Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2011. Том 52, № 2

УДК 510.57+510.67

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ГРУППЫ ОПРЕДЕЛИМЫХ АВТОМОРФИЗМОВ СИЛЬНО КОНСТРУКТИВНЫХ МОДЕЛЕЙ

К. М. Скоробогатов

Аннотация. Изучаются группы определимых автоморфизмов конструктивных моделей. Введено понятие параметрической группы определимых автоморфизмов. Получено полное описание всех возможных параметрических групп определимых автоморфизмов сильно конструктивных моделей, а также следствия для моделей в конечных сигнатурах.

Ключевые слова: вычислимая модель, конструктивная модель, автоморфизм, определимый автоморфизм, группа автоморфизмов.

1. Введение

Как обычно, перестановку f основного множества M модели $\mathfrak{M}$ мы называем *определимой*, если существуют формула $\varphi(p_1, p_2, \dots, p_t, x, y)$ и кортеж элементов $\overline{m} = \langle m_1, m_2, \dots, m_t\rangle$ из M такие, что $f(a) = b$ для $a, b \in M$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M} \models \varphi(\overline{m}, a, b)$. В этом случае будем говорить, что формула φ с параметрами $m_1, m_2, \dots, m_t$ *определяет* перестановку f. Аналогично *определимым автоморфизмом* модели $\mathfrak{M}$ называется всякая определимая перестановка множества M, которая является автоморфизмом $\mathfrak{M}$.

В данной работе мы изучаем специальный случай, в котором множество автоморфизмов заданной модели $\mathfrak{M}$, определяемых заданной формулой φ, образует группу относительно композиции. Главным результатом является характеризация таких групп, данная в теоремах 1 и 2.

Грант изучал группы определимых автоморфизмов и помимо прочего в статье [1] доказал теорему о том, что произвольная группа G может быть представлена группой определимых автоморфизмов подходящей модели $\mathfrak{M}_G$ [1, теорема 3]. В теореме 2 определим еще одну конструкцию, основанную на идее Биркхофа из [2], которая может использоваться для доказательства этого результата. Также покажем, что конструктивные свойства группы G при этом можно перенести на $\mathfrak{M}_G$. В качестве следствия заметим, что группа всех определимых автоморфизмов сильно конструктивной модели, заданной в конечной сигнатуре, изоморфна сильно конструктивной группе. Верно ли обратное утверждение, пока неясно.

Мы используем бóльшую часть обозначений из книг [3, 4], в частности, понятие *нумерованной модели* $(\mathfrak{M}, \mu)$, где $\mathfrak{M} = \langle M; P_0, P_1, \dots\rangle$ — модель в некоторой сигнатуре σ, а μ — нумерация основного множества M модели $\mathfrak{M}$. Под

$\sigma(\mathfrak{M}, \mu)$ будем подразумевать обогащение сигнатуры σ модели $\mathfrak{M}$ множеством константных символов $\{c_j \mid \mu(j) \in M\}$. Для всякой нумерованной модели $(\mathfrak{M}, \mu)$ через $\mathfrak{M}_\mu$ обозначается каноническое $\sigma(\mathfrak{M}, \mu)$-обогащение $\mathfrak{M}$, т. е. модель сигнатуры $\sigma(\mathfrak{M}, \mu)$, основным множеством которой является M, интерпретации предикатных символов из σ совпадают с предикатами $\mathfrak{M}$, а в качестве значений c_j выбраны элементы $\mu(j)$. Говорят, что модель $\mathfrak{M}$ *имеет сильную конструктивизацию*, если существует такая нумерация μ ее основного множества M, что элементарная теория модели $\mathfrak{M}_\mu$ разрешима. В случае, когда $\overline{m} = \langle m_1, \dots, m_n \rangle$ и $m_i \in M$ для всех $i = 1, \dots, n$, говорим, что $\overline{m} \in M$. Через $\operatorname{Sym}\mathfrak{M}$ обозначаем группу всех перестановок множества M, а через $\operatorname{Aut}\mathfrak{M}$ и $\operatorname{Def}\mathfrak{M}$ — соответственно группы всех автоморфизмов и всех определимых автоморфизмов модели $\mathfrak{M}$.

Определение 1. Группу F определимых перестановок основного множества M модели $\mathfrak{M}$ назовем *параметрической*, если существует формула $\varphi(\bar{p}, x, y)$, определяющая с подходящими параметрами $\overline{m}$ из M всякую перестановку f из F. Если при этом все перестановки M, определяемые φ, содержатся в F, будем говорить, что φ *параметризует* F, и обозначать F через F_φ. Группу $F_\varphi \cap \operatorname{Aut}\mathfrak{M}$ называем *параметрической группой определимых автоморфизмов* модели $\mathfrak{M}$.

2. Характеризация

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{M} = \langle M; P_0, P_1, \dots \rangle$ — сильно конструктивизируемая модель сигнатуры ρ, а $\varphi(p_1, p_2, \dots, p_t, x, y)$ — формула такая, что множество F_φ перестановок M, определяемых φ с разными параметрами $\overline{m} \in M$, образует группу относительно операции композиции. Если $G_\varphi = F_\varphi \cap \operatorname{Aut}\mathfrak{M}$, то существует сильно конструктивизируемая модель $\mathfrak{N} = \left\langle G; \cdot^2; \left\{G_i^1\right\}_{i\in\omega}\right\rangle$, в которой G — группа относительно операции $\cdot$, $G_0 \geqslant G_1 \geqslant \dots$ — убывающая последовательность подгрупп G и $G_\varphi \cong \bigcap\limits_{i\in\omega} G_i$.*

Доказательство. Без потери общности мы можем считать, что формула φ с любым набором параметров $\bar{p} \in M$ определяет некоторую перестановку $f \in F_\varphi$ в смысле определения 1. Действительно, допустим, что это не так. Покажем, что существует формула ψ_φ, обладающая этим свойством и определяющая в точности те же автоморфизмы $\mathfrak{M}$, что и φ, т. е. такая, что $\{f \in \operatorname{Aut}\mathfrak{M} \mid f$ определяется формулой $\psi_\varphi\} = G_\varphi$. Рассмотрим формулу

$$\begin{aligned}\mathtt{Perm}_\varphi(\bar{p}) \leftrightharpoons{} & ((\forall x)(\exists y)\varphi(\bar{p}, x, y)) \wedge ((\forall y)(\exists x)\varphi(\bar{p}, x, y)) \\ & \wedge ((\forall x_1, x_2, y)[\varphi(\bar{p}, x_1, y) \wedge \varphi(\bar{p}, x_2, y) \to x_1 = x_2]) \\ & \wedge ((\forall x, y_1, y_2)[\varphi(\bar{p}, x, y_1) \wedge \varphi(\bar{p}, x, y_2) \to y_1 = y_2]),\end{aligned}$$

которая выполняется в $\mathfrak{M}$ на кортеже $\bar{p}$ тогда и только тогда, когда $\varphi(\bar{p}, x, y)$ определяет некоторую перестановку M. Формулу ψ_φ определим следующим образом:

$$\psi_\varphi(\bar{p}, x, y) \leftrightharpoons (\mathtt{Perm}_\varphi(\bar{p}) \wedge \varphi(\bar{p}, x, y)) \vee (\neg\mathtt{Perm}_\varphi(\bar{p}) \wedge x = y).$$

Видно, что ψ_φ искомая, так как определяет перестановку M с любым набором параметров $\bar{p}$ и при этом параметризует группу G_φ.

Запись формулы φ содержит лишь некоторое конечное число $k \geqslant 0$ предикатных символов P_i из ρ. Без потери общности допустим, что это символы $P_0, \dots, P_{k-1}$. Рассмотрим обеднение $\mathfrak{M}_0$ модели $\mathfrak{M}$ до конечной сигнатуры

$\{P_0, \ldots, P_{k-1}\} \subseteq \rho$ и последовательность ее конечных обогащений $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, ..., в которой $\mathfrak{M}_{j+1}$ получается из $\mathfrak{M}_j$ добавлением в сигнатуру предикатного символа P_{k+j}.

Лемма 1. *$G_\varphi \leqslant F_\varphi \leqslant \mathrm{Sym}\,\mathfrak{M}$ и $G_\varphi \leqslant \mathrm{Def}\,\mathfrak{M} \leqslant \mathrm{Def}\,\mathfrak{M}_i$ для всех $i \in \omega$.*

Доказательство. Утверждение очевидно по построению $\mathfrak{M}_i$. $\square$

Определим на M^t (где $t+2$ — местность формулы φ) отношение эквивалентности $\sim$, полагая

$$\overline{m} \sim \bar{n}, \quad \text{если } \mathfrak{M} \models (\forall x, y)[\varphi(\overline{m}, x, y) \leftrightarrow \varphi(\bar{n}, x, y)].$$

В качестве основного множества G модели $\mathfrak{N}$ рассмотрим множество $M^t/_\sim$, а операцию и предикаты определим следующим образом: для $[\overline{m}]_\sim$, $[\bar{n}]_\sim$, $[\bar{p}]_\sim$ из G полагаем

• $\mathfrak{N} \models [\overline{m}]_\sim \cdot [\bar{n}]_\sim = [\bar{p}]_\sim$ тогда и только тогда, когда перестановка $f_{\bar{p}}$, определяемая формулой $\varphi(\bar{p}, x, y)$, является композицией перестановок $f_{\overline{m}}$ и $f_{\bar{n}}$, определяемых φ с параметрами $\overline{m}$ и $\bar{n}$ соответственно;

• $\mathfrak{N} \models G_i([\overline{m}]_\sim)$ тогда и только тогда, когда $\varphi(\overline{m}, x, y)$ определяет некоторый автоморфизм модели $\mathfrak{M}_i$.

Лемма 2. *$\mathfrak{N}$ имеет сильную конструктивизацию.*

Доказательство. Пусть $\varkappa : \omega \to M$ — сильная конструктивизация модели $\mathfrak{M}$, а c_t, $\{c_{t,i}\}_{1 \leqslant i \leqslant t}$ — некоторая канторовская нумерация кортежей натуральных чисел длины t, т. е. семейство вычислимых функций, для которых $c_t(c_{t,1}(x), \ldots, c_{t,t}(x)) = x$ и $c_{t,i}(c_t(x_1, \ldots, x_t)) = x_i$ $(i = 1, \ldots, t)$ [5]. Тогда $\varkappa_t(k) \leftrightharpoons \varkappa(c_{t,1}(k)), \ldots, \varkappa(c_{t,t}(k))$ — эффективная взаимно однозначная нумерация множества M^t. Далее полагаем $\nu(i) \leftrightharpoons [\bar{n}]_\sim$, если $\bar{n} \sim \varkappa_t(i)$. Ясно, что при таком определении ν — нумерация множества G, так как $\varkappa_t$-номер элемента $\bar{n}$ является ν-номером $[\bar{n}]_\sim$.

Пусть σ — сигнатура модели $\mathfrak{N}$. Покажем, что для каждой формулы $\psi(x_1, \ldots, x_l)$ сигнатуры $\sigma(\mathfrak{N}, \nu)$ найдется такая формула $\psi^*(x_{1,1}, \ldots, x_{1,t}, \ldots, x_{l,1}, \ldots, x_{l,t})$ сигнатуры $\rho(\mathfrak{M}, \varkappa)$, что для всяких элементов $m_{1,1}, \ldots, m_{1,t}, \ldots, m_{l,1}, \ldots, m_{l,t}$ множества M имеет место соотношение

$$\mathfrak{N} \models \psi([m_{1,1}, \ldots, m_{1,t}]_\sim, \ldots, [m_{l,1}, \ldots, m_{l,t}]_\sim) \\ \Leftrightarrow \mathfrak{M} \models \psi^*(x_{1,1}, \ldots, x_{1,t}, \ldots, x_{l,1}, \ldots, x_{l,t}). \quad (1)$$

В силу сильной конструктивности $(\mathfrak{M}, \varkappa)$ это равносильно разрешимости элементарной теории модели $\mathfrak{N}_\nu$, т. е. сильной конструктивности $(\mathfrak{N}, \nu)$.

Рассмотрим следующую формулу:

$$\mathtt{Aut}_{\varphi,i}(\bar{n}) \leftrightharpoons \bigwedge_{j=0}^{k+i} (\forall x_1, \ldots, x_{m_j}, y_1, \ldots, y_{m_j})[(\varphi(\bar{n}, x_1, y_1) \wedge \ldots \\ \wedge \varphi(\bar{n}, x_{m_j}, y_{m_j})) \to (P_j(x_1, \ldots, x_{m_j}) \leftrightarrow P_j(y_1, \ldots, y_{m_j}))],$$

где m_j — местность предикатного символа $P_j \in \rho$. Для $\overline{m} \in M$ справедливо следующее соотношение [1, лемма 2]:

$$\mathfrak{N} \models G_i([\overline{m}]_\sim) \Leftrightarrow \mathfrak{M} \models \mathtt{Aut}_{\varphi,i}(\overline{m}). \quad (2)$$

Легко видеть, что если перестановки $f, g \in \mathrm{Sym}\,\mathfrak{M}$ определяются формулами $\varphi(\overline{m}, x, y)$ и $\varphi(\bar{n}, x, y)$ соответственно, то перестановка fg определяется формулой $(\exists z)(\varphi(\bar{n}, x, z) \wedge \varphi(\overline{m}, z, y))$. Таким образом, для краткости обозначая

$$\mathtt{Percomp}_\varphi(\overline{m}, \bar{n}, \bar{p}) \leftrightharpoons (\forall x, y)[\varphi(\bar{p}, x, y) \leftrightarrow (\exists z)(\varphi(\bar{n}, x, z) \wedge \varphi(\overline{m}, z, y))], \quad (3)$$

получим соотношение

$$\mathfrak{N} \models [\overline{m}]_\sim \cdot [\bar{n}]_\sim = [\bar{p}]_\sim \Leftrightarrow \mathfrak{M} \models \mathtt{Percomp}_\varphi(\overline{m}, \bar{n}, \bar{p}).$$

Не ограничивая общности, предполагаем, что все формулы построены с помощью операций конъюнкции $\wedge$, отрицания $\neg$ и навешивания квантора существования $\exists$, а также содержат атомные подформулы только вида $G_i(x)$, $x_1 = x_2$ или $x_1 \cdot x_2 = x_3$. Определим теперь отображение * множества формул сигнатуры σ модели $\mathfrak{N}$ в множество формул сигнатуры ρ модели $\mathfrak{M}$:

$$(x_1 = x_2)^* \leftrightharpoons x_{1,1}, \dots, x_{1,t} \sim x_{2,1}, \dots, x_{2,t};$$

$$(G_i(x_1))^* \leftrightharpoons \mathtt{Aut}_{\varphi,i}(x_{1,1}, \dots, x_{1,t}), \quad i \in \omega;$$

$$(x_1 \cdot x_2 = x_3)^* \leftrightharpoons \mathtt{Percomp}_\varphi(x_{1,1}, \dots, x_{1,t}, x_{2,1}, \dots, x_{2,t}, x_{3,1}, \dots, x_{3,t});$$

$$((\exists x_1)\theta(x_1, \dots))^* \leftrightharpoons (\exists x_{1,1}, \dots, x_{1,t})\theta^*(x_{1,1}, \dots, x_{1,t}, \dots);$$

$$(\theta_1 \wedge \theta_2)^* \leftrightharpoons \theta_1^* \wedge \theta_2^*;$$

$$(\neg\theta)^* \leftrightharpoons \neg\theta^*.$$

Для того чтобы проверить истинность произвольной формулы $\psi(x_1, \dots, x_l)$ на элементах $\nu(i_1), \dots, \nu(i_l)$ в $\mathfrak{N}$, в силу определения нумерации ν достаточно удостовериться в том, что ψ^* истинна в $\mathfrak{M}$ на соответствующих кортежах $\varkappa_t(i_1), \dots, \varkappa_t(i_l)$. Индукцией по сложности формулы ψ нетрудно установить, что отображение * удовлетворяет соотношению (1) и поэтому является искомым. $\square$

В силу предположения о том, что φ с любым набором параметров $\overline{m} \in M$ определяет некоторую перестановку $f_{\overline{m}} \in F_\varphi$, всякому элементу $[\overline{m}]_\sim \in G$ можно поставить в соответствие $f_{\overline{m}}$. При этом ясно, что если $[\overline{m}]_\sim \cdot [\bar{n}]_\sim = [\bar{p}]_\sim$ в $\mathfrak{N}$, то $f_{\overline{m}} f_{\bar{n}} = f_{\bar{p}}$ в F_φ. Обратное также верно: если перестановки $f_{\bar{a}}, f_{\bar{b}}, f_{\bar{c}}$ множества M определяются формулой φ с параметрами $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ соответственно и $f_{\bar{a}} f_{\bar{b}} = f_{\bar{c}}$ в F_φ, то $\mathfrak{M} \models \mathtt{Percomp}_\varphi([\bar{a}]_\sim, [\bar{b}]_\sim, [\bar{c}]_\sim)$, откуда с помощью (3) тотчас следует $\mathfrak{N} \models [\bar{a}]_\sim \cdot [\bar{b}]_\sim = [\bar{c}]_\sim$. Таким образом, отображение $\zeta : [\overline{m}]_\sim \mapsto f_{\overline{m}}$ является изоморфизмом групп $\langle G; \cdot \rangle$ и F_φ.

Далее, рассмотрим такие $[\overline{m}]_\sim$ и $[\bar{n}]_\sim$ из G, что для некоторого натурального числа i в $\mathfrak{N}$ имеет место $G_i([\overline{m}]_\sim) \wedge G_i([\bar{n}]_\sim)$. По определению это означает, что φ с параметрами $\overline{m}$ и $\bar{n}$ определяет некоторые автоморфизмы $f_{\overline{m}} = \zeta([\overline{m}]_\sim)$ и $f_{\bar{n}} = \zeta([\bar{n}]_\sim)$ модели $\mathfrak{M}_i$. Так как в этом случае $f_{\overline{m}}, f_{\bar{n}} \in F_\varphi$, композиция $f_{\overline{m}} f_{\bar{n}}$ также определяется формулой φ с некоторым кортежем параметров $\bar{p}$ и справедливо $\mathfrak{M} \models \mathtt{Percomp}_\varphi(\overline{m}, \bar{n}, \bar{p})$. Но формула $(\exists z)(\varphi(\bar{n}, x, z) \wedge \varphi(\overline{m}, z, y))$ определяет автоморфизм $f_{\overline{m}} f_{\bar{n}}$ модели $\mathfrak{M}_i$ [1, предложение 1]. Поэтому $\varphi(\bar{p}, x, y)$ также обладает этим свойством в силу определения $\mathtt{Percomp}_\varphi$. Отсюда $\mathfrak{N} \models G_i([\bar{p}]_\sim)$ и из (3) следует, что $[\overline{m}]_\sim \cdot [\bar{n}]_\sim = [\bar{p}]_\sim$ в $\mathfrak{N}$. Аналогичные рассуждения показывают, что множество $G_i[\mathfrak{N}]$ элементов $[\overline{m}]_\sim$ из G, удовлетворяющих в $\mathfrak{N}$ предикату G_i, замкнуто относительно взятия обратных элементов. Таким образом, $G_i[\mathfrak{N}]$ есть ζ-прообраз некоторой подгруппы группы $\mathrm{Def}\,\mathfrak{M}_i$. Из соотношения (2) и вида формулы $\mathtt{Aut}_{\varphi,i}$ следует, что при этом $\langle G_0[\mathfrak{N}]; \cdot \rangle \geqslant \langle G_1[\mathfrak{N}]; \cdot \rangle \geqslant \dots$.

Для завершения доказательства теоремы осталось показать, что если $Q \leftrightharpoons \bigcap\limits_{i \in \omega} G_i$, то $Q \cong G_\varphi$. Покажем, что на самом деле G_φ совпадает с $\zeta(Q)$. Если $[\overline{m}]_\sim \in Q$, то $\zeta([\overline{m}]_\sim)$ есть такая перестановка $f_{\overline{m}}$ множества M, что $\mathfrak{M} \models P_j(a_1, a_1, \dots, a_{m_j}) \leftrightarrow P_j(f_{\overline{m}}(a_1), f_{\overline{m}}(a_2), \dots, f_{\overline{m}}(a_{m_j}))$ для всех предикатных символов $P_j^{m_j}$ сигнатуры ρ модели $\mathfrak{M}$. Так как при этом $f_{\overline{m}}$ определяется формулой

$\varphi(\overline{m}, x, y)$, то $f_{\overline{m}} \in G_\varphi$ и $\zeta(Q) \subseteq G_\varphi$. Если теперь $f_{\bar{n}} \in G_\varphi$ — некоторый автоморфизм модели $\mathfrak{M}$, определяемый формулой φ с параметрами $\bar{n}$, то в силу леммы 1 имеем $f_{\bar{n}} \in \operatorname{Def} \mathfrak{M}_i$ для всех $i \in \omega$, поэтому $[\bar{n}]_\sim = \zeta^{-1}(f_{\bar{n}}) \in Q$. Таким образом, обратное включение $\zeta(Q) \supseteq G_\varphi$ также верно, и $\zeta(Q) = G_\varphi$. $\square$

Следствие 1. *Если сигнатура ρ сильно конструктивизируемой модели $\mathfrak{M}$ конечна и G_φ — некоторая параметрическая группа определимых автоморфизмов $\mathfrak{M}$, то G_φ сильно конструктивизируема.*

Доказательство. Основная мысль состоит в том, что для заданных в конечной сигнатуре формулы φ и модели $\mathfrak{M}$ существует формула $\mathtt{Aut}_\varphi$, выполнимость которой на кортеже $\bar{n}$ элементов из M равносильна тому, что φ с параметрами $\bar{n}$ определяет какой-то автоморфизм $\mathfrak{M}$.

Имея такую формулу и по-прежнему предполагая, что φ с любыми параметрами определяет некоторую перестановку основного множества модели $\mathfrak{M}$, в доказательстве теоремы 1 рассмотрим вместо серии предикатов $\{G_i\}_{i\in\omega}$ в $\mathfrak{N}$ один предикат Q, проинтерпретировав его множеством тех элементов $[\bar{n}]_\sim \in G$, для которых в $\mathfrak{M}$ выполняется $\mathtt{Aut}_\varphi(\bar{n})$. Тогда аналогично доказательству изоморфизма $\bigcap\limits_{i\in\omega} G_i$ и G_φ удостоверимся, что в данном случае также $Q \cong G_\varphi$. Конструктивизацию группы G_φ нетрудно определить, используя конструктивизацию модели $\mathfrak{N}$, построенную в доказательстве теоремы.

В качестве $\mathtt{Aut}_\varphi(\bar{n})$ нужно рассмотреть формулу $\mathtt{Aut}_{\varphi,i^*}(\bar{n})$ из доказательства теоремы 1 для i^*, равного $|\rho| - k - 1$, где ρ — конечная сигнатура модели $\mathfrak{M}$. $\square$

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{N} = \left\langle N; \cdot^2; \left\{Q_i^1\right\}_{i\in\omega}\right\rangle$ — сильно конструктивизируемая модель сигнатуры σ, в которой $\langle N; \cdot\rangle$ — группа, а $Q_0 \geqslant Q_1 \geqslant \dots$ — убывающая последовательность подгрупп N. Тогда если $G \leftrightharpoons \bigcap\limits_{i\in\omega} Q_i$, то существуют сильно конструктивизируемая модель $\mathfrak{M}_G$ и формула φ такие, что $\operatorname{Aut}\mathfrak{M}_G = \operatorname{Def}\mathfrak{M}_G = \{f \in \operatorname{Aut}\mathfrak{M}_G \mid f$ определяется формулой $\varphi\} \cong G$.*

Доказательство. Если $G = \mathbb{1}$, то в качестве $\mathfrak{M}_G$ подойдет одноэлементная модель $\langle\{\varnothing\}\rangle$ в пустой сигнатуре, а в качестве φ — формула $x = y$. Предполагаем далее, что группа G нетривиальна, и для построения $\mathfrak{M}_G$ используем конструкцию элементарной определимости модели $\mathfrak{A}$ в модели $\mathfrak{B}$, которая описана в определении 1.2 из [6].

Рассмотрим следующую формулу:

$$E(x_0, x_1, y_0, y_1) \leftrightharpoons (x_0 = y_0) \wedge ((x_1 = e) \leftrightarrow (y_1 = e)),$$

где e — единичный элемент группы N. Он выделяется в модели $\mathfrak{N}$ формулой $(\forall n)[e \cdot n = n \wedge n \cdot e = n]$. Теперь на множестве N^2 определим эквивалентность $\sim_E$ по правилу

$$\langle x_0, x_1\rangle \sim_E \langle y_0, y_1\rangle \Leftrightarrow E(x_0, x_1, y_0, y_1)$$

и обратим отдельное внимание на следующий очевидный факт.

Лемма 3. *Для всех $x, y, z \in N$ если $y, z \neq e$, то имеет место эквивалентность $\langle x, y\rangle \sim_E \langle x, z\rangle$.*

Наконец, рассмотрим сигнатуру $\delta = \left\langle W_E^3, \left\{P_i^1\right\}_{i\in\omega}, C^1; \{u_g\}_{g\in N}\right\rangle$ и определим в ней модель $\mathfrak{M}_G$, взяв $N^2/_{\sim_E}$ за основное множество M_G. Для $[\langle x_0, x_1\rangle]_{\sim_E}$, $[\langle y_0, y_1\rangle]_{\sim_E}$, $[\langle z_0, z_1\rangle]_{\sim_E} \in M_G$ полагаем

• $\mathfrak{M}_G \models W_E([\langle x_0, x_1\rangle]_{\sim_E}, [\langle y_0, y_1\rangle]_{\sim_E}, [\langle z_0, z_1\rangle]_{\sim_E})$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{N} \models x_1 = e \wedge y_1 \neq e \wedge z_1 \neq e \wedge x_0 \cdot y_0 = z_0$;

• $\mathfrak{M}_G \models P_i([\langle x_0, x_1\rangle]_{\sim_E})$, если и только если $\mathfrak{N} \models Q_i(x_0) \wedge x_1 \neq e$;

• $\mathfrak{M}_G \models C([\langle x_0, x_1\rangle]_{\sim_E})$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{N} \models x_1 = e$.

Константы $\{u_g\}_{g \in N}$ будем интерпретировать в $\mathfrak{M}_G$ элементами $[\langle g, e\rangle]_{\sim_E}$, и, таким образом, множество их значений выделяется в $\mathfrak{M}_G$ предикатом C.

Лемма 4. $G \cong \operatorname{Aut} \mathfrak{M}_G$.

Доказательство. Рассмотрим $f \in \operatorname{Aut} \mathfrak{M}_G$ и для удобства изложения обозначим f-образ произвольного элемента $[\langle p, q\rangle]_{\sim_E} \in M_G$ через $[\langle p, q\rangle]'_{\sim_E}$. На классах пар, второй компонентой которых является e, по определению автоморфизма f действует тождественно, так как эти классы суть константы модели $\mathfrak{M}_G$. Заметим, что для любых $r, p, q \in N$ если $p, q \neq e$, то

$$\mathfrak{M}_G \models W_E([\langle r, e\rangle]_{\sim_E}, [\langle e, p\rangle]_{\sim_E}, [\langle r, q\rangle]_{\sim_E}).$$

Это же соотношение должно выполняться и для f-образов указанных классов:

$$\mathfrak{M}_G \models W_E([\langle r, e\rangle]'_{\sim_E}, [\langle e, p\rangle]'_{\sim_E}, [\langle r, q\rangle]'_{\sim_E}).$$

Учитывая сказанное о константах, имеем $[\langle r, e\rangle]'_{\sim_E} = [\langle r, e\rangle]_{\sim_E}$, а в силу леммы 3 $[\langle e, p\rangle]'_{\sim_E} = [\langle e', p\rangle]_{\sim_E}$ и $[\langle r, q\rangle]'_{\sim_E} = [\langle r', q\rangle]_{\sim_E}$ для некоторых $e', r' \in N$ таких, что $\mathfrak{N} \models r \cdot e' = r'$. Так как N — группа, существование таких элементов нам гарантировано. Итак, $[\langle r, q\rangle]'_{\sim_E} = [\langle r \cdot e', q\rangle]_{\sim_E}$, т. е. на классах эквивалентности пар $\langle r, q\rangle$, где $q \neq e$, автоморфизм f действует как правый сдвиг относительно некоторого элемента e' группы N.

Допустим, что элемент $[\langle r, q\rangle]_{\sim_E}$ принадлежит в $\mathfrak{M}_G$ предикату P_i, т. е. $\mathfrak{N} \models Q_i(r)$. Так как f — автоморфизм $\mathfrak{M}_G$, предикату P_i также должен принадлежать и элемент $[\langle r', q\rangle]_{\sim_E}$, т. е. для r' должно выполняться $\mathfrak{N} \models Q_i(r')$. По условию $\{Q_i\}$ — убывающая последовательность групп, поэтому из замечаний предыдущего абзаца следует, что элемент e' должен принадлежать пересечению всех Q_i (т. е. G), ибо только в этом случае произведение $r \cdot e'$ оказывается элементом в точности тех же групп Q_i, что и r.

Рассмотрим произвольный правый сдвиг $g = g_b$ относительно элемента $b \in G$, действующий тождественно на всех $[\langle g, e\rangle]_{\sim_E}$ $(g \in N)$, и покажем, что он оказывается автоморфизмом $\mathfrak{M}_G$. Итак, пусть

$$g : [\langle t, e\rangle]_{\sim_E} \mapsto [\langle t, e\rangle]_{\sim_E} \quad \text{и} \quad g : [\langle t, s\rangle]_{\sim_E} \mapsto [\langle tb, s\rangle]_{\sim_E}$$

для $s \neq e$ и t из N, а также некоторого $b \in G$. Из определения ясно, что g не нарушает принадлежности элементов предикату C в $\mathfrak{M}_G$. Как было отмечено, в силу выбора b из пересечения всех Q_i соотношение $\mathfrak{N} \models Q_i(t) \leftrightarrow Q_i(tb)$ имеет место для любого $i \in \omega$. Поэтому $\mathfrak{M}_G \models P_i(x) \Leftrightarrow \mathfrak{M}_G \models P_i(g(x))$ для произвольного натурального числа i и всех $x \in M_G$. Далее, если $\mathfrak{M}_G \models W_E(x, y, z)$ для $x = [\langle x_0, x_1\rangle]_{\sim_E}$, $y = [\langle y_0, y_1\rangle]_{\sim_E}$, $z = [\langle z_0, z_1\rangle]_{\sim_E}$, то $g(x) = x$ и $x_0 \cdot y_0 = z_0$ в N. Это напрямую следует из определения истинности W_E и выбора g. Домножив обе части последнего равенства справа на b, получим $\mathfrak{M}_G \models W_E(g(x), g(y), g(z))$. Обратная проверка $\mathfrak{M}_G \models W_E(g(x), g(y), g(z)) \Rightarrow \mathfrak{M}_G \models W_E(x, y, z)$ аналогична.

Нетрудно удостовериться в том, что отображение $\gamma : G \to \operatorname{Aut} \mathfrak{M}_G$ по правилу $b \mapsto g_b$ — искомый изоморфизм. $\square$

Итак, теперь мы знаем точный вид автоморфизмов модели $\mathfrak{M}_G$. Допустим, что $g_b \in \operatorname{Aut} \mathfrak{M}_G$ переводит элемент $s = [\langle s_0, s_1\rangle]_{\sim_E}$ в $t = [\langle t_0, t_1\rangle]_{\sim_E}$. Это возможно в одном из двух случаев:

1) либо $s_1 = t_1 = e$ в группе N (эквивалентно $\mathfrak{M}_G \models C(s) \wedge C(t)$), и тогда s и t суть некоторые константы $\mathfrak{M}_G$, поэтому

$$g_b(s) = t \Leftrightarrow \mathfrak{M}_G \models s = t;$$

2) либо $s_1, t_1 \neq e$ в N, и из доказательства леммы 4 следует, что t является сдвигом s относительно элемента $b \in G$, поэтому

$$g_b(s) = t \Leftrightarrow \mathfrak{M}_G \models (\exists z)[W_E(z, \hat{e}, s) \wedge W_E(z, \hat{b}, t)],$$

где $\hat{e}$ и $\hat{b}$ — элементы $[\langle e, p\rangle]_{\sim_E}$ и $[\langle b, q\rangle]_{\sim_E}$ из M_G соответственно ($p, q \neq e$ в N).

Таким образом, все автоморфизмы модели $\mathfrak{M}_G$ оказываются определимыми, и $\operatorname{Aut} \mathfrak{M}_G = \operatorname{Def} \mathfrak{M}_G$. При этом два рассмотренных выше случая отделяются в $\mathfrak{M}_G$ с помощью предиката C и существует формула $\varphi(\hat{b}, x, y)$, определяющая любой $g_b \in \operatorname{Aut} \mathfrak{M}_G$ с подходящим параметром $\hat{b}$, параметризуя тем самым группу $\operatorname{Def} \mathfrak{M}_G$:

$$(C(x) \wedge C(y) \wedge x = y) \vee (\neg C(x) \wedge \neg C(y) \wedge (\exists z)[W_E(z, \hat{e}, x) \wedge W_E(z, \hat{b}, y)]).$$

Для завершения доказательства теоремы осталось лишь предъявить сильную конструктивизацию модели $\mathfrak{M}_G$ в предположении существования такой у $\mathfrak{N}$. Мы поступим так же, как при доказательстве леммы 2: используя нумерацию ν множества N, определим нумерацию μ множества M_G и покажем, что для каждой формулы $\psi(x_1, \dots, x_l)$ сигнатуры $\delta(\mathfrak{M}_G, \mu)$ найдется такая формула $\psi^*(x_{1,1}, x_{1,2}, \dots, x_{l,1}, x_{l,2})$ сигнатуры $\sigma(\mathfrak{N}, \nu)$, что для всякого набора элементов $n_{1,1}, n_{1,2}, \dots, n_{l,1}, n_{l,2}$ из N имеет место соотношение

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_G \models \psi([\langle n_{1,1}, n_{1,2}\rangle]_{\sim_E}, \dots, [\langle n_{l,1}, n_{l,2}\rangle]_{\sim_E}) \\ \Leftrightarrow \mathfrak{N} \models \psi^*(n_{1,1}, n_{1,2}, \dots, n_{l,1}, n_{l,2}). \end{aligned} \quad (4)$$

Как следует из леммы 3, для каждого $n \in N$ в $\mathfrak{M}_G$ существует два вида элементов: $[\langle n, e\rangle]_{\sim_E}$ и $[\langle n, q\rangle]_{\sim_E}$, где $q \neq e$ в N. Поэтому если $n = \nu(i)$ в N, то представляется естественным присвоить элементу $[\langle n, e\rangle]_{\sim_E}$ из $\mathfrak{M}_G$ μ-номер $2i$, а элементу $[\langle n, q\rangle]_{\sim_E}$, где $q \neq e$, — номер $2i + 1$. Заметим, что при такой нумерации константы u_g модели $\mathfrak{M}_G$ в точности составят множество $\{\mu(2n) \mid n \in \omega\}$. Вновь предполагая, что все формулы построены из атомных с помощью операций конъюнкции $\wedge$, отрицания $\neg$, а также навешивания квантора существования $\exists$, определяем отображение * множества формул сигнатуры δ модели $\mathfrak{M}_G$ в множество формул сигнатуры σ модели $\mathfrak{N}$:

$$(x_1 = x_2)^* \leftrightharpoons E(x_{1,1}, x_{1,2}, x_{2,1}, x_{2,2});$$

$$(W_E(x_1, x_2, x_3))^* \leftrightharpoons x_{1,2} = e \wedge x_{2,2} \neq e \wedge x_{3,2} \neq e \wedge x_{1,1} \cdot x_{2,1} = x_{3,1};$$

$$(P_i(x_1))^* \leftrightharpoons Q_i(x_{1,1}) \wedge x_{1,2} \neq e, \quad i \in \omega;$$

$$(C(x_1))^* \leftrightharpoons x_{1,2} = e;$$

$$((\exists x_1)\theta(x_1, \dots))^* \leftrightharpoons (\exists x_{1,1}, x_{1,2})\theta^*(x_{1,1}, x_{1,2}, \dots);$$

$$(\theta_1 \wedge \theta_2)^* \leftrightharpoons \theta_1^* \wedge \theta_2^*;$$

$$(\neg\theta)^* \leftrightharpoons \neg\theta^*.$$

Как и в доказательстве леммы 2, построенная нумерация μ позволяет сводить проверку истинности произвольной формулы $\psi(x_1, \dots, x_l)$ на конкретных элементах $\mu(i_1), \dots, \mu(i_l)$ из M_G к верификации истинности ψ^* в $\mathfrak{N}$ на соответствующих элементах. Пусть θ — бескванторная часть предваренной нормальной формы формулы ψ^*. Определение отображения * позволяет представить θ в виде $\theta_1 \wedge \theta_2$, где θ_1 — конъюнкция всех подформул вида $x_{j,2} = e$ и $x_{j,2} \neq e$ формулы θ, а θ_2 имеет вид $\theta_2(x_{1,1}, \dots, x_{l,1})$. На самом деле $\psi(\mu(i_1), \dots, \mu(i_l))$ истинна в $\mathfrak{M}_G$ тогда и только тогда, когда выполнены два условия:

1) для каждой подформулы вида $x_{j,2} = e$ ($x_{j,2} \neq e$) формулы θ_1 номер i_j четен (нечетен);

2) $\mathfrak{N} \models \theta_2(\nu([i_1/2]), \dots, \nu([i_l/2]))$.

Индукцией по сложности формулы ψ сигнатуры δ удостоверяемся, что отображение * удовлетворяет (4), поэтому в силу сильной конструктивности модели $(\mathfrak{N}, \nu)$ заключаем, что $(\mathfrak{M}_G, \mu)$ также сильно конструктивна. С учетом леммы 4 теорема доказана. $\square$

Замечание. Описанную в доказательстве теоремы конструкцию модели $\mathfrak{M}_G$ такой, что $G \cong \operatorname{Aut} \mathfrak{M}_G = \operatorname{Def} \mathfrak{M}_G$, можно применить к произвольной группе G, просто рассмотрев ее вместо N и опустив рассмотрение предикатов P_i. Таким образом, получили еще одно доказательство того, что любую группу можно представить группой определимых автоморфизмов подходящей модели. В статье [1] этот факт был установлен с использованием симметрических групп, однако никакой информации о переносе конструктивных свойств группы G на $\mathfrak{M}_G$ конструкция не содержала.

Следствие 2. *Если G — сильно конструктивизируемая группа, то существует такая сильно конструктивизируемая модель $\mathfrak{M}_G$, что $\operatorname{Aut} \mathfrak{M}_G = \operatorname{Def} \mathfrak{M}_G \cong G$.*

Следствие 3. *Если G — конечно порожденная сильно конструктивизируемая группа, то существует сильно конструктивизируемая модель $\mathfrak{M}_G$ конечной сигнатуры такая, что $\operatorname{Aut} \mathfrak{M}_G = \operatorname{Def} \mathfrak{M}_G \cong G$.*

Доказательство. Как и в доказательстве теоремы, определяем модель $\mathfrak{M}_G$ на фактор- множестве $G/\sim_E$ с предикатами W_E^3 и C^1, но вместо выделения констант u_g для каждого g из G выделяем лишь те, которые соответствуют элементам конечного множества X, порождающего G. Предикаты P_i в данном случае не нужны. Тогда, по существу, доказательство изоморфизма $\operatorname{Aut} \mathfrak{M}_G \cong G$ содержится в доказательстве леммы 4. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Grant J.* Automorphisms definable by formulas // Pacif. J. Math. 1973. V. 44. P. 107–115.
2. *Birkhoff G.* Sobre los grupos de automorfismos. // Rev. Unión Mat. Argent. 1946. V. 11, N 4. P. 155–157.
3. *Кейслер Г., Чэн Ч. Ч.* Теория моделей. М.: Мир, 1977.
4. *Гончаров С. С., Ершов Ю. Л.* Конструктивные модели. Новосибирск: Науч. книга, 1999.
5. *Мальцев А. И.* Алгоритмы и рекурсивные функции. М.: Наука, 1965.
6. *Морозов А. С.* Элементарные подмодели параметризуемых моделей // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 3. С. 596–613.

Статья поступила 12 мая 2010 г.

Скоробогатов Кирилл Максимович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
kirill@academ.org