ с центром в a радиуса r, $\mathbb{C}^N$ — N-мерное комплексное пространство со скалярным произведением $\langle z, w\rangle = \sum_{j=1}^N z_j \overline{w}_j$, $\mathbb{D}$ — открытый единичный круг в $\mathbb{C}$, $\mathbb{D}^N$ — открытый единичный поликруг в $\mathbb{C}^N$, $\mathbb{T}^N$ — различающее множество или граница Шилова $\mathbb{D}^N$. Для $z = (z_1, \dots, z_N) \in \mathbb{D}^N$ положим $|z|_\infty = \max_{1\le j\le N} |z_j|$. Пусть $H(\mathbb{D}^N)$ — пространство всех голоморфных функций на $\mathbb{D}^N$, $H^\infty(\mathbb{D}^N) = H^\infty$ — пространство всех ограниченных голоморфных функций на $\mathbb{D}^N$ с равномерной нормой $\|f\|_\infty = \sup_{z\in\mathbb{D}^N} |f(z)|$.

Пусть $dA(z) = \frac{1}{\pi}\,dxdy$ — нормированная мера Лебега на $\mathbb{D}$, а $dA_\alpha(z) = (\alpha+1)(1-|z|^2)^\alpha dA(z)$ — весовая мера Лебега на $\mathbb{D}$, где $-1 < \alpha < \infty$. Для $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$, $-1 < \alpha_j < \infty$, $j = 1, \dots, N$, и $0 < p < \infty$ *весовое пространство Бергмана* $A^p_{\vec{\alpha}}(\mathbb{D}^N) = A^p_{\vec{\alpha}}$ состоит из всех $f \in H(\mathbb{D}^N)$ таких, что

$$\|f\|^p_{A^p_{\vec{\alpha}}} = \int\limits_{\mathbb{D}^N} |f(z)|^p \, dA_{\vec{\alpha}}(z) < \infty,$$

где $dA_{\vec{\alpha}}(z) = dA_{\alpha_1}(z_1)\dots dA_{\alpha_N}(z_N)$. При $p \ge 1$ весовое пространство Бергмана с нормой $\|\cdot\|_{A^p_{\vec{\alpha}}}$ становится пространством Банаха, при $p \in (0,1)$ — пространством Фреше с инвариантной относительно сдвигов метрикой

$$d(f,g) = \|f-g\|^p_{A^p_{\vec{\alpha}}}.$$

Zhi Jie Jiang is supported by the Science Foundation of Sichuan Province (N 20072A04) and the Scientific Research Fund of School of Science SUSE.

Пусть v — положительная непрерывная функция на $\mathbb{D}^N$ (*вес*). Весовое пространство $H_v^\infty(\mathbb{D}^N) = H_v^\infty$ состоит из всех $f \in H(\mathbb{D}^N)$ таких, что

$$\|f\|_{H_v^\infty} = \sup_{z \in \mathbb{D}^N} v(z)|f(z)| < \infty.$$

Очевидно, что $\|\cdot\|_{H_v^\infty}$ — норма на H_v^∞, которое с этой нормой становится банаховым пространством. Различные веса и соответственные им весовые пространства изучаются в [1–3] (см. также библиографию в них).

Пусть φ — голоморфное отображение $\mathbb{D}^N$ в себя, u — голоморфная функция на $\mathbb{D}^N$. Тогда весовой оператор композиции $W_{\varphi,u}$ на $H(\mathbb{D}^N)$ определяется следующим образом:

$$W_{\varphi,u} f(z) = u(z) f(\varphi(z)), \quad z \in \mathbb{D}^N.$$

Представляет интерес найти функциональную характеристику ситуаций, когда φ и u порождают ограниченные или компактные весовые операторы композиции. В недавно полученных результатах, касающихся весовых операторов композиции в $\mathbb{C}^N$ (см., например, [4–18] и библиографию в них), эти операторы рассмотрены в случае, когда одно из пространств весовое или пространство типа Блоха.

Пусть X, Y — топологические векторные пространства, топологии которых заданы инвариантными относительно сдвига метриками d_X и d_Y соответственно, и $L : X \to Y$ — линейный оператор. Будем говорить, что L *метрически ограниченный*, если существует положительная постоянная K такая, что

$$d_Y(Lf, 0) \le K d_X(f, 0)$$

для всех $f \in X$. Если X и Y — банаховы пространства, то метрическая ограниченность совпадает с обычной ограниченностью операторов, действующих между банаховыми пространствами.

Напомним, что оператор $L : X \to Y$ *метрически компактен*, если он отображает ограниченные множества в относительно компактные множества. Если X и Y — банаховы пространства, то метрическая компактность совпадает с обычной компактностью. В этом случае если $L : X \to Y$ — ограниченный линейный оператор, то существенная норма оператора $L : X \to Y$, обозначаемая через $\|L\|_{e,X\to Y}$, определяется следующим образом:

$$\|L\|_{e,X\to Y} = \inf\{\|L + K\|_{X\to Y} : K \text{ компактный из } X \text{ в } Y\},$$

где $\|\cdot\|_{X\to Y}$ — норма оператора. В силу этого определения и того, что множество всех компактных операторов является замкнутым подмножеством в пространстве ограниченных операторов, оператор L компактен тогда и только тогда, когда $\|L\|_{e,X\to Y} = 0$. Результаты на эту тему см. в [5, 9, 11, 14, 17, 19].

Пусть φ_1 и φ_2 — непостоянные голоморфные отображения $\mathbb{D}^N$ в себя и $u_1, u_2 \in H(\mathbb{D}^N)$. Разности весовых операторов композиции на $H(\mathbb{D}^N)$ определяются следующим образом:

$$(W_{\varphi_1,u_1} - W_{\varphi_2,u_2})(f)(z) = u_1(z) f(\varphi_1(z)) - u_2(z) f(\varphi_2(z)), \quad z \in \mathbb{D}^N.$$

В последнее время возник интерес к изучению разностей весовых операторов композиции на единичном круге (см., например, [5, 20–22] и библиографию в них). Эта проблема в $\mathbb{C}^N$ изучена в немногих работах (см. [14]).

В данной статье мы изучаем ограниченность и компактность разностей весовых операторов композиции из весового пространства Бергмана $A^p_{\vec{\alpha}}(\mathbb{D}^N)$ в пространство весового типа $H^\infty_v(\mathbb{D}^N)$. Статья может рассматриваться как продолжение нашего исследования таких операторов на единичном поликруге (см. [6–8, 15]).

Всюду далее постоянные обозначаются через C, положительны и могут быть различными. Запись $a \preceq b$ означает, что существует положительная постоянная C такая, что $a \le Cb$. При этом если $a \preceq b$ и $b \preceq a$, то пишем $a \asymp b$ и говорим, что a *асимптотически эквивалентна* b.

2. Вспомогательные результаты

Для того чтобы работать с разностями весовых операторов композиции, необходима псевдогиперболическая метрика на единичном поликруге $\mathbb{D}^N$. Напомним, что для $w \in \mathbb{D}$ *инволютивный автоморфизм* единичного круга $\mathbb{D}$, отображающий w в 0, задается формулой

$$\sigma_w(z) = \frac{w-z}{1-\overline{w}z} \quad \text{для всех } z \in \mathbb{D}.$$

Метрика Бергмана на поликруге определена следующим образом:

$$H_z(u,\bar{v}) = \sum_{j=1}^N \frac{u_j \bar{v}_j}{(1-|z_j|^2)^2},$$

где $u, v \in \mathbb{D}^N$ и $z \in \mathbb{D}^N$.

Если $\gamma : [0,1] \to \mathbb{D}^N$ — кусочно гладкая кривая, то ее длина в метрике Бергмана равна

$$l(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{H_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \overline{\gamma'(t)})}\, dt.$$

Функция расстояния Бергмана между $z, w \in \mathbb{D}^N$ определена следующим образом:

$$\beta_{\mathbb{D}^N}(z,w) = \inf\{l(\gamma) : \gamma : [0,1] \to \mathbb{D}^N,\ \gamma \text{ кусочно гладкая},\ \gamma(0) = z,\ \gamma(1) = w\}.$$

Известно, что

$$\beta_{\mathbb{D}^N}(z,w) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sum_{j=1}^N \left(\ln \frac{1+|\sigma_{w_j}(z_j)|}{1-|\sigma_{w_j}(z_j)|} \right)^2 \right)^{1/2}.$$

Метрика $\beta_{\mathbb{D}^N}(z,w)$ эквивалентна следующей, более удобной для нашего исследования метрике:

$$\hat{\beta}_{\mathbb{D}^N}(z,w) = \ln \frac{1+\rho_{\mathbb{D}^N}(z,w)}{1-\rho_{\mathbb{D}^N}(z,w)},$$

где

$$\rho_{\mathbb{D}^N}(z,w) = \max_{1 \le j \le N} |\sigma_{w_j}(z_j)|,$$

$z = (z_1, \dots, z_N)$, $w = (w_1, \dots, w_N) \in \mathbb{D}^N$. Определенная таким образом функция $\rho_{\mathbb{D}^N}(z,w)$ является псевдогиперболической метрикой на единичном поликруге $\mathbb{D}^N$. Далее будем обозначать ее просто через $\rho(z,w)$.

Пусть $f \in H(\mathbb{D}^N)$. Тогда для $z \in \mathbb{D}^N$ положим

$$Q_f(z) = \sup_{u \in \mathbb{C}^N \setminus \{0\}} \frac{|\langle \nabla f(z), \bar{u} \rangle|}{\sqrt{H_z(u, \bar{u})}}.$$

Известно [4], что

$$Q_f(z) = \left(\sum_{j=1}^{N} \left((1 - |z_j|^2) \left| \frac{\partial f}{\partial z_j}(z) \right| \right)^2 \right)^{1/2}. \tag{1}$$

Будем говорить, что функция $f \in H(\mathbb{D}^N)$ *принадлежит пространству Блоха* $\mathscr{B}(\mathbb{D}^N)$, если

$$\beta_f = \sup_{z \in \mathbb{D}^N} Q_f(z) < \infty.$$

В этом разделе докажем несколько вспомогательных результатов, которые будут использованы при доказательстве основных результатов статьи.

Доказательство следующей леммы стандартно, поэтому может быть опущено (см., например, [5, предложение 3.11; 8, лемма 3]).

Лемма 1. *Пусть $p > 0$, $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$, $\alpha_j > -1$, $j = 1, \dots, N$, v — вес на $\mathbb{D}^N$, φ_1, φ_2 — голоморфные отображения $\mathbb{D}^N$ в себя, u_1, u_2 — голоморфные функции на $\mathbb{D}^N$ и оператор $W_{\varphi_1,u_1} - W_{\varphi_2,u_2} : A^p_{\vec{\alpha}} \to H^\infty_v$ метрически ограничен. Тогда оператор $W_{\varphi_1,u_1} - W_{\varphi_2,u_2} : A^p_{\vec{\alpha}} \to H^\infty_v$ метрически компактен, если и только если*

$$\lim_{n \to \infty} \|(W_{\varphi_1,u_1} - W_{\varphi_2,u_2}) f_n\|_{H^\infty_v} = 0$$

для любой ограниченной последовательности $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ в $A^p_{\vec{\alpha}}$ такой, что $f_n \to 0$ равномерно на любом компактном подмножестве $\mathbb{D}^N$ при $n \to \infty$.

Следующая лемма доказывается аналогично следствию 3.5 из [23] (см. также [12, лемма 2]).

Лемма 2. *Пусть $p > 0$, $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$, $\alpha_j > -1$, $j = 1, \dots, N$. Тогда для всех $f \in A^p_{\vec{\alpha}}$ и $z = (z_1, \dots, z_N) \in \mathbb{D}^N$ верно следующее неравенство:*

$$|f(z)| \leq \frac{\|f\|_{A^p_{\vec{\alpha}}}}{\prod_{j=1}^{N} (1 - |z_j|^2)^{\frac{\alpha_j + 2}{p}}}. \tag{2}$$

Из леммы 2 и интегральной формулы Коши легко следует

Лемма 3. *Пусть $p > 0$, $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$, $\alpha_j > -1$, $j = 1, \dots, N$. Тогда для всех $f \in A^p_{\vec{\alpha}}$, $z = (z_1, \dots, z_N) \in \mathbb{D}^N$ и $k \in \{1, \dots, N\}$ найдется постоянная $C > 0$, не зависящая от f, такая, что*

$$\left| \frac{\partial f}{\partial z_k}(z) \right| \leq \frac{C \|f\|_{A^p_{\vec{\alpha}}}}{\prod_{j=1}^{N} (1 - |z_j|^2)^{\frac{\alpha_j + 2}{p} + \delta_j^k}}, \tag{3}$$

где δ_j^k — δ-символ Кронекера.

Следующая лемма доказана в [12, теорема 3] (см. также [13]).

Лемма 4. *Пусть v — вес на $\mathbb{D}^N$, φ — голоморфное отображение $\mathbb{D}^N$ в себя и $u \in H(\mathbb{D}^N)$. Тогда оператор $W_{\varphi,u} : A^p_{\vec{\alpha}} \to H^\infty_v$ метрически ограничен, если и только если*

$$M := \sup_{z\in\mathbb{D}^N} \frac{v(z)|u(z)|}{\prod\limits_{l=1}^N (1-|\varphi_l(z)|^2)^{\frac{\alpha_l+2}{p}}} < \infty. \tag{4}$$

При этом если оператор $W_{\varphi,u} : A^p_{\vec{\alpha}} \to H^\infty_v$ ограничен, то

$$\|W_{\varphi,u}\|_{A^p_{\vec{\alpha}}\to H^\infty_v} = M.$$

Лемма 5. *Существует постоянная $C > 0$ такая, что*

$$\left|\prod_{j=1}^N (1-|z_j|^2)^{\frac{\alpha_j+2}{p}} f(z) - \prod_{j=1}^N (1-|w_j|^2)^{\frac{\alpha_j+2}{p}} f(w)\right| \le C\|f\|_{A^p_{\vec{\alpha}}}\rho(z,w) \tag{5}$$

для всех $f \in A^p_{\vec{\alpha}}$ и $z, w \in \mathbb{D}^N$.

Доказательство. Пусть $z, w \in \mathbb{D}^N$ таковы, что $\rho(z,w) \le 1/2$, $\gamma(t) = (\gamma_1(t),\dots,\gamma_N(t))$, $t \in [0,1]$, C^1 — кусочно гладкая кривая $\mathbb{D}^N$, соединяющая точки z и w. В силу (1) после некоторых вычислений получаем

$$\begin{aligned}
&\left|\prod_{j=1}^N (1-|z_j|^2)^{\frac{\alpha_j+2}{p}} f(z) - \prod_{j=1}^N (1-|w_j|^2)^{\frac{\alpha_j+2}{p}} f(w)\right| \\
&\quad = \left|\int_0^1 d\left(\prod_{j=1}^N (1-|\gamma_j(t)|^2)^{\frac{\alpha_j+2}{p}} f(\gamma(t))\right)\right| \\
&\quad = \Bigg|\int_0^1 \prod_{j=1}^N (1-|\gamma_j(t)|^2)^{\frac{\alpha_j+2}{p}} \sum_{j=1}^N \frac{\partial f}{\partial z_j}(\gamma(t))\gamma_j'(t)\,dt \\
&\quad - \int_0^1 f(\gamma(t)) \sum_{l=1}^N \frac{\alpha_l+2}{p} \prod_{j=1}^N (1-|\gamma_j(t)|^2)^{\frac{\alpha_j+2}{p}-\delta_j^l}(\gamma_l'(t)\overline{\gamma_l(t)} + \gamma_l(t)\overline{\gamma_l'(t)})dt\Bigg| \\
&\quad \le \int_0^1 \prod_{j=1}^N (1-|\gamma_j(t)|^2)^{\frac{\alpha_j+2}{p}} |\langle(\nabla f)(\gamma(t)), \overline{\gamma'(t)}\rangle|\,dt \\
&\quad + \sum_{l=1}^N \frac{\alpha_l+2}{p} \int_0^1 |f(\gamma(t))| \prod_{j=1}^N (1-|\gamma_j(t)|^2)^{\frac{\alpha_j+2}{p}} \frac{2|\operatorname{Re}(\gamma_l'(t)\overline{\gamma_l(t)})|}{1-|\gamma_l(t)|^2}\,dt \\
&\quad \le \int_0^1 \prod_{j=1}^N (1-|\gamma_j(t)|^2)^{\frac{\alpha_j+2}{p}} Q_f(\gamma(t))\sqrt{H_{\gamma(t)}(\gamma'(t),\overline{\gamma'(t)})}\,dt \\
&\quad + 2\max_{1\le j\le N}\left\{\frac{\alpha_j+2}{p}\right\}\|f\|_{A^p_{\vec{\alpha}}} \int_0^1 \sum_{l=1}^N \frac{|\gamma_l'(t)|}{1-|\gamma_l(t)|^2}\,dt \\
&\le \int_0^1 \prod_{j=1}^N (1-|\gamma_j(t)|^2)^{\frac{\alpha_j+2}{p}} \left(\sum_{j=1}^N \left(\left|\frac{\partial f}{\partial z_j}(\gamma(t))\right|(1-|\gamma_j(t)|^2)\right)^2\right)^{1/2} \sqrt{H_{\gamma(t)}(\gamma'(t),\overline{\gamma'(t)})}\,dt
\end{aligned}$$

$$+ 2\sqrt{N}\max_{1\le j\le N}\left\{\frac{\alpha_j+2}{p}\right\}\|f\|_{A^p_{\vec\alpha}}\int\limits_0^1\left(\sum_{l=1}^N\frac{|\gamma_l'(t)|^2}{(1-|\gamma_l(t)|^2)^2}\right)^{1/2}dt$$

$$\le C\|f\|_{A^p_{\vec\alpha}}\int\limits_0^1\sqrt{H_{\gamma(t)}(\gamma'(t),\overline{\gamma'(t)})}\,dt, \quad (6)$$

где в последнем неравенстве использована лемма 3.

Находя в (6) инфимум по всем таким кривым, имеем

$$\left|\prod_{j=1}^N(1-|z_j|^2)^{\frac{\alpha_j+2}{p}}f(z)-\prod_{j=1}^N(1-|w_j|^2)^{\frac{\alpha_j+2}{p}}f(w)\right|\le C\|f\|_{A^p_{\vec\alpha}}\beta_{\mathbb{D}^N}(z,w). \quad (7)$$

Поскольку

$$\frac12\ln\frac{1+x}{1-x}=\sum_{j=0}^\infty\frac{x^{2j+1}}{2j+1}<x\sum_{j=0}^\infty x^{2j}=\frac{x}{1-x^2}$$

для $x\in(0,1)$, в силу (7) в этом случае получим

$$\hat\beta_{\mathbb{D}^N}(z,w)\le\frac83\rho(z,w). \quad (8)$$

Из (7) и (8) при $\rho(z,w)\le 1/2$ легко следует неравенство (5).

Предположим теперь, что $\rho(z,w)>1/2$. Тогда по лемме 2 получаем неравенство

$$\left|\prod_{j=1}^N(1-|z_j|^2)^{\frac{\alpha_j+2}{p}}f(z)-\prod_{j=1}^N(1-|w_j|^2)^{\frac{\alpha_j+2}{p}}f(w)\right|$$

$$\le 2\|f\|_{H^\infty_{\prod_{j=1}^N(1-|z_j|^2)^{(\alpha_j+2)/p}}}\le 4\|f\|_{A^p_{\vec\alpha}}\rho(z,w), \quad (9)$$

равносильное неравенству (5) в этом случае, что и завершает доказательство леммы. □

Лемма 6. *Для любой последовательности $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ в $\mathbb{D}^N$ такой, что $w_n\to w\in\mathbb{T}^N$ при $n\to\infty$, существуют ее подпоследовательность $(w_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$ и функции $f_{n_k}\in H^\infty(\mathbb{D}^N)$, $k\in\mathbb{N}$, такие, что*

$$\sum_{k=1}^\infty|f_{n_k}(z)|\le 1\quad \textit{для всех } z\in\mathbb{D}^N \quad (10)$$

и

$$f_{n_k}(w_{m_k})>1-\frac{1}{2^k},\quad k\in\mathbb{N}. \quad (11)$$

Доказательство. Положим

$$f(z)=\frac{z_1+\dots+z_N+1}{N+1},\quad z\in\mathbb{D}^N.$$

Пусть $e_N=(1,\dots,1)$. Тогда

$$f(e_N)=1, \quad (12)$$

$$|f|<1\quad\text{на } \overline{\mathbb{D}^N}\setminus\{e_N\}. \quad (13)$$

Пусть

$$g(z) = \frac{N - z_1 - \cdots - z_N}{2N}, \quad z \in \mathbb{D}^N,$$

и $g_n(z) = g^{\frac{1}{n}}(z)$, $z \in \mathbb{D}^N$. Тогда $\|g_n\|_\infty = 1$, $g_n(e_N) = 0$ и

$$\lim_{n\to\infty} |g_n(z)| = 1 \quad \text{для любого } z \in \mathbb{D}^N. \tag{14}$$

Без ограничения общности можно предположить, что $w_n \to e_N$ при $n \to \infty$. Иначе если $w_n \to \zeta \in \mathbb{T}^N$ при $n \to \infty$, то рассмотрим функции $f_{n_k}(\langle z, e^{i\vec{\theta}}\rangle)$, где $e^{i\vec{\theta}} = (e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_N})$ такое, что $\langle \zeta, e^{i\vec{\theta}}\rangle = e_N$. По индукции построим две последовательности $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ и $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ положительных целых чисел, последовательность комплексных чисел $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $|c_k| \le 1$, $k \in \mathbb{N}$, и подпоследовательность $(w_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$ в $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ такие, что

$$\sup_{z\in\overline{\mathbb{D}^N}} \sum_{k=1}^{L} |c_k f^{m_k}(z) g_{n_k}(z)| < 1 \quad \text{для любого } L \in \mathbb{N}, \tag{15}$$

$$c_L f^{m_L}(w_{m_L}) g_{n_k}(w_{m_L}) > 1 - \frac{1}{2^L}. \tag{16}$$

Сначала положим $m_1 = 1$. В силу (12) и (13) существует $w_{m_1} \in (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ такое, что $|f(w_{m_1})| > \frac{1}{2}$. Ввиду (14) найдется $n_1 \in \mathbb{N}$ такое, что

$$|f^{m_1}(w_{m_1}) g_{n_1}(w_{m_1})| > \frac{1}{2}.$$

Возьмем комплексное число c_1 такое, что $c_1(f^{m_1}g_{n_1})(w_{m_1}) = |(f^{m_1}g_{n_1})(w_{m_1})|$ (заметим, что $|c_1| = 1$). Тем самым (15) и (16) верны для $L = 1$.

Предположим, что $(m_k)_{k=1}^L$, $(n_k)_{k=1}^L$, $(c_k)_{k=1}^L$ и $(w_{m_k})_{k=1}^L$ удовлетворяют нашим условиям. На замыкании $\mathbb{D}^N$ определим функцию

$$F_L(z) = \sum_{k=1}^{L} |c_k f^{m_k}(z) g_{n_k}(z)|, \quad z \in \overline{\mathbb{D}^N}.$$

По определению g_n имеем $F_L(e_N) = 0$. Возьмем открытое $U \subset \mathbb{D}^N$ такое, что $e_N \in \overline{U}$, $\{w_{m_1}, \dots, w_{m_L}\} \cap U = \varnothing$ (например, $U = \bigotimes_{j=1}^{N} (\mathbb{D} \cap D(1, \varepsilon(1 - \max_{1\le s\le L} |w_{m_s}|)))$ для достаточно малых $\varepsilon > 0$) и

$$F_L(z) < \frac{1}{2^{L+2}} \quad \text{для всех } z \in \overline{U}. \tag{17}$$

В силу (12), (13) и (15) существует m_{L+1} такое, что $m_L < m_{L+1}$,

$$|f^{m_{L+1}}(z)| < \frac{1}{2^{L+1}} \quad \text{и} \quad F_L(z) + |f^{m_{L+1}}(z)| < 1 \quad \text{для всех } z \in \overline{\mathbb{D}^N \setminus U}. \tag{18}$$

Поскольку $f(w_n) \to 1$ при $n \to \infty$, существует точка $w_{m_{L+1}}$ в $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \cap U$ такая, что

$$|f^{m_{L+1}}(w_{m_{L+1}})| > \frac{1 - \frac{1}{2^{L+1}}}{1 - \frac{1}{2^{L+2}}}. \tag{19}$$

Отсюда и из (14) следует, что найдется $n_{L+1} > n_L$ такое, что

$$|f^{m_{L+1}}(w_{m_{L+1}}) g_{n_{L+1}}(w_{m_{L+1}})| > \frac{1 - \frac{1}{2^{L+1}}}{1 - \frac{1}{2^{L+2}}}. \tag{20}$$

В силу (17), (18) и определения $g_{n_{L+1}}$ получим

$$\sup_{z\in\overline{\mathbb{D}^N}}\left[F_L(z)+\left(1-\frac{1}{2^{L+2}}\right)|(f^{m_{L+1}}g_{n_{L+1}})(z)|\right]<1. \tag{21}$$

Возьмем комплексное число b_{L+1} такое, что

$$b_{L+1}\left(1-\frac{1}{2^{L+2}}\right)(f^{m_{L+1}}g_{n_{L+1}})(w_{m_{L+1}})=\left(1-\frac{1}{2^{L+2}}\right)|(f^{m_{L+1}}g_{n_{L+1}})(w_{m_{L+1}})|. \tag{22}$$

Положим $c_{L+1}=b_{L+1}(1-1/2^{L+2})$, тогда $|c_{L+1}|=1-2^{-(L+2)}$. Отсюда для таким образом выбранного c_{L+1} из (21) следует, что (15) верно для $L+1$.

С другой стороны, из (20) и (22) имеем

$$c_{L+1}(f^{m_{L+1}}g_{n_{L+1}})(w_{m_{L+1}})=\left(1-\frac{1}{2^{L+2}}\right)|(f^{m_{L+1}}g_{n_{L+1}})(w_{m_{L+1}})|>1-\frac{1}{2^{L+1}}.$$

Значит, (16) верно для $L+1$. Тем самым с помощью индукции требуемое доказано. Искомая последовательность имеет вид

$$f_{n_k}(z)=c_kf^{m_k}(z)g_{n_k}(z),\quad k\in\mathbb{N}.\quad\square$$

3. Основные результаты

Сформулируем и докажем основные результаты статьи.

Теорема 1. *Пусть $p>0$, $\vec{\alpha}=(\alpha_1,\dots,\alpha_N)$, $\alpha_j>-1$, $j=1,\dots,N$, v — вес на $\mathbb{D}^N$, $\varphi_l=(\varphi_{l1},\dots,\varphi_{lN})$, $l=1,2$, — голоморфные отображения $\mathbb{D}^N$ в себя и u_1, u_2 — голоморфные функции на $\mathbb{D}^N$. Тогда оператор $W_{\varphi_1,u_1}-W_{\varphi_2,u_2}:A^p_{\vec{\alpha}}\to H^\infty_v$ метрически ограничен, если и только если*

$$M_1:=\sup_{z\in\mathbb{D}^N}\left|\frac{v(z)u_1(z)}{\prod\limits_{j=1}^N(1-|\varphi_{1j}(z)|^2)^{\frac{\alpha_j+2}{p}}}-\frac{v(z)u_2(z)}{\prod\limits_{j=1}^N(1-|\varphi_{2j}(z)|^2)^{\frac{\alpha_j+2}{p}}}\right|<\infty \tag{23}$$

и выполнено одно из следующих условий:

$$M_2:=\sup_{z\in\mathbb{D}^N}\frac{v(z)|u_1(z)|}{\prod\limits_{j=1}^N(1-|\varphi_{1j}(z)|^2)^{\frac{\alpha_j+2}{p}}}\rho(\varphi_1(z),\varphi_2(z))<\infty; \tag{24}$$

$$M_3:=\sup_{z\in\mathbb{D}^N}\frac{v(z)|u_2(z)|}{\prod\limits_{j=1}^N(1-|\varphi_{2j}(z)|^2)^{\frac{\alpha_j+2}{p}}}\rho(\varphi_1(z),\varphi_2(z))<\infty. \tag{25}$$

Доказательство. Заметим, что в силу неравенств

$$\frac{v(z)|u_1(z)|}{\prod\limits_{j=1}^N(1-|\varphi_{1j}(z)|^2)^{\frac{\alpha_j+2}{p}}}\rho(\varphi_1(z),\varphi_2(z))\le\frac{v(z)|u_2(z)|}{\prod\limits_{j=1}^N(1-|\varphi_{2j}(z)|^2)^{\frac{\alpha_j+2}{p}}}\,\rho(\varphi_1(z),\varphi_2(z))$$
$$+\left|\frac{v(z)u_1(z)}{\prod\limits_{j=1}^N(1-|\varphi_{1j}(z)|^2)^{\frac{\alpha_j+2}{p}}}-\frac{v(z)u_2(z)}{\prod\limits_{j=1}^N(1-|\varphi_{2j}(z)|^2)^{\frac{\alpha_j+2}{p}}}\right|,$$

$$\frac{v(z)|u_2(z)|}{\prod_{j=1}^{N}(1-|\varphi_{2j}(z)|^2)^{\frac{\alpha_j+2}{p}}}\rho(\varphi_1(z),\varphi_2(z)) \le \frac{v(z)|u_1(z)|}{\prod_{j=1}^{N}(1-|\varphi_{1j}(z)|^2)^{\frac{\alpha_j+2}{p}}}\rho(\varphi_1(z),\varphi_2(z))$$
$$+\left|\frac{v(z)u_1(z)}{\prod_{j=1}^{N}(1-|\varphi_{1j}(z)|^2)^{\frac{\alpha_j+2}{p}}}-\frac{v(z)u_2(z)}{\prod_{j=1}^{N}(1-|\varphi_{2j}(z)|^2)^{\frac{\alpha_j+2}{p}}}\right|,$$

условия (23), (24) эквивалентны условиям (23), (25).

Пусть выполнены (23) и (25). Тогда для любой $f \in A^p_{\vec{\alpha}}$ по леммам 2 и 5 имеем

$$v(z)|W_{\varphi_1,u_1}f(z)-W_{\varphi_2,u_2}f(z)| = v(z)|u_1(z)f(\varphi_1(z))-u_2(z)f(\varphi_2(z))|$$
$$\le \prod_{j=1}^{N}(1-|\varphi_{1j}(z)|^2)^{\frac{\alpha_j+2}{p}}|f(\varphi_1(z))|$$
$$\times\left|\frac{v(z)u_1(z)}{\prod_{j=1}^{N}(1-|\varphi_{1j}(z)|^2)^{\frac{\alpha_j+2}{p}}}-\frac{v(z)u_2(z)}{\prod_{j=1}^{N}(1-|\varphi_{2j}(z)|^2)^{\frac{\alpha_j+2}{p}}}\right|+\frac{v(z)|u_2(z)|}{\prod_{j=1}^{N}(1-|\varphi_{2j}(z)|^2)^{\frac{\alpha_j+2}{p}}}$$
$$\times\left|\prod_{j=1}^{N}(1-|\varphi_{1j}(z)|^2)^{\frac{\alpha_j+2}{p}}f(\varphi_1(z))-\prod_{j=1}^{N}(1-|\varphi_{2j}(z)|^2)^{\frac{\alpha_j+2}{p}}f(\varphi_2(z))\right|$$
$$\le (M_1+CM_3)\|f\|_{A^p_{\vec{\alpha}}},$$

откуда следует ограниченность $W_{\varphi_1,u_1}-W_{\varphi_2,u_2}: A^p_{\vec{\alpha}} \to H^\infty_v$.

Теперь предположим, что $W_{\varphi_1,u_1}-W_{\varphi_2,u_2}: A^p_{\vec{\alpha}} \to H^\infty_v$ ограничен. Пусть

$$k_{\varphi_1(\zeta)}(z)=\prod_{j=1}^{N}\frac{(1-|\varphi_{1j}(\zeta)|^2)^{\frac{\alpha_j+2}{p}}}{(1-\overline{\varphi_{1j}(\zeta)}z_j)^{\frac{2\alpha_j+4}{p}}},\quad \zeta\in\mathbb{D}^N.$$

Известно, что $\|k_{\varphi_1(\zeta)}\|_{A^p_{\vec{\alpha}}}=1$ для всех $\zeta\in\mathbb{D}^N$. Положим

$$F_\zeta(z)=\sigma_{\varphi_{2j}(\zeta)}(z_j)k_{\varphi_1(\zeta)}(z),\quad \zeta\in\mathbb{D}^N,$$

для фиксированного j, $1\le j\le N$. Очевидно, что

$$\sup_{\zeta\in\mathbb{D}^N}\|F_\zeta\|_{A^p_{\vec{\alpha}}}\le 1. \tag{26}$$

Ограниченность $W_{\varphi_1,u_1}-W_{\varphi_2,u_2}: A^p_{\vec{\alpha}} \to H^\infty_v$ вместе с (26) влечет

$$\|W_{\varphi_1,u_1}-W_{\varphi_2,u_2}\|_{A^p_{\vec{\alpha}}\to H^\infty_v} \ge \|W_{\varphi_1,u_1}F_\zeta-W_{\varphi_2,u_2}F_\zeta\|_{H^\infty_v}$$
$$=\sup_{z\in\mathbb{D}^N}v(z)|u_1(z)F_\zeta(\varphi_1(z))-u_2(z)F_\zeta(\varphi_2(z))|$$
$$\ge v(\zeta)|u_1(\zeta)F_\zeta(\varphi_1(\zeta))-u_2(\zeta)F_\zeta(\varphi_2(\zeta))|$$
$$\ge v(\zeta)|u_1(\zeta)||\sigma_{\varphi_{2j}(\zeta)}(\varphi_{1j}(\zeta))||k_{\varphi_1(\zeta)}(\varphi_1(\zeta))|$$
$$=\frac{v(\zeta)|u_1(\zeta)|}{\prod_{j=1}^{N}(1-|\varphi_{1j}(z)|^2)^{\frac{\alpha_j+2}{p}}}|\sigma_{\varphi_{2j}(\zeta)}(\varphi_{1j}(\zeta))|. \tag{27}$$

Находя супремум в (27) по $\mathbb{D}^N$, а затем максимум при $j \in \{1, \dots, N\}$, убеждаемся, что условие (24) выполнено.

Взяв тестовые функции $k_{\varphi_2(\zeta)} \in A^p_{\vec{\alpha}}$ и используя ограниченность $W_{\varphi_1,u_1} - W_{\varphi_2,u_2} : A^p_{\vec{\alpha}} \to H^\infty_v$, в силу леммы 5 получим

$$\|W_{\varphi_1,u_1} - W_{\varphi_2,u_2}\|_{A^p_{\vec{\alpha}} \to H^\infty_v} \geq \|W_{\varphi_1,u_1} k_{\varphi_2(\zeta)} - W_{\varphi_2,u_2} k_{\varphi_2(\zeta)}\|_{H^\infty_v}$$
$$= \sup_{z \in \mathbb{D}^N} v(z)|u_1(z) k_{\varphi_2(\zeta)}(\varphi_1(z)) - u_2(z) k_{\varphi_2(\zeta)}(\varphi_2(z))|$$
$$\geq v(\zeta) \left| \frac{u_1(\zeta)}{\prod\limits_{j=1}^N (1 - |\varphi_{1j}(z)|^2)^{\frac{\alpha_j+2}{p}}} - \frac{u_2(\zeta)}{\prod\limits_{j=1}^N (1 - |\varphi_{2j}(z)|^2)^{\frac{\alpha_j+2}{p}}} \right| - \frac{v(\zeta)|u_1(\zeta)|}{\prod\limits_{j=1}^N (1 - |\varphi_{1j}(z)|^2)^{\frac{\alpha_j+2}{p}}}$$
$$\times \left| \prod_{j=1}^N (1 - |\varphi_{2j}(z)|^2)^{\frac{\alpha_j+2}{p}} k_{\varphi_2(\zeta)}(\varphi_2(\zeta)) - \prod_{j=1}^N (1 - |\varphi_{1j}(z)|^2)^{\frac{\alpha_j+2}{p}} k_{\varphi_2(\zeta)}(\varphi_1(\zeta)) \right|$$
$$\geq v(\zeta) \left| \frac{u_1(\zeta)}{\prod\limits_{j=1}^N (1 - |\varphi_{1j}(z)|^2)^{\frac{\alpha_j+2}{p}}} - \frac{u_2(\zeta)}{\prod\limits_{j=1}^N (1 - |\varphi_{2j}(z)|^2)^{\frac{\alpha_j+2}{p}}} \right| - M_2 C$$

для всех $\zeta \in \mathbb{D}^N$, откуда, очевидно, следует условие (23) что и завершает доказательство теоремы. $\square$

Теорема 2. *Пусть $p > 0$, $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$, $\alpha_j > -1$, $j = 1, \dots, N$, v — вес на $\mathbb{D}^N$, $\varphi_l = (\varphi_{l1}, \dots, \varphi_{lN})$, $l = 1, 2$, — голоморфные отображения $\mathbb{D}^N$ в себя, u_1, u_2 — голоморфные функции на $\mathbb{D}^N$ и W_{φ_1,u_1}, $W_{\varphi_2,u_2} : A^p_{\vec{\alpha}} \to H^\infty_v$ — метрически ограниченные операторы. Тогда оператор $W_{\varphi_1,u_1} - W_{\varphi_2,u_2} : A^p_{\vec{\alpha}} \to H^\infty_v$ метрически компактен, если и только если удовлетворены следующие условия:*

(a) *выполнено равенство*

$$\lim_{\varphi_1(z) \to \mathbb{T}^N} \frac{v(z)|u_1(z)|}{\prod\limits_{j=1}^N (1 - |\varphi_{1j}(z)|^2)^{\frac{\alpha_j+2}{p}}} \rho(\varphi_1(z), \varphi_2(z)) = 0;$$

(b) *выполнено равенство*

$$\lim_{\varphi_2(z) \to \mathbb{T}^N} \frac{v(z)|u_2(z)|}{\prod\limits_{j=1}^N (1 - |\varphi_{2j}(z)|^2)^{\frac{\alpha_j+2}{p}}} \rho(\varphi_1(z), \varphi_2(z)) = 0;$$

(c) *выполнено равенство*

$$\lim_{\substack{\varphi_1(z) \to \mathbb{T}^N \\ \varphi_2(z) \to \mathbb{T}^N}} \left| \frac{v(z) u_1(z)}{\prod\limits_{j=1}^N (1 - |\varphi_{1j}(z)|^2)^{\frac{\alpha_j+2}{p}}} - \frac{v(z) u_2(z)}{\prod\limits_{j=1}^N (1 - |\varphi_{2j}(z)|^2)^{\frac{\alpha_j+2}{p}}} \right| = 0.$$

Доказательство. Предположим сначала, что оператор $W_{\varphi_1,u_1} - W_{\varphi_2,u_2} : A^p_{\vec{\alpha}} \to H^\infty_v$ метрически компактен. Если $\|\varphi_{1j}\|_\infty < 1$ для некоторого j, то (a), очевидно, выполнено. Поэтому положим $\|\varphi_{1j}\|_\infty = 1$, $j = 1, \dots, N$. Предположим, напротив, что (a) неверно. Тогда найдется последовательность $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ такая, что $\varphi_1(z_n) \to \mathbb{T}^N$ при $n \to \infty$ и

$$\lim_{n \to \infty} \frac{v(z_n)|u_1(z_n)|}{\prod\limits_{j=1}^N (1 - |\varphi_{1j}(z_n)|^2)^{\frac{\alpha_j+2}{p}}} \rho(\varphi_1(z_n), \varphi_2(z_n)) = \delta > 0. \tag{28}$$

Поскольку $\varphi_1(z_n) \to \mathbb{T}^N$ при $n \to \infty$, в силу леммы 6 для $(\varphi_1(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ можем предположить, что существуют функции $f_n \in H^\infty(\mathbb{D}^N)$, $n \in \mathbb{N}$, такие, что

$$\sum_{n=1}^\infty |f_n(z)| \le 1 \quad \text{для всех } z \in \mathbb{D}^N, \tag{29}$$

$$f_n(\varphi_1(z_n)) > 1 - \frac{1}{2^n}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{30}$$

Пусть

$$k_n(z) = \prod_{j=1}^N \frac{(1-|\varphi_{1j}(z_n)|^2)^{\frac{\alpha_j+2}{p}}}{(1-\overline{\varphi_{1j}(z_n)}z_j)^{\frac{2\alpha_j+4}{p}}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Известно, что $\|k_n\|_{A^p_{\vec\alpha}} = 1$ для любых $n \in \mathbb{N}$. Для фиксированного j, $1 \le j \le N$, положим

$$g_n^{(j)}(z) = f_n(z)\sigma_{\varphi_{2j}(z_n)}(z_j)k_n(z), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Очевидно, что $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\|g_n^{(j)}\|_{A^p_{\vec\alpha}} \le 1$ и $g_n^{(j)} \to 0$ равномерно на компактах в $\mathbb{D}^N$ при $n \to \infty$. Поскольку $W_{\varphi_1,u_1} - W_{\varphi_2,u_2} : A^p_{\vec\alpha} \to H_v^\infty$ метрически компактен, по лемме 1 получим

$$\lim_{n\to\infty}\|(W_{\varphi_1,u_1} - W_{\varphi_2,u_2})g_n^{(j)}\|_{H_v^\infty} = 0. \tag{31}$$

С другой стороны, по определению пространства H_v^∞ и функций $g_n^{(j)}$ в силу (30) имеем

$$\begin{aligned}\|(W_{\varphi_1,u_1} - W_{\varphi_2,u_2})g_n^{(j)}\|_{H_v^\infty} &\ge v(z_n)|u_1(z_n)g_n^{(j)}(\varphi_1(z_n)) - u_2(z_n)g_n^{(j)}(\varphi_2(z_n))| \\ &= v(z_n)|u_1(z_n)f_n(\varphi_1(z_n))\sigma_{\varphi_{2j}(z_n)}(\varphi_{1j}(z_n))k_n(\varphi_1(z_n))| \\ &\ge \frac{v(z_n)|u_1(z_n)|\,|\sigma_{\varphi_{2j}(z_n)}(\varphi_{1j}(z_n))|}{\prod_{j=1}^N(1-|\varphi_{1j}(z_n)|^2)^{\frac{\alpha_j+2}{p}}}\left(1-\frac{1}{2^n}\right).\end{aligned} \tag{32}$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$ в (32) и используя (28) и (31), приходим к противоречию. Тем самым для всех $j \in \{1,\dots,N\}$ верно

$$\lim_{n\to\infty}\frac{v(z_n)|u_1(z_n)|}{\prod_{j=1}^N(1-|\varphi_{1j}(z_n)|^2)^{\frac{\alpha_j+2}{p}}}|\sigma_{\varphi_{2j}(z_n)}(\varphi_{1j}(z_n))| = 0$$

для любой последовательности $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ такой, что $\varphi_1(z_n) \to \mathbb{T}^N$ при $n \to \infty$, откуда вытекает (a).

Условие (b) доказывается аналогично, поэтому его доказательство опускаем.

Докажем (c). Допустим, что (c) не выполнено. Тогда найдутся последовательность $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, для которой $\min\limits_{1\le j\le N}\{|\varphi_{1j}(z_n)|, |\varphi_{2j}(z_n)|\} \to 1$ при $n \to \infty$ и последовательности $(\varphi_1(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$, $(\varphi_2(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ сходятся, и $\beta > 0$ такое, что

$$\beta := \lim_{n\to\infty}\left|\frac{v(z_n)u_1(z_n)}{\prod_{j=1}^N(1-|\varphi_{1j}(z_n)|^2)^{\frac{\alpha_j+2}{p}}} - \frac{v(z_n)u_2(z_n)}{\prod_{j=1}^N(1-|\varphi_{2j}(z_n)|^2)^{\frac{\alpha_j+2}{p}}}\right|. \tag{33}$$

Пусть

$$l := \lim_{n\to\infty}\rho(\varphi_1(z_n), \varphi_2(z_n)) \ge 0. \tag{34}$$

Предположим, что $l > 0$. Тогда для достаточно больших n, скажем $n \geq n_0$,

$$0 < \frac{\beta}{2} \leq \left| \frac{v(z_n)u_1(z_n)}{\prod\limits_{j=1}^{N}(1-|\varphi_{1j}(z_n)|^2)^{\frac{\alpha_j+2}{p}}} - \frac{v(z_n)u_2(z_n)}{\prod\limits_{j=1}^{N}(1-|\varphi_{2j}(z_n)|^2)^{\frac{\alpha_j+2}{p}}} \right|$$
$$\leq \frac{2}{l}\Bigg(\frac{v(z_n)|u_1(z_n)|}{\prod\limits_{j=1}^{N}(1-|\varphi_{1j}(z_n)|^2)^{\frac{\alpha_j+2}{p}}} \rho(\varphi_1(z_n),\varphi_2(z_n))$$
$$+ \frac{v(z_n)|u_2(z_n)|}{\prod\limits_{j=1}^{N}(1-|\varphi_{2j}(z_n)|^2)^{\frac{\alpha_j+2}{p}}} \rho(\varphi_1(z_n),\varphi_2(z_n))\Bigg). \quad (35)$$

Переходя к пределу в (35) при $n \to \infty$ и используя (a) и (b), приходим к противоречию. Тем самым можно считать $l = 0$.

Пусть $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — функциональные последовательности, определенные выше. Положим

$$h_n(z) = f_n(z)k_n(z), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тогда $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|h_n\|_{A^p_{\vec{\alpha}}} \leq 1$ и $h_n \to 0$ равномерно на компактных подмножествах $\mathbb{D}^N$ при $n \to \infty$. Отсюда по лемме 1

$$\lim_{n\to\infty} \|(W_{\varphi_1,u_1} - W_{\varphi_2,u_2})h_n\|_{H^\infty_v} = 0. \quad (36)$$

Поскольку $W_{\varphi_2,u_2} : A^p_{\vec{\alpha}} \to H^\infty_v$ ограничен, в силу леммы 4 получим

$$M := \sup_{z\in\mathbb{D}^N} \frac{v(z)|u_2(z)|}{\prod\limits_{j=1}^{N}(1-|\varphi_{2j}(z)|^2)^{\frac{\alpha_j+2}{p}}} < \infty. \quad (37)$$

Имеем

$$\|(W_{\varphi_1,u_1} - W_{\varphi_2,u_2})h_n\|_{H^\infty_v} \geq v(z_n)|u_1(z_n)h_n(\varphi_1(z_n)) - u_2(z_n)h_n(\varphi_2(z_n))|$$
$$= v(z_n)|u_1(z_n)f_n(\varphi_1(z_n))k_n(\varphi_1(z_n)) - u_2(z_n)f_n(\varphi_2(z_n))k_n(\varphi_2(z_n))|$$
$$\geq v(z_n)\left| \frac{u_1(z_n)f_n(\varphi_1(z_n))}{\prod\limits_{j=1}^{N}(1-|\varphi_{1j}(z_n)|^2)^{\frac{\alpha_j+2}{p}}} - \frac{u_2(z_n)f_n(\varphi_1(z_n))}{\prod\limits_{j=1}^{N}(1-|\varphi_{2j}(z_n)|^2)^{\frac{\alpha_j+2}{p}}} \right|$$
$$- v(z_n)\left| \frac{u_2(z_n)f_n(\varphi_1(z_n))}{\prod\limits_{j=1}^{N}(1-|\varphi_{2j}(z_n)|^2)^{\frac{\alpha_j+2}{p}}} - u_2(z_n)f_n(\varphi_2(z_n))k_n(\varphi_2(z_n)) \right|$$
$$\geq v(z_n)\left| \frac{u_1(z_n)}{\prod\limits_{j=1}^{N}(1-|\varphi_{1j}(z_n)|^2)^{\frac{\alpha_j+2}{p}}} - \frac{u_2(z_n)}{\prod\limits_{j=1}^{N}(1-|\varphi_{2j}(z_n)|^2)^{\frac{\alpha_j+2}{p}}} \right| \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$$
$$- |u_2(z_n)| \frac{v(z_n)}{\prod\limits_{j=1}^{N}(1-|\varphi_{2j}(z_n)|^2)^{\frac{\alpha_j+2}{p}}}$$
$$\times \left| \prod_{j=1}^{N}(1-|\varphi_{1j}(z_n)|^2)^{\frac{\alpha_j+2}{p}} h_n(\varphi_1(z_n)) - \prod_{j=1}^{N}(1-|\varphi_{2j}(z_n)|^2)^{\frac{\alpha_j+2}{p}} h_n(\varphi_2(z_n)) \right|. \quad (38)$$

Применяя лемму 5 к функции h_n, $n \in \mathbb{N}$, для точек $z = \varphi_1(z_n)$ и $w = \varphi_2(z_n)$ в силу (37) и того, что $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\|h_n\|_{A^p_{\vec\alpha}}\le 1$, получим

$$\frac{v(z_n)|u_2(z_n)|}{\prod\limits_{j=1}^N(1-|\varphi_{2j}(z_n)|^2)^{\frac{\alpha_j+2}{p}}}\Bigg|\prod_{j=1}^N(1-|\varphi_{1j}(z_n)|^2)^{\frac{\alpha_j+2}{p}}h_n(\varphi_1(z_n))$$
$$-\prod_{j=1}^N(1-|\varphi_{2j}(z_n)|^2)^{\frac{\alpha_j+2}{p}}h_n(\varphi_2(z_n))\Bigg|\le CM\rho(\varphi_1(z_n),\varphi_2(z_n)). \quad (39)$$

Подставляя (39) в (38), переходя к пределу при $n\to\infty$ в полученном неравенстве и используя (36), имеем $\beta=0$; противоречие, доказывающее (c).

Теперь предположим, что выполнены условия (a)–(c). Пусть $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — ограниченная последовательность в $A^p_{\vec\alpha}$ такая, что $f_n\to 0$ равномерно на компактных подмножествах $\mathbb{D}^N$. Чтобы доказать, что $W_{\varphi_1,u_1}-W_{\varphi_2,u_2}:A^p_{\vec\alpha}\to H^\infty_v$ — метрически компактный оператор, в силу леммы 1 достаточно показать, что

$$\lim_{n\to\infty}\|(W_{\varphi_1,u_1}-W_{\varphi_2,u_2})f_n\|_{H^\infty_v}=0.$$

Пусть это неверно. Тогда для некоторого $\varepsilon>0$ существует подпоследовательность $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ последовательности $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ такая, что

$$\|(W_{\varphi_1,u_1}-W_{\varphi_2,u_2})f_{n_k}\|_{H^\infty_v}\ge 2\varepsilon>0$$

для всех $k\in\mathbb{N}$. Можем считать, что $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ есть сама последовательность $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Тогда найдется последовательность $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ в $\mathbb{D}^N$ такая, что

$$v(z_n)|u_1(z_n)f_n(\varphi_1(z_n))-u_2(z_n)f_n(\varphi_2(z_n))|\ge\varepsilon>0,\quad n\in\mathbb{N}. \quad (40)$$

Можем также предположить, что последовательности $(\varphi_1(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ и $(\varphi_2(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ сходятся. Если

$$\lim_{n\to\infty}\max_{1\le j\le N}\{|\varphi_{1j}(z_n)|,|\varphi_{2j}(z_n)|\}=q<1,$$

то в силу (40) приходим к противоречию, поскольку для тестовых функций $f(z)\equiv 1\in A^p_{\vec\alpha}$ из ограниченности операторов $W_{\varphi_i,u_i}:A^p_{\vec\alpha}\to H^\infty_v$, $i=1,2$, следует, что $u_1,u_2\in H^\infty_v$, и поскольку $f_n(\varphi_i(z_n))\to 0$ при $n\to\infty$, $i=1,2$. Тем самым $\max\limits_{1\le j\le N}\{|\varphi_{1j}(z_n)|,|\varphi_{2j}(z_n)|\}\to 1$ при $n\to\infty$. Пусть $|\varphi_{1j_0}(z_n)|\to 1$ и $\varphi_{2j_0}(z_n)\to z_0$ для некоторого j_0 при $n\to\infty$. Предположим также, что существует предел в (34). Пусть $l>0$. Тогда в силу (a) и (b) получим

$$\lim_{\varphi_1(z_n)\to\mathbb{T}^N}\frac{v(z_n)|u_1(z_n)|}{\prod\limits_{j=1}^N(1-|\varphi_{1j}(z_n)|^2)^{\frac{\alpha_j+2}{p}}}=0, \quad (41)$$

$$\lim_{\varphi_2(z_n)\to\mathbb{T}^N}\frac{v(z_n)|u_2(z_n)|}{\prod\limits_{j=1}^N(1-|\varphi_{2j}(z_n)|^2)^{\frac{\alpha_j+2}{p}}}=0. \quad (42)$$

Из (40) и леммы 2 следует, что

$$\varepsilon\le\frac{v(z_n)|u_1(z_n)|}{\prod\limits_{j=1}^N(1-|\varphi_{1j}(z_n)|^2)^{\frac{\alpha_j+2}{p}}}\prod_{j=1}^N(1-|\varphi_{1j}(z_n)|^2)^{\frac{\alpha_j+2}{p}}|f_n(\varphi_1(z_n))|$$
$$+\frac{v(z_n)|u_2(z_n)|}{\prod\limits_{j=1}^N(1-|\varphi_{2j}(z_n)|^2)^{\frac{\alpha_j+2}{p}}}\prod_{j=1}^N(1-|\varphi_{2j}(z_n)|^2)^{\frac{\alpha_j+2}{p}}|f_n(\varphi_2(z_n))|$$

$$\leq \left(\frac{v(z_n)|u_1(z_n)|}{\prod\limits_{j=1}^{N}(1-|\varphi_{1j}(z_n)|^2)^{\frac{\alpha_j+2}{p}}} + \frac{v(z_n)|u_2(z_n)|}{\prod\limits_{j=1}^{N}(1-|\varphi_{2j}(z_n)|^2)^{\frac{\alpha_j+2}{p}}} \right) \|f_n\|_{A^p_{\vec{\alpha}}}. \quad (43)$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$ в (43) и используя (41) и (42), приходим к противоречию. Таким образом, заключаем, что $l = 0$, откуда $|\varphi_{2j_0}(z_n)| \to 1$ при $n \to \infty$. В силу (40) и лемм 2–4 с учетом (a), (b) имеем

$$0 < \varepsilon \leq v(z_n)|u_1(z_n)f(\varphi_1(z_n)) - u_2(z_n)f(\varphi_2(z_n))|$$

$$\leq \frac{v(z_n)|u_1(z_n)|}{\prod\limits_{j=1}^{N}(1-|\varphi_{1j}(z_n)|^2)^{\frac{\alpha_j+2}{p}}} \left| \prod_{j=1}^{N}(1-|\varphi_{1j}(z_n)|^2)^{\frac{\alpha_j+2}{p}} f(\varphi_1(z_n)) \right.$$

$$\left. - \prod_{j=1}^{N}(1-|\varphi_{2j}(z_n)|^2)^{\frac{\alpha_j+2}{p}} f(\varphi_2(z_n)) \right|$$

$$+ \left| \frac{v(z_n)u_1(z)}{\prod\limits_{j=1}^{N}(1-|\varphi_{1j}(z)|^2)^{\frac{\alpha_j+2}{p}}} - \frac{v(z_n)u_2(z)}{\prod\limits_{j=1}^{N}(1-|\varphi_{2j}(z)|^2)^{\frac{\alpha_j+2}{p}}} \right|$$

$$\times \prod_{j=1}^{N}(1-|\varphi_{2j}(z_n)|^2)^{\frac{\alpha_j+2}{p}} |f(\varphi_2(z_n))|$$

$$\leq C\rho(\varphi_1(z_n), \varphi_2(z_n)) \frac{v(z_n)|u_1(z_n)|}{\prod\limits_{j=1}^{N}(1-|\varphi_{1j}(z_n)|^2)^{\frac{\alpha_j+2}{p}}} \|f_n\|_{A^p_{\vec{\alpha}}}$$

$$+ \left| \frac{v(z_n)u_1(z)}{\prod\limits_{j=1}^{N}(1-|\varphi_{1j}(z)|^2)^{\frac{\alpha_j+2}{p}}} - \frac{v(z_n)u_2(z)}{\prod\limits_{j=1}^{N}(1-|\varphi_{2j}(z)|^2)^{\frac{\alpha_j+2}{p}}} \right| \|f_n\|_{A^p_{\vec{\alpha}}} \to 0$$

при $n \to \infty$; противоречие, завершающее доказательство. □

Из теоремы 1 при $W_{\varphi_2,u_2} \equiv 0$ получаем

Следствие 1. *Пусть $p > 0$, $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$, $\alpha_j > -1$, $j = 1, \dots, N$, v — вес на $\mathbb{D}^N$, $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_N)$ — голоморфное отображение $\mathbb{D}^N$ в себя, $u \in H(\mathbb{D}^N)$ и $W_{\varphi,u} : A^p_{\vec{\alpha}} \to H^\infty_v$ метрически ограничен. Тогда оператор $W_{\varphi,u} : A^p_{\vec{\alpha}} \to H^\infty_v$ метрически компактен, если и только если*

$$\lim_{\varphi(z)\to\mathbb{T}^N} \frac{v(z)|u(z)|}{\prod\limits_{j=1}^{N}(1-|\varphi_j(z)|^2)^{\frac{\alpha_j+2}{p}}} = 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Avetisyan K.* Hardy–Bloch type spaces and lacunary series on the polydisk // Glasgow Math. J. 2007. V. 49, N 2. P. 345–356.
2. *Bierstedt K. D., Summers W. H.* Biduals of weighted Banach spaces of analytic functions // J. Austral. Math. Soc. (Ser. A). 1993. V. 54. P. 70–79.
3. *Montes-Rodriguez A.* Weighted composition operators on weighted Banach spaces of analytic functions // J. London Math. Soc. 2000. V. 61, N 3. P. 872–884.
4. *Cohen J., Collona F.* Isometric composition operators on the Bloch space of the polydisk // Banach spaces of analytic functions. Contemp. math. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2008. V. 454. P. 9–21.

5. *Cowen C. C., MacCluer B. D.* Composition operators on spaces of analytic functions. Boca Raton: CRC Press, 1995.
6. *Li S., Stević S.* Weighted composition operators from α-Bloch space to H^∞ on the polydisk // Numer. Funct. Anal. Optimization. 2007. V. 28, N 7. P. 911–925.
7. *Li S., Stević S.* Weighted composition operators from H^∞ to the Bloch space on the polydisc // Abstr. Appl. Anal. V. 2007, Article ID 48478. 12 p.
8. *Stević S.* Composition operators between H^∞ and the α-Bloch spaces on the polydisc // Z. Anal. Anwend. 2006. V. 25. P. 457–466.
9. *Stević S.* Essential norms of weighted composition operators from the α-Bloch space to a weighted-type space on the unit ball // Abstr. Appl. Anal. V. 2008, Article ID 279691. 11 p.
10. *Stević S.* Norm of weighted composition operators from Bloch space to H^∞_μ on the unit ball // Ars. Combin. 2008. V. 88. P. 125–127.
11. *Stević S.* Essential norms of weighted composition operators from the Bergman space to weighted-type spaces on the unit ball // Ars. Combin. 2009. V. 91. P. 391–400.
12. *Stević S.* Norms of some operators on the Bergman and the Hardy space in the unit polydisk and the unit ball // Appl. Math. Comput. 2009. V. 215, N 6. P. 2199–2205.
13. *Stević S.* Norms of some operators on bounded symmetric domains // Appl. Math. Comput. 2010. V. 216. P. 187–191.
14. *Stević S., Wolf E.* Differences of composition operators between weighted-type spaces of holomorphic functions on the unit ball of $\mathbb{C}^n$ // Appl. Math. Comput. 2009. V. 215, N 5. P. 1752–1760.
15. *Стевич С., Чен Р., Чжоу З.* Взвешенные композиционные операторы, действующие из одного пространства Блоха в другое // Мат. сб. 2010. Т. 201, № 2. С. 131–160.
16. *Ueki S. I.* Weighted composition operators on the Bargmann–Fock spaces // Inter. J. Mod. Math. 2008. V. 3. P. 231–243.
17. *Ueki S. I., Luo L.* Essential norms of weighted composition operators between weighted Bergman spaces of the ball // Acta Sci. Math. (Szeged). 2008. V. 74. P. 829–843.
18. *Yang W.* Weighted composition operators from Bloch-type spaces to weighted-type spaces // Ars. Combin. 2009. V. 93. P. 265–274.
19. *Stević S.* On a new integral-type operator from the Bloch space to Bloch-type spaces on the unit ball // J. Math. Anal. Appl. 2009. V. 354. P. 426–434.
20. *Hosokawa T., Izuchi K., Zheng D.* Isolated points and essential components of composition operators on H^∞ // Proc. Amer. Math. Soc. 2002. V. 130. P. 1765–1773.
21. *Hosokawa T., Ohno S.* Differences of composition operators on the Bloch space // J. Operator Theory. 2007. V. 57. P. 229–242.
22. *Lindström M., Wolf E.* Essential norm of the difference of weighted composition operators // Monatsh. Math. 2008. V. 153. P. 133–143.
23. *Beatrous F., Burbea J.* Holomorphic Sobolev spaces on the ball // Diss. Math. 1989. V. 276. P. 1–60.

Статья поступила 6 мая 2010 г.

Stevo Stević (Стевич Стево)
Mathematical Institute of the Serbian Academy of Sciences,
Knez Mihailova 36/III, 11000 Beograd, Serbia
`sstevic@ptt.rs`

Zhi Jie Jiang (Цзян Чжи Цзинь)
Department of Mathematics, Sichuan University of Science and Engineering,
Zigong, Sichuan, 643000, P. R. China
`matjzj@126.com`