Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2011. Том 52, № 2

УДК 512.542

О π–ТЕОРЕМАХ БЭРА — СУДЗУКИ

Д. О. Ревин

Аннотация. Пусть π — некоторое множество простых чисел. Будем говорить, что в конечной группе G *справедлива π-теорема Бэра — Судзуки*, если лишь тот элемент, который принадлежит $\mathscr{O}_\pi(G)$, может вместе с каждым сопряженным элементом порождать π-подгруппу. В терминах неабелевых композиционных факторов найдено достаточное условие для того, чтобы в данной конечной группе была справедлива π-теорема Бэра — Судзуки. Показано также, что π-теорема Бэра — Судзуки верна для любой конечной группы в случае, когда $2 \notin \pi$.

Ключевые слова: теорема Бэра — Судзуки, π-элемент, π-подгруппа, π-радикал, теорема Силова, π-холлова подгруппа, свойство D_π, конечная простая группа.

Введение

В работе всюду через π обозначается некоторое множество простых чисел. Символ π' используется для обозначения множества всех простых чисел, не принадлежащих π. Для конечной группы G через $\mathscr{O}_\pi(G)$ обозначается π-*радикал*, т. е. наибольшая нормальная π-подгруппа группы G.

Теорема Бэра — Судзуки [1–3]. *Пусть p — некоторое простое число, G — конечная группа и $x \in G$. Тогда если для любого $g \in G$ подгруппа $\langle x, x^g \rangle$ является p-группой, то $x \in \mathscr{O}_p(G)$.*

Эта теорема имеет несколько эквивалентных формулировок. Различные обобщения и аналоги теоремы Бэра — Судзуки исследовались многими авторами (см., в частности, [3–11]).

Число p в приведенной выше формулировке теоремы нельзя заменить произвольным множеством π простых чисел, как показывает следующий

Пример 1. Пусть p — простое число, $p \geq 5$, множество π состоит из всех простых чисел, строго меньших p. Пусть $G = S_p$ — симметрическая группа степени p, а x — транспозиция из G. Любые m транспозиций в G, где $m < p-1$, порождают π-подгруппу. В частности, $\langle x, x^g \rangle$ является π-подгруппой для любого $g \in G$. Вместе с тем $\mathscr{O}_\pi(G) = 1$ и поэтому $x \notin \mathscr{O}_\pi(G)$.

Определение. Пусть π — некоторое множество простых чисел, m — неотрицательное целое число.

• Будем говорить, что для конечной группы G *справедлива π-теорема Бэра — Судзуки*, и писать $G \in \mathscr{BS}_\pi$, если каждый элемент $x \in G$, порождающий

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 08–01–00322, 10–01–00391 и 10–01–90007), АВЦП Рособразования «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект 2.1.1.10726), ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (гос. контракт № 02.740.11.5191, 14.740.11.0346), Совета по грантам Президента РФ для поддержки ведущих научных школ (проект НШ–3669.2010.1).

© **2011 Ревин Д. О.**

вместе с любым сопряженным элементом некоторую π-группу, содержится в $\mathscr{O}_\pi(G)$.

• Будем говорить, что для конечной группы G *справедлива* (π, m)*-теорема Бэра — Судзуки*, и писать $G \in \mathscr{BS}_\pi^m$, если каждый элемент $x \in G$ такой, что любые m сопряженных с ним элементов порождают π-группу, содержится в $\mathscr{O}_\pi(G)$. В частности, $\mathscr{BS}_\pi = \mathscr{BS}_\pi^2$.

Пример 1 показывает, что в общем случае не существует такого m, что для любого π и любой конечной группы верна (π, m)-теорема Бэра — Судзуки, поскольку в обозначениях этого примера $S_p \notin \mathscr{BS}_\pi^m$ при $m < p - 1$.

Тем не менее, опираясь на результаты [7–11], полученные с использованием классификации конечных простых групп, докажем, что π-теорема Бэра — Судзуки верна для любой конечной группы, если $2 \notin \pi$. А именно справедлива

Теорема 1. *Пусть π — некоторое множество нечетных простых чисел, G — конечная группа и $x \in G$. Тогда если для любого $g \in G$ подгруппа $\langle x, x^g \rangle$ является π-группой, то $x \in \mathscr{O}_\pi(G)$.*

Эта теорема дает пример радикального класса $\mathscr{X}$, для которого положительно решается проблема 1.16 из [10]: в качестве $\mathscr{X}$ можно взять взять класс всех π-групп для произвольного множества π нечетных простых чисел.

Из теоремы 1 вытекает

Следствие 2. *Пусть X — подгруппа конечной группы G такая, что для любого $g \in G$ подгруппа $\langle X, X^g \rangle$ имеет нечетный порядок. Тогда $X \leq \mathscr{O}(G)$, где $\mathscr{O}(G)$ — наибольшая нормальная подгруппа нечетного порядка группы G.*

Этот результат существенно обобщает теоремы 1 и 3 из [12].

Прежде чем доказывать теорему 1, докажем редукционную теорему, которая может применяться и в других ситуациях.

Теорема 3. *Пусть $\mathscr{X}$ — класс конечных групп, содержащий все π-группы простых порядков и замкнутый относительно взятия нормальных подгрупп, гомоморфных образов и расширений*[1)]*. Предположим, что для любой неабелевой простой группы $S \in \mathscr{X}$, не являющейся π- или π'-группой, и любого π-элемента $x \in \mathrm{Aut}(S)$, имеющего простой порядок, в группе $\langle \mathrm{Inn}(S), x \rangle$ выполнена π-теорема Бэра — Судзуки. Тогда эта теорема выполнена для любой группы из $\mathscr{X}$.*

Отметим, что условие теоремы требует, в частности, чтобы любая неабелева простая группа из $\mathscr{X}$ принадлежала $\mathscr{BS}_\pi$. Для π- и π'-групп это очевидно, а для любой другой группы $S \in \mathscr{X}$ можно взять элемент $x \in \mathrm{Inn}(S)$ и тогда

$$S \simeq \mathrm{Inn}(S) = \langle \mathrm{Inn}(S), x \rangle \in \mathscr{BS}_\pi.$$

Одним из возможных направлений дальнейшего применения теоремы 3, по мнению автора, должна стать следующая

Гипотеза 1. $\mathscr{D}_\pi \subseteq \mathscr{BS}_\pi$.

Поясним формулировку. В соответствии с [13] будем писать $G \in \mathscr{E}_\pi$, если в G имеется π-холлова подгруппа. Если при этом любые две π-холловы

[1)] Отметим, что теорема останется справедливой, если условие замкнутости относительно расширений заменить более слабым условием А: *Если $A \trianglelefteq G$, $A \in \mathscr{X}$ и $|G/A| = p$ для некоторого $p \in \pi$, то $G \in \mathscr{X}$* (см. лемму 11). В этом случае можно также не требовать, чтобы класс $\mathscr{X}$ содержал все π-группы.

подгруппы сопряжены, то будем писать $G \in \mathscr{C}_\pi$. Если к тому же любая π-подгруппа группы G содержится в некоторой π-холловой подгруппе, то будем писать $G \in \mathscr{D}_\pi$. Таким образом, класс $\mathscr{D}_\pi$ состоит из всех конечных групп, для которых выполнен полный аналог теоремы Силова для π-подгрупп.

Интерес автора к гипотезе 1 объясняется тем, что многие известные доказательства теоремы Бэра — Судзуки опираются на теорему Силова (см., в частности, [2, 3]). Из [14; 15, гл. A, (14.11)] следует также, что эта гипотеза справедлива в классе конечных групп, обладающих нильпотентными π-холловыми подгруппами.

Отметим, что более сильная гипотеза $\mathscr{C}_\pi \subseteq \mathscr{BS}_\pi$ неверна, поскольку из описания холловых подгрупп в симметрических группах [13, теорема A4; 16] вытекает, что $S_p \in \mathscr{C}_\pi$ в примере 1.

Возможность применения теоремы 3 к изучению гипотезы 1 следует из того, что класс $\mathscr{D}_\pi$ содержит в себе все π-группы и замкнут относительно взятия гомоморфных образов, нормальных подгрупп и расширений [17, теорема 7.7]. Этот результат зависит от классификации конечных простых групп и получен в работах [17, 19–22]. Кроме того, все простые группы из класса $\mathscr{D}_\pi$ известны [18, теорема 3] (см. также [23–25; 26, замечание в конце введения]). Исходя из этого, получим следующие результаты, относящиеся к гипотезе 1.

Теорема 4. *Для любого множества π простых чисел $\mathscr{D}_\pi \subseteq \mathscr{BS}^4_\pi$.*

Теорема 5. *Пусть π — некоторое множество простых чисел и класс $\mathscr{X}$ состоит из всех конечных групп, обладающих (суб)нормальным рядом, у которого каждый фактор либо является π-группой, либо имеет порядок, делящийся не более чем на одно простое число из π. Тогда $\mathscr{X} \subseteq \mathscr{BS}_\pi$.*

Отметим, что теоремы 3 и 5 не зависят от классификации конечных простых групп, в то время как теоремы 1 и 4 опираются на результаты работ [7–11, 17, 18], использующие классификацию.

Отметим также, что из теорем 1–4 и теоремы 3 из [18] можно было бы легко получить справедливость гипотезы 1, если бы имел место такой аналог теоремы 1: $G \in \mathscr{BS}_\pi$ *для любого множества π простых чисел, отличных от* 3, *и любой конечной группы G*. Однако это утверждение неверно, как показывает следующий пример, сообщенный автору А. В. Заварницыным.

Пример 2. Пусть $q = 3^{2n+1}$, $n \geq 1$, $G = \mathrm{PSL}_2(q)$ и $\pi = \pi(q^2-1) = \pi(G) \setminus \{3\}$. Тогда $\langle x, y\rangle$ является π-группой для любых инволюций $x, y \in G$, как следует из списка подгрупп в G (см. [27, гл. II, теорема 8.27]) после простых арифметических вычислений. С другой стороны, $\mathscr{O}_\pi(G) = 1$ ввиду простоты группы G.

К сожалению, теорему 3 нельзя применить для изучения всего класса $\mathscr{BS}_\pi$, так как этот класс в общем случае не замкнут относительно взятия гомоморфных образов и расширений 2-элементами. Рассмотрим следующие примеры.

Пример 3. Пусть $p > 3$ — простое число. Обозначим через π множество всех простых чисел, строго меньших чем p, через V — естественный подстановочный модуль симметрической группы S_p над полем $\mathbb{F}_p$, а через G — естественное расширение V с помощью S_p. Пусть x — нетривиальный π-элемент из G. Тогда существует элемент $v \in V$ такой, что $v^x \neq v$, и, следовательно, $[v, x] = v^x - v$ — нетривиальный элемент π'-группы V. Имеем $[v, x] = (x^v)^{-1}x \in \langle x, x^v\rangle$. Значит, $\langle x, x^v\rangle$ не является π-группой. Таким образом, $G \in \mathscr{BS}_\pi \subseteq \mathscr{BS}^m_\pi$ для

$m \geqslant 2$ (см. ниже лемму 8(4)), в то время как гомоморфный образ S_p группы G не принадлежит $\mathscr{BS}_\pi^m$ при $m < p-1$, как мы видели ранее.[2)]

Пример 4. Пусть $\pi = \{2, 3\}$. Любой нетривиальный π-элемент в знакопеременной группе A_5 с точностью до сопряжения совпадает либо с произведением независимых транспозиций (12)(34), либо с циклом (123) длины 3. При этом произведение (13542) сопряженных элементов (12)(34) и (23)(45) имеет порядок 5 и не является π-элементом. Точно так же порядок 5 имеет произведение (12453) сопряженных элементов (123) и (345). Следовательно, только тривиальный элемент вместе с любым своим сопряженным порождает в A_5 некоторую π-подгруппу. Таким образом, $A_5 \in \mathscr{BS}_\pi$. В то же время расширение S_5 группы A_5 с помощью 2-элемента не принадлежит $\mathscr{BS}_\pi$.

Было бы интересно понять, будет ли класс $\mathscr{BS}_\pi$ замкнутым относительно взятия нормальных подгрупп.

Кроме того, в свете теоремы 1 и в связи с проблемой 1.16 из [10] естественными представляются также следующие вопросы.

Для каких множеств π, содержащих 2, класс $\mathscr{BS}_\pi$ совпадает с классом всех конечных групп?

Верно ли, что для любого фиксированного множества π простых чисел найдется такое натуральное число m, что класс $\mathscr{BS}_\pi^m$ совпадает с классом всех конечных групп? Этот вопрос достаточно изучить для случая, когда $\pi = p'$, где p — произвольное простое число.

Автор выражает признательность В. Д. Мазурову, А. В. Заварницину, Е. П. Вдовину, М. А. Гречкосеевой и А. В. Васильеву за полезные консультации.

1. Обозначения и предварительные результаты

Для натурального числа n через $\pi(n)$ будем обозначать множество простых делителей числа n, а для конечной группы G через $\pi(G)$ — множество $\pi(|G|)$. Через $\mathscr{Z}(G)$, $\mathscr{O}_\infty(G)$, x^G, $\mathscr{N}_G(H)$ и $\mathscr{C}_G(H)$ обозначаются соответственно центр группы G, ее разрешимый радикал, класс сопряженности элемента $x \in G$, нормализатор и централизатор подгруппы H.

Для конечной группы G и неотрицательного целого числа m положим

$$\mathscr{O}_\pi^m(G) = \{x \in G \mid \pi(\langle x_1, \dots, x_m \rangle) \subseteq \pi \text{ для любых } x_1, \dots, x_m \in x^G\}.$$

Непосредственно из определения множества $\mathscr{O}_\pi^m(G)$ и класса $\mathscr{BS}_\pi^m$ получаем следующие три леммы.

Лемма 6. *Пусть G — конечная группа. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) $\mathscr{O}_\pi^0(G) = G$;

(2) $\mathscr{O}_\pi^1(G)$ *совпадает с множеством π-элементов группы G;*

(3) $\mathscr{O}_\pi^0(G) \supseteq \mathscr{O}_\pi^1(G) \supseteq \mathscr{O}_\pi^2(G) \supseteq \mathscr{O}_\pi^3(G) \supseteq \dots$;

(4) $\mathscr{O}_\pi(G) = \mathscr{O}_\pi^{|G|}(G) = \bigcap\limits_{m=0}^{\infty} \mathscr{O}_\pi^m(G)$;

(5) *если $H \leq G$, то $\mathscr{O}_\pi^m(G) \cap H \subseteq \mathscr{O}_\pi^m(H)$ и $\mathscr{O}_\pi(G) \cap H \leq \mathscr{O}_\pi(H)$;*

[2)] Этот пример показывает также, что класс $\mathscr{BS}_\pi$, вообще говоря, не замкнут относительно взятия произвольных подгрупп.

(6) *если* $\overline{} : G \to H$ *— гомоморфизм групп, то* $\overline{\mathscr{O}_\pi^m(G)} \subseteq \mathscr{O}_\pi^m(\overline{G})$ *и* $\overline{\mathscr{O}_\pi(G)} \leq \mathscr{O}_\pi(\overline{G})$;

(7) *если* $H \trianglelefteq G$, *то* $\mathscr{O}_\pi(G) \cap H = \mathscr{O}_\pi(H)$;

(8) *множество* $\mathscr{O}_\pi^m(G)$ *замкнуто относительно взятия степеней элементов.*

Лемма 7. *Пусть* G *— конечная группа. Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) $G \in \mathscr{BS}_\pi^m$;

(2) $G/\mathscr{O}_\pi(G) \in \mathscr{BS}_\pi^m$;

(3) $\mathscr{O}_\pi(G) = \mathscr{O}_\pi^m(G)$;

(4) $\mathscr{O}_\pi^m(G)$ *является группой.*

Лемма 8. *Справедливы следующие утверждения:*

(1) $\mathscr{BS}_\pi^0$ *— класс всех конечных* π*-групп;*

(2) $\mathscr{BS}_\pi^1$ *— класс всех* π*-замкнутых (т. е. обладающих нормальной* π*-холловой подгруппой) конечных групп;*

(3) $\mathscr{BS}_\pi^2 = \mathscr{BS}_\pi$;

(4) $\mathscr{BS}_\pi^0 \subseteq \mathscr{BS}_\pi^1 \subseteq \mathscr{BS}_\pi^2 \subseteq \mathscr{BS}_\pi^3 \subseteq \ldots$;

(5) $\mathscr{G} = \bigcup\limits_{m=0}^{\infty} \mathscr{BS}_\pi^m$, *где* $\mathscr{G}$ *— класс всех конечных групп.*

Из лемм 6(7),(8) и 7 вытекает

Лемма 9. *Пусть* G *— конечная группа и* $\mathscr{O}_\pi(G) = 1$. *Тогда* $G \in \mathscr{BS}_\pi^m$, *если и только если множество* $\mathscr{O}_\pi^m(G)$ *не содержит элементов простого порядка.*

Лемма 10. *Пусть* U *—* π'*-подгруппа конечной группы* G *и* $x \in \mathscr{N}_G(U) \setminus \mathscr{C}_G(U)$. *Тогда* $x \notin \mathscr{O}_\pi^2(G)$.

Доказательство. Так как $x \notin \mathscr{C}_G(U)$, найдется элемент $u \in U$ такой, что $u^x \neq u$. Имеем

$$u^{-1}u^x = [u,x] = (x^u)^{-1}x \in \langle x, x^u \rangle.$$

Таким образом, $\langle x, x^u \rangle$ не является π-группой, поскольку содержит нетривиальный π'-элемент $u^{-1}u^x \in U$. Значит, $x \notin \mathscr{O}_\pi^2(G)$. $\square$

2. Доказательство теоремы 3

Докажем утверждение более сильное, чем теорема 3.

Лемма 11. *Пусть* $\mathscr{X}$ *— класс конечных групп, обладающий следующими свойствами:*

(a) *если* $G \in \mathscr{X}$ *и* $H \trianglelefteq G$, *то* $H \in \mathscr{X}$;

(b) *если* $G \in \mathscr{X}$ *и* $H \trianglelefteq G$, *то* $G/H \in \mathscr{X}$;

(c) *если* $H \trianglelefteq G$, $H \in \mathscr{X}$ *и* $|G/H| \in \pi$, *то* $G \in \mathscr{X}$.

Пусть $m \geq 2$. *Предположим, что* $\mathscr{X} \nsubseteq \mathscr{BS}_\pi^m$ *и* G *— группа наименьшего порядка из* $\mathscr{X} \setminus \mathscr{BS}_\pi^m$. *Тогда группа* G *содержит подгруппу* S *и элемент* x *такие, что*

(1) $S \trianglelefteq G$;

(2) S *является неабелевой простой группой;*

(3) S *не является* π*- или* π'*-группой;*

(4) $\mathscr{C}_G(S) = 1$;

(5) $x \in \mathscr{O}_\pi^m(G)$;

(6) x *имеет простой порядок* $p \in \pi$;

(7) $G = \langle x, S\rangle$.

Доказательство леммы разобьем на серию промежуточных шагов.

Из свойства (b) класса $\mathscr{X}$, леммы 7 и минимальности порядка группы G вытекает, что

(i) $\mathscr{O}_\pi(G) = 1$.

Из леммы 9 следует, что в $\mathscr{O}_\pi^m(G)$ содержится элемент x простого порядка. В силу выбора элемента x и ввиду леммы 6(2), (3) получаем

(ii) $x \in \mathscr{O}_\pi^m(G)$ *и* $|x| \in \pi$, *т. е. справедливы утверждения* (5) *и* (6) *леммы.*

В силу минимальности порядка группы G и лемм 6(4) и 7 замечаем, что имеет место следующее утверждение.

(iii) *Если* $x \in H$, $H < G$ *и* $H \in \mathscr{X}$, *то* $x \in \mathscr{O}_\pi(H)$.

Из (iii), леммы 6(7) и свойства (a) класса $\mathscr{X}$ получаем

(iv) *Если* $x \in H$, $H \trianglelefteq G$, *то* $H = G$.

В частности,

(v) $G = \langle x^G\rangle$.

Пусть N — минимальная нормальная подгруппа группы G. Из свойства (b), минимальности порядка группы G и лемм 6(6) и 7 получаем, что

$$Nx \in \mathscr{O}_\pi^m(G/N) \subseteq \mathscr{O}_\pi(G/N).$$

Из утверждения (v) заключаем, что

(vi) G/N — *π-группа.*

Докажем, что

(vii) $[v, x]$ *является π-элементом для любого* $v \in N$.

Действительно, так как $x \in \mathscr{O}_\pi^m(G) \subseteq \mathscr{O}_\pi^2(G)$ в силу леммы 6(3), подгруппа $\langle x, x^v\rangle$ является π-подгруппой. Теперь

$$[v, x] = v^{-1}x^{-1}vx = (x^v)^{-1}x \in \langle x, x^v\rangle,$$

откуда следует требуемое.

Ввиду (i) имеем

(viii) N *не является π-группой.*

Кроме того,

(ix) N *не является π'-группой.*

В самом деле, если это не так, то $x \in \mathscr{C}_G(N)$ по леммам 6(3) и 10. Так как $\mathscr{C}_G(N) \trianglelefteq G$, согласно (iv) получаем, что $G = \mathscr{C}_G(N)$, т. е. $N \leq \mathscr{Z}(G)$. Используя (vi) и теорему Шура — Цассенхауза [28, гл. 2, теорема 8.10], имеем $G = PN$ для некоторой π-группы P. Поскольку $N \leq \mathscr{Z}(G)$, то $P \trianglelefteq G$. Поэтому с учетом (i) получаем $P \leq \mathscr{O}_\pi(G) = 1$. Но тогда G является π'-группой и $|x| = 1$ вопреки выбору x.

Из (viii) и (ix) следует, что подгруппа N неразрешима, откуда с учетом минимальности подгруппы N вытекает

(x) $N = S_1 \times \dots \times S_n$, *где* $S_1, \dots, S_n$ — *неабелевы простые группы. Группа* G *сопряжениями действует транзитивно на множестве* $\Delta = \{S_1, \dots, S_n\}$.

Из (x) следует, что $\mathscr{C}_G(N) \cap N = 1$. Поэтому

$$\mathscr{C}_G(N) \simeq \mathscr{C}_G(N)/(\mathscr{C}_G(N) \cap N) \simeq \mathscr{C}_G(N)N/N \leq G/N.$$

Таким образом, $\mathscr{C}_G(N)$ — π-группа согласно (vi). В силу (i) и того, что $\mathscr{C}_G(N) \trianglelefteq G$, имеем

(xi) $\mathscr{C}_G(N) = 1$.

(xii) $G = \langle x, N\rangle$.

Действительно, пусть $H = \langle x, N\rangle$, и предположим, что $H < G$. Заметим, что $N \in \mathscr{X}$ по свойству (a) класса $\mathscr{X}$. Ввиду свойства (c) получаем $H \in \mathscr{X}$. Теперь из (iii) вытекает, что $x \in \mathscr{O}_\pi(H)$. Далее, $N \cap \mathscr{O}_\pi(H)$ — нормальная π-подгруппа группы N, поэтому из (viii) и минимальности подгруппы N получаем

$$N \cap \mathscr{O}_\pi(H) \le \mathscr{O}_\pi(N) = 1.$$

Таким образом, ввиду нормальности в H подгрупп N и $\mathscr{O}_\pi(H)$ имеем $[N, \mathscr{O}_\pi(H)] \le N \cap \mathscr{O}_\pi(H) = 1$ и поэтому $x \in \mathscr{O}_\pi(H) \le \mathscr{C}_G(N) = 1$ вопреки выбору x.

Пусть $S \in \Delta$ — одна из подгрупп $S_1, \dots, S_n$. Покажем, что

(xiii) *$|\Delta| = n = 1$ и $N = S$.*

С учетом (x) и (xii) подгруппа $\langle x\rangle$ транзитивно действует на множестве Δ. Допустим, что $n > 1$. Тогда $S \ne S^x$ и $[S, S^x] = 1$. В силу выбора S и утверждений (viii) и (x) в S имеется элемент u, не являющийся π-элементом. Из сказанного следует, что

$$[u^{-1}, u^x] \in [S, S^x] = 1 \ \text{ и } \ \langle u^{-1}\rangle \cap \langle u^x\rangle \le S \cap S^x = 1,$$

поэтому

$$|u^{-1}u^x| = \text{l.c.m.}(|u^{-1}|, |u^x|) = |u|.$$

Но это означает противоречие между выбором u и (vii), поскольку $u^{-1}u^x = [u, x]$.

Теперь ввиду выбора S из (viii), (ix), (xii) и (xiii) получаем

(xiv) *Справедливы утверждения* (1)–(4) *и* (7) *леммы.* □

Доказательство теоремы 3. Контрпример минимального порядка к теореме 3 должен удовлетворять лемме 11. Но это невозможно вследствие условия теоремы 3. □

3. Доказательство теоремы 1

В этом разделе мы используем обозначения и понятия из [29–33].

Следующая лемма использует результаты, полученные с помощью классификации конечных простых групп.

Лемма 12. *Пусть S — неабелева простая группа. Предположим, что конечная группа G такова, что $\mathrm{Inn}(S) \le G \le \mathrm{Aut}(S)$, и пусть $x \in G$ — элемент нечетного простого порядка такой, что для любого $g \in G$ группа $\langle x, x^g\rangle$ разрешима. Тогда $|x| = 3$ и имеет место одно из следующих утверждений:*

(1) с точностью до изоморфизма S является группой лиева типа с базовым полем $\mathbb{F}_3$ и x — длинный корневой элемент;

(2) с точностью до изоморфизма $S = G_2(3)$ и x — короткий корневой элемент;

(3) с точностью до изоморфизма $S = \mathrm{PSU}_n(2)$, $n > 3$, и x — образ в $\mathrm{PGU}_n(2)$ некоторого псевдоотражения естественного проективного модуля.

Доказательство см. [8, теорема 2.3] или [7, теорема A*] с учетом того, что трансвекция является длинным корневым элементом [34, с. 103]. □

Доказательство теоремы 1. Пусть $\mathscr{X}$ — класс всех конечных групп. Допустим, что теорема 1 неверна для некоторого множества π нечетных простых чисел, и обозначим через G группу наименьшего порядка из $\mathscr{X} \setminus \mathscr{BS}_\pi$. В соответствии с леммой 11 можно считать, что $\mathrm{Inn}(S) \le G \le \mathrm{Aut}(S)$ для некоторой неабелевой простой группы S и G обладает элементом x простого порядка

$p \in \pi$ таким, что $x \in \mathscr{O}_\pi^2(G)$ и $G = \langle x, \mathrm{Inn}(S)\rangle$. Тогда по теореме Фейта — Томпсона [34] для любого $g \in G$ группа $\langle x, x^g\rangle$ разрешима.

По лемме 12 $|x| = 3$ и выполнено одно из условий (1)–(3) в лемме 12.

Отождествим группы S и $\mathrm{Inn}(S)$.

Пусть имеет место утверждение (1) или (2) в лемме 12. Так как базовое поле имеет простой порядок, элемент x порождает некоторую длинную (или в случае $S = G_2(3)$, возможно, короткую) корневую подгруппу X^+ группы S, изоморфную аддитивной группе поля $\mathbb{F}_3$. Хорошо известно [29, с. 12 и лемма 7.2.1(ii)], что X^+ сопряжена в S с противоположной корневой подгруппой X^-. Кроме того, как следует из [34, теорема 3.2.8] и существования автоморфизма группы $G_2(3)$, переводящего длинную корневую подгруппу в короткую [29, предложение 12.4.1],

$$\langle X^+, X^-\rangle \simeq \mathrm{SL}_2(3).$$

Таким образом, элемент x вместе с некоторым сопряженным элементом порождают группу четного порядка вопреки тому, что $x \in \mathscr{O}_\pi^2(G)$ и $2 \notin \pi$.

Пусть имеет место утверждение (3) леммы 12, т. е. $S = \mathrm{PSU}_n(2)$, $n > 3$, и $x \in \mathrm{PGU}_n(2)$ — элемент порядка 3, являющийся образом в $\mathrm{PGU}_n(2)$ некоторого псевдоотражения[3)] из $\mathrm{GU}_n(2)$. Пусть V — естественный модуль размерности n над полем F из четырех элементов для группы $\mathrm{GU}_n(2)$, которую мы отождествим с группой $\mathrm{GU}(V)$, считая, что на V задана соответствующая унитарная форма. Пусть τ — псевдоотражение, образ которого в $\mathrm{PGU}_n(2)$ совпадает с x. Тогда V раскладывается в ортогональную прямую сумму

$$V = U \perp W,$$

где U — невырожденное одномерное τ-инвариантное подпространство, на котором τ действует нетривиальным образом, а

$$W = U^\perp = \{w \in V \mid w\tau = w\}.$$

Так как $\dim V = n > 3$, выберем в W невырожденное трехмерное подпространство W_1. Обозначим через W_0 ортогональное дополнение в W к подпространству W_1. Тогда

$$V = U \perp W_1 \perp W_0.$$

Рассмотрим в группе $\mathrm{GU}(V)$ подгруппу L, состоящую из всех преобразований пространства V, которые действуют тождественно на W_0. Тогда $L \simeq \mathrm{GU}_4(2)$ и $\tau \in L \setminus \mathscr{Z}(L)$, поскольку τ не коммутирует с элементами из L, переставляющими векторы ортонормированного базиса пространства $U \perp W_1$, один из которых принадлежит U. В силу того, что

$$L \simeq \mathrm{GU}_4(2) \simeq 3 \times \mathrm{PSU}_4(2) \simeq 3 \times \mathrm{PSp}_4(3)$$

(см. [31, с. 26; 32, предложение 2.9.1(xv)]), с учетом доказанного элемент τ и некоторый сопряженный с ним в L элемент порождают подгруппу четного

[3)] Напомним [30, с. 94], определение псевдоотражения. Пусть F — поле, допускающее инволютивный автоморфизм $\alpha \mapsto \bar{\alpha}$, $\alpha \in F$. Пусть V — невырожденное унитарное пространство над F. Элемент τ унитарной группы $\mathrm{GU}(V)$ назовем *псевдоотражением*, если для некоторого невырожденного вектора $u \in V$ выполнено $u\tau = \alpha u$, где $\alpha \in F \setminus \{1\}$ — элемент такой, что $\alpha\bar{\alpha} = 1$, и для любого вектора $w \in \langle u\rangle^\perp$ выполнено $w\tau = w$. Поскольку определитель такого псевдоотражения равен $\alpha \neq 1$, в рассматриваемом нами случае элемент x лежит не в самой группе S, а в ее расширении с помощью диагонального автоморфизма.

порядка. Ввиду того, что порядок центра группы $\mathrm{GU}_n(2)$ равен 3, элемент x и некоторый сопряженный с ним в образе подгруппы L элемент также порождают подгруппу четного порядка. Это противоречит тому, что $x \in \mathscr{O}^2_\pi(G)$. $\square$

Доказательство следствия 2. Пусть $\pi = 2'$ и $x \in X$. Тогда для любого $g \in G$ подгруппа $\langle x, x^g\rangle \leq \langle X, X^g\rangle$ имеет нечетный порядок и, следовательно, является π-группой. По теореме 1 имеем $x \in \mathscr{O}_\pi(G) = \mathscr{O}(G)$ и, значит, $X \leq \mathscr{O}(G)$ ввиду произвольности $x \in X$. $\square$

4. Доказательство теорем 4 и 5

Сначала докажем теорему 5, а теорему 4 получим из нее, используя результаты работ [7–11, 17, 18].

Доказательство теоремы 5. Допустим, что теорема 5 неверна для некоторого множества π простых чисел, и пусть $G \in \mathscr{X} \setminus \mathscr{BS}_\pi$ — группа наименьшего порядка. Из определения класса $\mathscr{X}$ следует, что любой композиционный фактор группы G либо является π- или π'-группой, либо имеет порядок, делящийся ровно на одно простое число из π.

Класс $\mathscr{X}$ обладает свойствами (a)–(c) в условии леммы 11. Поэтому существует неабелева простая нормальная подгруппа S группы G такая, что $\mathscr{C}_G(S) = 1$, причем S не является π- или π'-группой. В частности, S является единственной минимальной нормальной подгруппой группы G. Кроме того, $G = \langle x, S\rangle$ для некоторого элемента $x \in \mathscr{O}^2_\pi(G)$ простого порядка $p \in \pi$. Поскольку S не является π- или π'-группой и $G \in \mathscr{X}$, имеем $\pi \cap \pi(S) = \{q\}$ для некоторого простого числа q и ввиду теоремы Бэра — Судзуки $p \neq q$. Таким образом, $(|x|, |S|) = 1$, откуда, в частности, $x \notin S$.

Как следует из [35, (18.7)], для любого $r \in \pi(S)$ группа S содержит x-инвариантную силовскую r-подгруппу R. Из леммы 10 вытекает, что если $r \neq q$, то $x \in \mathscr{C}_G(R)$. Значит, число $|S : C|$, где $C = \mathscr{C}_S(x)$, является степенью числа q. Обозначим через Q некоторую x-инвариантную силовскую q-подгруппу группы S. Тогда ввиду вышесказанного $S = QC$.

Из сопряженности силовских q-подгрупп получаем, что всякая силовская q-подгруппа группы S имеет вид Q^c для подходящего элемента $c \in C$. Положим

$$H = \bigcap_{s\in S} \mathscr{N}_G(Q^s) = \bigcap_{c\in C} \mathscr{N}_G(Q^c).$$

Ясно, что $H \trianglelefteq G$. Из определения подгрупп C и Q следует, что

$$Q^{cx} = Q^{xc} = Q^c$$

для любого $c \in C$. Поэтому $x \in H$ и, в частности, $H \neq 1$. Ввиду того, что S — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G, имеем $S \leq H$. Таким образом,

$$G = \langle S, x\rangle \leq H \leq G,$$

откуда $G = H$. Из определения подгруппы H следует, что всякая силовская q-подгруппа группы S нормальна в G. Это противоречит выбору S. $\square$

Доказательство теоремы 4. Допустим, что теорема 4 неверна. Обозначим через G некоторую группу из $\mathscr{D}_\pi \setminus \mathscr{BS}^4_\pi$, имеющую наименьший возможный порядок. Класс $\mathscr{D}_\pi$ обладает свойствами (a)–(c) из леммы 11 согласно [17, теорема 7.7]. Поэтому в силу леммы 11 можно считать, что $\mathrm{Inn}(S) \leq G \leq \mathrm{Aut}(S)$

для некоторой неабелевой простой группы S, причем $G = \langle x, \mathrm{Inn}(S)\rangle$ для некоторого нетривиального элемента $x \in \mathscr{O}^4_\pi(G)$ и S не является π- или π'-группой. Из теоремы 5 вытекает также, что $|\pi \cap \pi(S)| \geq 2$. Так как $S \simeq \mathrm{Inn}(S) \trianglelefteq G \in \mathscr{D}_\pi$, согласно [17, теорема 7.7] или [26, следствие 1.3] имеем $S \in \mathscr{D}_\pi$. Из [18, теорема 3; 34; 17, лемма 5.1 и теорема 5.2] следует, что любая π-холлова подгруппа группы S разрешима. Тогда разрешима и любая π-холлова подгруппа группы G. Ввиду того, что $G \in \mathscr{D}_\pi$ и $x \in \mathscr{O}^4_\pi(G)$, для любых элементов $g_1, g_2, g_3 \in G$ подгруппа $\langle x, x^{g_1}, x^{g_2}, x^{g_2}\rangle$ содержится в некоторой π-холловой подгруппе группы G и поэтому также разрешима. Из [11, теорема 1.3] или [8, следствие 1.2] вытекает, что $x \in \mathscr{O}_\infty(G) = 1$; противоречие. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Baer R.* Engelsche Elemente Noetherscher Gruppen // Math. Ann. 1957. V. 133. P. 256–270.

2. *Suzuki M.* Finite groups in which the centralizer of any element of order 2 is 2-closed // Ann. Math. 1968. V. 82, N 2. P. 191–212.

3. *Alperin J., Lyons R.* On conjugacy classes of p-elements // J. Algebra. 1971. V. 19, N 2. P. 536–537.

4. *Мамонтов А. С.* Аналог теоремы Бэра — Сузуки для бесконечных групп // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 2. С. 394–398.

5. *Созутов А. И.* Об одном обобщении теоремы Бэра — Судзуки // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 45, № 3. С. 674–675.

6. *Flavell P.* A weak soluble analogue of the Baer–Suzuki theorem (Preprint) (http://web.mat.bham.ac.uk/P.J.Flavell/research/preprints).

7. *Guest S.* A solvable version of the Baer–Suzuki theorem // Trans. Amer. Math. Soc. 2010. V. 362, N 11. P. 5909–5946.

8. *Flavell P., Guest S., Guralnick R.* Characterizations of the solvable radical // Proc. Amer. Math. Soc. 2010. V. 138, N 4. P. 1161–1170.

9. *Gordeev N., Grunewald F., Kunyavskii B., Plotkin E.* A description of Baer–Suzuki type of the solvable radical of a finite group // J. Pure Appl. Algebra. 2009. V. 213, N 2. P. 250–258.

10. *Gordeev N., Grunewald F., Kunyavskii B., Plotkin E.* Baer–Suzuki theorem for the solvable radical of a finite group // C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. I. 2009. V. 347, N 5–6. P. 217–222.

11. *Gordeev N., Grunewald F., Kunyavskii B., Plotkin E.* From Thompson to Baer–Suzuki: a sharp characterization of the solvable radical // J. Algebra. 2010. V. 323, N 10. P. 2888–2904.

12. *Тютянов В. Н.* О существовании разрешимых нормальных подгрупп в конечных группах // Мат. заметки. 1997. Т. 61, № 5. С. 754–758.

13. *Hall P.* Theorems like Sylow's // Proc. London Math. Soc. 1956. V. 6, N 22. P. 286–304.

14. *Wielandt H.* Zum Satz von Sylow // Math. Z. 1954. Bd 60. Heft 4. S. 407–408.

15. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. Berlin, New York: Walter de Gruyter, 1992.

16. *Thompson J. G.* Hall subgroups of the symmetric groups // J. Comb. Theory. 1966. V. 1, N 2. P. 271–279.

17. *Revin D. O., Vdovin E. P.* Hall subgroups of finite groups. Ischia group theory. 2004: Proc. Conf. in honour of Marcel Herzog // Contemp. Math. 2006. V. 402. P. 229–265.

18. *Ревин Д. О.* Свойство D_π в конечных простых группах // Алгебра и логика. 2008. Т. 47, № 3. С. 364–394.

19. *Мазуров В. Д., Ревин Д. О.* О холловом D_π-свойстве для конечных групп // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, № 1. С. 106–113.

20. *Ревин Д. О.* Холловы π-подгруппы конечных групп Шевалле, характеристика которых принадлежит π // Мат. тр. 1999. Т. 2, № 1. С. 157–205.

21. *Вдовин Е. П., Ревин Д. О.* Холловы подгруппы нечетного порядка конечных групп // Алгебра и логика. 2002. Т. 41, № 1. С. 15–56.

22. *Ревин Д. О.* Свойство D_π в одном классе конечных групп // Алгебра и логика. 2002. Т. 41, № 3. С. 335–370.

23. *Ревин Д. О.* Свойство D_π конечных групп в случае, когда $2 \notin \pi$ // Тр. ИММ УрО РАН. 2006. Т. 13, № 1. С. 166–182.

24. *Ревин Д. О.* Характеризация конечных D_π-групп // Докл. РАН. 2007. Т. 417. С. 601–604.

25. *Ревин Д. О.* Свойство D_π в линейных и унитарных группах // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 2. С. 437–448.

26. *Revin D. O., Vdovin E. P.* On the number of classes of conjugate Hall subgroups in finite simple groups // J. Algebra. 2010. V. 324, N 12. P. 3614–3652.

27. *Huppert B.* Endliche Gruppen. I. Berlin: Springer-Verl., 1967.

28. *Suzuki M.* Group theory. I. New York: Springer-Verl., 1982.

29. *Carter R. W.* Simple groups of Lie type. London: John Wiley and Sons, 1972.

30. *Grove L. C.* Classical groups and geometric algebra.. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2002. (Grad. Stud. Math.; V. 39).

31. *Conway J. H., Curtis R. T., Norton S. P., Parker R. A., Wilson R. A.* Atlas of finite groups. Oxford: Clarendon Press, 1985.

32. *Kleidman P. B., Liebeck M.* The subgroup structure of finite classical groups. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990.

33. *Gorenstein D., Lyons R., Solomon R.* The classification of the finite simple groups. Number 3. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1998.

34. *Feit W., Thompson J. G.* Solvability of groups of odd order // Pacif. J. Math. 1963. V. 13, N 3. P. 775–1029.

35. *Aschbacher M.* Finite group theory. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1986.

Статья поступила 2 июня 2010 г.

Ревин Данила Олегович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет, механико-математический факультет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
`revin@math.nsc.ru`