Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2011. Том 52, № 2

УДК 517.54

ЧАСТИЧНЫЕ СУММЫ И ПРОБЛЕМА РАДИУСА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

М. Обрадович, С. Поннусами

Аннотация. Пусть $\mathscr{A}$ — множество нормированных аналитических функций $f(z) = z + \sum\limits_{k=2}^{\infty} a_k z^k$ в единичном круге $|z| < 1$ и $s_n(z)$ — n-я частичная сумма $f(z)$. Получена оценка для $\left|\frac{s_n(z)}{f(z)} - 1\right|$, когда $f \in \mathscr{A}$ однолистна в $\mathbb{D}$. Пусть $\mathscr{U}$ — множество всех $f \in \mathscr{A}$ в $\mathbb{D}$, удовлетворяющих условию

$$\left|f'(z)\left(\frac{z}{f(z)}\right)^2 - 1\right| < 1$$

при $|z| < 1$. В случае $f''(0) = 0$ доказано, что все соответствующие s_n для $f \in \mathscr{U}$ принадлежат $\mathscr{U}$ в круге $|z| < 1 - \frac{3\log n - \log(\log n)}{n}$ при $n \geq 5$. В этом случае показано также, что $\operatorname{Re}(f(z)/s_n(z)) > 1/2$ в круге $|z| < \sqrt{\sqrt{5} - 2}$. Найдены необходимые условия на коэффициенты для функций из $\mathscr{U}$ и соответствующей проблемы радиуса в подклассах из $\mathscr{U}$. В качестве следствия получено, что если $f \in \mathscr{U}$, то для $n \geq 3$ выполнена оценка

$$\left|\frac{f(z)}{s_n(z)} - \frac{4}{3}\right| < \frac{2}{3} \quad \text{для } |z| < r_n := 1 - \frac{2\log n}{n}.$$

Ключевые слова: коэффициентное неравенство, частичная сумма, радиус однолистности, аналитичность, однолистные и звездообразные функции.

1. Введение и предварительные сведения

Пусть $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ — единичный круг в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и $\mathscr{H}$ — пространство всех функций, аналитических в $\mathbb{D}$. Мы рассматриваем $\mathscr{H}$ как топологическое пространство с топологией равномерной сходимости на компактах в $\mathbb{D}$. Пусть $\mathscr{A}$ — семейство всех функций $f \in \mathscr{H}$, удовлетворяющих условию нормирования $f(0) = 0 = f'(0) - 1$, и пусть

$$\mathscr{S} = \{f \in \mathscr{A} \mid f \text{ взаимно однозначно в } \mathbb{D}\}.$$

Однолистные функции обладают многими замечательными свойствами благодаря их глобальной инъективности. Изучение экстремальных задач в разных подклассах из $\mathscr{S}$ имеет длинную историю и продолжает играть видную роль в геометрической теории функций (см. недавний обзор [1] для случая конформных отображений). Классы выпуклых, звездообразных и почти выпуклых

The work of the first author was supported by MNZZS Grant, No. ON174017, Serbia.

функций, являющиеся важными подклассами в $\mathscr{S}$, будем обозначать через $\mathscr{C}$, $\mathscr{S}^*$ и $\mathscr{K}$ соответственно. Описание этих классов можно найти в [2, 3].

Для $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$ из $\mathscr{A}$ и $n \in \mathbb{N}$ будем обозначать через

$$s_n(f,z) = z + \sum_{k=2}^{n} a_k z^k$$

n-ю частичную сумму или сечение f. Поскольку функция, от которой берется частичная сумма, легко восстанавливаема из контекста, будем использовать более простое обозначение $s_n(z)$ вместо $s_n(f,z)$. Вопрос о нахождении наибольшего радиуса однолистности r_n для $s_n(z)$, когда f принадлежит $\mathscr{S}$ или одному из интересных подклассов, обсуждался многими исследователями [4–7]. При $n = 2$ ясно, что $s_n(z) = z + a_2 z^2$ однолистна в $\mathbb{D}$ тогда и только тогда, когда $|a_2| \leq 1/2$. Для $n > 2$ необходимое условие однолистности $s_n(z)$, состоящее в оценке $|a_n| \leq 1/n$, далеко от достаточного. Это вытекает из теоремы Руше о том, что для $f \in \mathscr{S}$ радиус однолистности r_n сечения $s_n(z)$ стремится к 1 при $n \to \infty$. Также классическим результатом является тот факт, что если $f \in \mathscr{S}$, то для любого $n \geq 2$ сечение $s_n(z)$ однолистно в круге $|z| < 1/4$ (см. [8]). Радиус 1/4 наилучший из возможных, как показывает вторая частичная сумма функции Кёбе $k(z) = z/(1-z)^2$. Отметим, что задача нахождения наилучшего из возможных радиусов для r_n далеко не тривиальна даже в случае $n = 3$.

В [5] Робертсон доказал, что n-я частичная сумма произвольной $f \in \mathscr{S}^*$ звездообразна в круге радиуса $1 - 4n^{-1}\log n$ (см. также [4]). В дальнейшем он показал, что сечение функции Кёбе $k(z)$ однолистно в круге $|z| < 1 - 3n^{-1}\log n$ и что константа 3 неулучшаема. Кроме того, несмотря на то, что радиус однолистности r_n для $s_n(z)$ $(f \in \mathscr{S})$ до сих пор неизвестен, в [4] отмечено, что модификация доказательства из [8] дает оценку

$$r_n \geq 1 - (4+\epsilon)n^{-1}\log n$$

для любого $\epsilon > 0$ и достаточно большого n. Стоит вспомнить, что в [9, с. 408] доказано, что функция Кёбе не экстремальна для радиуса однолистности частичных сумм функций $f \in \mathscr{S}$. Однако известная теорема о свертке позволяет немедленно заключить, что если f принадлежит $\mathscr{C}$, $\mathscr{S}^*$ или $\mathscr{K}$, то ее n-е сечение относительно выпукло, звездообразно или почти выпукло в круге $|z| < 1 - 3n^{-1}\log n$ для $n \geq 5$. Здесь мы будем изучать функции $f \in \mathscr{A}$, имеющие вид

$$\frac{z}{f(z)} = 1 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots \quad \text{с } b_n \geq 0 \text{ для любого } n \geq 2 \tag{1}$$

при всех z в окрестности $z = 0$. Заметим, что ввиду аналитичности f в $\mathbb{D}$ имеем $\frac{z}{f(z)} \neq 0$ для $z \in \mathbb{D}$, однако $\frac{z}{f(z)}$ может иметь полюсы в $\mathbb{D}$. Такие классы функций изучались многими авторами (см., например, [10]).

Теорема 1. *Пусть $f \in \mathscr{S}$ и $s_n(z)$ — частичная сумма. Если f имеет вид (1), где b_k вещественны и неотрицательны при всех $k \geq 2$, то для любого $n \geq 2$*

$$\left|\frac{s_n(z)}{f(z)} - 1\right| < |z|^n(n + 1 - n\log(1-|z|)), \quad z \in \mathbb{D}.$$

В частности,

$$\left|\frac{s_n(z)}{f(z)} - 1\right| < 1$$

представляет собой круг $|z| < r$, где r — единственный положительный корень уравнения

$$1 - r^n(n + 1 - n\log(1 - r)) = 0 \tag{2}$$

и $r \geq r_n = 1 - \frac{2\log n}{n}$ для любого $n \geq 3$.

Замечание 1. Простые прямые вычисления с использованием программы «Математика» показывают, что величины r, соответствующие $n = 2, 3, 4, 5$ согласно (2), таковы: $r = 0.481484$, $r = 0.540505$, $r = 0.585302$, $r = 0.620769$.

Важно отметить, что каждой $f \in \mathscr{S}$ соответствует степенной ряд вида (1), однако коэффициенты b_n необязательно неотрицательны для всех $n \geq 2$. Теорема 1 показывает, что если $b_n \geq 0$ при каждом $n \geq 2$, то мы обладаем важной информацией относительно $s_n(z)/f(z)$.

Рассмотрим другой класс функций, интенсивно изучавшийся в последнее время. Пусть [11–13]

$$\mathscr{U} = \left\{ f \in \mathscr{A} : \left| f'(z)\left(\frac{z}{f(z)}\right)^2 - 1 \right| < 1 \ \text{ для } z \in \mathbb{D} \right\}.$$

Можно сказать, что f принадлежит $\mathscr{U}$ в круге $|z| < r$, если предыдущее неравенство выполнено для $|z| < r$, а не во всем единичном круге $\mathbb{D}$. Иными словами, это эквивалентно тому, что g, определенная равенством $g(z) = r^{-1}f(rz)$, принадлежит $\mathscr{U}$, когда f принадлежит $\mathscr{U}$ в круге $|z| < r$. В последние годы подробно изучались класс $\mathscr{U}$ и его взаимосвязи с некоторыми подклассами из $\mathscr{S}$ вместе с некоторыми интегральными преобразованиями (см. [12–15]). Известно, что $\mathscr{U} \subsetneq \mathscr{S}$. Любопытно, что функция Кёбе принадлежит $\mathscr{U}$, хотя функции из $\mathscr{U}$ необязательно звездообразны в $\mathbb{D}$ (см., например, [13]). Так как функция Кёбе лежит в $\mathscr{U}$, естественно поставить вопрос: окажутся ли частичные суммы $s_n(z)$ функции $f \in \mathscr{U}$ в $\mathscr{U}$ в круге $|z| < 1 - 3n^{-1}\log n$?

Гипотеза 1. *Если $f(z) = z + \sum\limits_{k=2}^{\infty} a_k z^k$ принадлежит классу $\mathscr{U}$, то n-я частичная сумма*

$$s_n(z) = z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$$

принадлежит классу $\mathscr{U}$ в круге $|z| < 1 - 3n^{-1}\log n$ для $n \geq 5$. Этот результат точный для функции Кёбе в том смысле, что 3 нельзя заменить меньшим числом.

Недавно Фурнье и Поннусами доказали [14], что существуют незвездообразные функции $f \in \mathscr{U}$ такие, что

$$0 < \frac{\sqrt{2 - a^2} - a}{2} < \sup_{z \in \mathbb{D}} \left| f'(z)\left(\frac{z}{f(z)}\right)^2 - 1 \right| \leq 1 - a, \quad a := |f''(0)|/2 \leq 1.$$

Из этих рассуждений ясно, что если гипотез 1 верна, то ее можно использовать для формирования функций в $\mathscr{S} \backslash \mathscr{S}^*$, для которых $s_n(z)$ однолистно при $|z| < 1 - 3n^{-1}\log n$ для $n \geq 5$, однако аналогичный точный результат для всего класса $\mathscr{S}$ остается открытым. Напомним, что если положить

$$L = \left\{ z, \frac{z}{(1 \pm z)^2}, \frac{z}{1 \pm z}, \frac{z}{1 \pm z^2}, \frac{z}{1 \pm z + z^2} \right\},$$

то каждая из функций этого набора входит в $\mathscr{U} \cap \mathscr{S}^*$ и множество L совпадает с классом функций в $\mathscr{S}$, имеющих целые коэффициенты в разложении в степенной ряд [16]. Более того, каждая из этих функций играет важную роль в теории функций, так как они вместе с вращениями экстремальны для известных подсемейств в $\mathcal{S}$. Значительный интерес к классу $\mathcal{S}$ (соответственно $\mathcal{U}$) связан, в частности, с обращением в нуль второго коэффициента в разложении в ряд Тейлора.

Теорема 2. *Если* $f(z) = z + \sum_{k=3}^{\infty} a_k z^k$ (*т. е.* $a_2 = 0$) *принадлежит классу* $\mathcal{U}$, *то n-я частичная сумма*

$$s_n(z) = z + a_3 z^3 + \cdots + a_n z^n$$

входит в класс $\mathcal{U}$ *в круге* $|z| < r$, *где* r — *единственный положительный корень уравнения*

$$(1-r)^3(1+r)^2 - r^n(1+r^2)^2[5+r+n(1-r^2)] = 0.$$

В частности, для $n \geq 5$ *будет* $r \geq r_n = 1 - \frac{3\log n - \log(\log n)}{n}$.

Несложными вычислениями для $n = 3, 4, 5$ можно получить $r = 0.361697$, $r = 0.423274$, $r = 0.470298$ соответственно. В завершение сформулируем следующее утверждение (см. также теорему 6).

Теорема 3. *Пусть* $f(z) = z + \sum_{k=3}^{\infty} a_k z^k$ (*т. е.* $a_2 = 0$) *входит в класс* $\mathcal{U}$. *Тогда для каждого натурального* $n \geq 2$ *имеет место оценка*

$$\operatorname{Re}\left(\frac{f(z)}{s_n(z)}\right) > \frac{1}{2}$$

в круге $|z| < \sqrt{\sqrt{5} - 2}$.

Интересно выяснить точность этих двух теорем. Аналог теоремы 1 для функций в $\mathcal{U}$ установлен в теореме 6. Для больших n мы докажем важную версию теоремы 3 в следствии 1, применимом в общем случае.

2. Доказательство теоремы 1

Сначала напомним один из недавних результатов [17].

Теорема A. *Пусть* $f \in \mathcal{A}$ *имеет вид* (1). *Тогда*

$$f \in \mathcal{S} \iff \frac{f(z)f'(z)}{z} \neq 0 \text{ для } z \in \mathbb{D} \iff \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)b_n \leq 1 \iff f \in \mathcal{U}.$$

Теперь приступим к доказательству теоремы 1. Можно считать, что $f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots$ и тем самым $s_n(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots + a_n z^n$ — n-я частичная сумма. Так как f представима также в виде (1), имеем

$$(1 + a_2 z + a_3 z^2 + \cdots)(1 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots) = 1.$$

Из последнего равенства вытекает, что

$$\sum_{k=1}^{m-1} b_k a_{m-k} + a_m = 0 \quad (m = 2, 3, \ldots;\ a_1 = 1). \tag{3}$$

Используя представление для частичных сумм, получаем

$$\frac{s_n(z)}{f(z)} = (1+a_2 z+a_3 z^2+\cdots+a_n z^{n-1})(1+b_1 z+b_2 z^2+\cdots) = 1+c_n z^n+c_{n+1} z^{n+1}+\cdots,$$

где $c_n = b_1a_n + b_2a_{n-1} + \cdots + b_na_1$. Согласно (3) коэффициенты при z^k для $k = 1, 2, \ldots, n-1$ обращаются в нуль. Уравнение (3) для $m = n+1$ показывает, что $c_n = -a_{n+1}$. Кроме того,

$$c_m = b_{m-n+1}a_n + b_{m-n+2}a_{n-1} + \cdots + b_ma_1, \quad \text{для } m = n+1, n+2, \ldots .$$

По теореме де Бранже $|a_n| \le n$ для любого $n \ge 2$, стало быть,

$$\begin{aligned}|c_m| &\le nb_{m-n+1} + (n-1)b_{m-n+2} + \cdots + b_m \\ &= \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \cdots + \alpha_n\beta_n \text{ (допустим)},\end{aligned} \tag{4}$$

где

$$\alpha_k = \frac{n+1-k}{m-n+k-1} \quad \text{и} \quad \beta_k = (m-n+k-1)b_{m-n+k}.$$

Полагая $B_k = \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_k$ для $k = 1, 2, \ldots, n$, по теореме A получаем, что $B_k \le 1$ при каждом $k \ge 1$. Применяя преобразование Абеля, имеем

$$|c_m| \le \alpha_nB_n + \sum_{k=1}^{n-1}(\alpha_k - \alpha_{k+1})B_k \le \alpha_n + \sum_{k=1}^{n-1}(\alpha_k - \alpha_{k+1}) = \alpha_1,$$

так что приходим к следующему неравенству на коэффициенты для c_m:

$$|c_m| \le \frac{n}{m-n} \quad \text{при } m = n+1, n+2, \ldots .$$

Из этого неравенства и того факта, что $|c_n| = |a_{n+1}| \le n+1$, вытекает, что

$$\begin{aligned}\left|\frac{s_n(z)}{f(z)} - 1\right| &\le |c_n|\,|z|^n + |c_{n+1}|\,|z|^{n+1} + \cdots \le (n+1)|z|^n + n|z|^{n+1} + \frac{n}{2}|z|^{n+2} + \cdots \\ &= |z|^n(n+1+n(|z| + (1/2)|z|^2 + \cdots)) = |z|^n(n+1-n\log(1-|z|))\end{aligned}$$

при $n \ge 2$. Доказательство первой части закончено.

Найдем оценку радиуса r_n круга с центром в нуле такого, что

$$\left|\frac{s_n(z)}{f(z)} - 1\right| < 1 \tag{5}$$

при $|z| \le r_n$. По существу, мы покажем, что $r_n = 1 - \frac{2\log n}{n}$. Для этого достаточно доказать, что неравенство

$$1 - r^n(n+1-n\log(1-r)) > 0$$

выполнено при $r = r_n$. Пусть $r = 1 - \alpha/n$. Ввиду того, что $e^{-\alpha/n} \ge 1 - \alpha/n$, последнее неравенство выполнено, если

$$e^{\alpha} - (n+1-n\log(\alpha/n)) > 0$$

с $\alpha = 2\log n$ при $n \ge 3$. Положив $\alpha = 2\log n$, получим, что последнее неравенство примет вид

$$n^2 - n - 1 + n\log(2\log n/n)) > 0.$$

Наконец, так как $n^2 - n - 1 \ge (5/9)n^2$ для $n \ge 3$, последнее неравенство верно, если

$$(5/9)n - \log(n/(2\log n)) > 0.$$

Однако это неравенство, очевидно, верно при $n \ge 3$. Стало быть, (5) имеет место для $|z| = 1 - \frac{2\log n}{n}$ и в силу принципа максимума модуля для аналитических функций неравенство (5) выполнено при $|z| \le 1 - \frac{2\log n}{n}$. Теорема доказана.

3. Доказательства теорем 2 и 3

Для доказательства теоремы 2 полезно следующее наблюдение. Пусть $f \in \mathscr{U}$ и $a_2 = f''(0)/2$. Тогда

$$f'(z)\left(\frac{z}{f(z)}\right)^2 = 1 + w(z), \tag{6}$$

так что каждая $f \in \mathscr{U}$ может быть записана в виде

$$-z\left(\frac{z}{f(z)}\right)' + \frac{z}{f(z)} = 1 + w(z) = 1 + w_2 z^2 + \cdots, \quad z \in \mathbb{D}, \tag{7}$$

где $w : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ аналитическая и $w(0) = w'(0) = 0$. Из (7) легко вытекает, что

$$\frac{z}{f(z)} = 1 - a_2 z - \int\limits_0^1 \frac{w(tz)}{t^2}\, dt, \quad z \in \mathbb{D}. \tag{8}$$

Несложные вычисления показывают, что

$$\frac{z}{f(z)} = 1 - a_2 z - z\left[\frac{w(z)}{z} * (-\log(1-z))\right],$$

где $*$ означает обычную свертку (или произведение Адамара). Тем самым каждая $f \in \mathscr{U}$ имеет представление

$$f(z) = \frac{z}{1 - a_2 z - z[W(z) * (-\log(1-z))]},$$

где $W : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ аналитична и $W(0) = 0$.

Доказательство теоремы 2. Пусть $f \in \mathscr{U}$ и $f''(0) = 0$. Тогда ввиду (6)

$$\left|f'(z)\left(\frac{z}{f(z)}\right)^2 - 1\right| \le |z|^2 \text{ для } z \in \mathbb{D}. \tag{9}$$

Кроме того, (8) выполнено с $a_2 = 0$ и по лемме Шварца $|w(z)| \le |z|^2$ в $\mathbb{D}$. Отсюда и из (8) легко получить, что

$$\left|\frac{z}{f(z)} - 1\right| \le |z|^2, \quad z \in \mathbb{D},$$

и несложные вычисления приводят к оценке

$$\left|\frac{f(z)}{z} - \frac{1}{1-|z|^4}\right| \le \frac{|z|^2}{1-|z|^4}, \quad |z| = r < 1,$$

стало быть,

$$\frac{|z|}{1+|z|^2} \le |f(z)| \le \frac{|z|}{1-|z|^2}, \quad |z| = r < 1, \tag{10}$$

и

$$\operatorname{Re}\left(\frac{f(z)}{z}\right) \ge \frac{1}{1+|z|^2} > \frac{1}{2}, \quad |z| = r < 1.$$

Согласно последним наблюдениям для любой $f \in \mathscr{U}$ с $f''(0) = 0$ имеем $|a_k| = |f^{(k)}(0)|/k! \le 1$ для каждого $k \ge 3$. Пусть теперь $f(z) = s_n(z) + R_n(z)$, где

$$R_n(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^k.$$

Так как $|a_k| \le 1$ при $k \ge 3$, для $|z| = r < 1$ имеем

$$|R_n(z)| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} r^k = \frac{r^{n+1}}{1-r} \quad \text{и} \quad |R_n'(z)| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} kr^{k-1} = \frac{r^n[1+n(1-r)]}{(1-r)^2}$$

и из (10) выводим, что

$$|f(z)| - |R_n(z)| \ge \frac{r}{1+r^2} - \frac{r^{n+1}}{1-r} = \frac{r[1-r-r^n(1+r^2)]}{(1-r)(1+r^2)} > 0,$$

где $1 - r - r^n(1+r^2) > 0$, а это выполнено согласно условию $|z| < r_n$. Более того, для $|z| = r = r_n$ имеем

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\left(\frac{s_n(z)}{z}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{f(z)}{z}\right) - \operatorname{Re}\left(\frac{R_n(z)}{z}\right) \ge \operatorname{Re}\left(\frac{f(z)}{z}\right) - \left|\frac{R_n(z)}{z}\right| \\ = \frac{1}{1+r^2} - \frac{r^n}{1-r} = \frac{1-r-r^n(1+r^2)}{(1-r)(1+r^2)} > 0,\end{aligned}$$

а это с учетом принципа максимума модуля показывает, что $s_n(z) \ne 0$ для $0 < |z| \le r_n$ и $s_n(z)$ имеет простой нуль в начале. Далее, поскольку

$$s_n(z) = f(z) - R_n(z)$$

и $s_n'(z) = f'(z) - R_n'(z)$, применение неравенства треугольника и (9) дает оценку

$$\begin{aligned}\left|s_n'(z)\left(\frac{z}{s_n(z)}\right)^2 - 1\right| &= \left|f'(z)\left(\frac{z}{f(z)-R_n(z)}\right)^2 - R_n'(z)\left(\frac{z}{f(z)-R_n(z)}\right)^2 - 1\right| \\ &= \left|\left(f'(z)\left(\frac{z}{f(z)}\right)^2 - 1\right)\left(\frac{f(z)}{f(z)-R_n(z)}\right)^2 + \frac{2f(z)R_n(z) - z^2R_n'(z) - R_n^2(z)}{(f(z)-R_n(z))^2}\right| \\ &\le \left|f'(z)\left(\frac{z}{f(z)}\right)^2 - 1\right|\left|\frac{f(z)}{f(z)-R_n(z)}\right|^2 + \frac{2|f(z)|\,|R_n(z)| + |z|^2|R_n'(z)| + |R_n(z)|^2}{(|f(z)|-|R_n(z)|)^2} \\ &\le \frac{|z|^2|f(z)|^2 + 2|f(z)||R_n(z)| + |z|^2|R_n'(z)| + |R_n(z)|^2}{(|f(z)|-|R_n(z)|)^2}.\end{aligned}$$

Для завершения доказательства достаточно показать, что величина в правой части последнего неравенства не больше 1 для $|z| < r_n$. Это обеспечено тем, что неравенство

$$(1-r^2)|f(z)|^2 - 4|f(z)|\,|R_n(z)| - r^2|R_n'(z)| > 0 \tag{11}$$

верно при $|z| = r_n$ (ибо по принципу максимума модуля аналитической функции применительно к $s_n'(z)\,(z/s_n(z))^2$ получаем, что $s_n \in \mathscr{U}$ верно для $|z| \le r_n$). Используя оценки для $|f(z)|$, $|R_n(z)|$ и $|R_n'(z)|$, выводим, что (11) выполнено для $|z| = r_n$, если

$$\frac{1-r^2}{(1+r^2)^2} - \frac{r^n[1+n(1-r)]}{(1-r)^2} - \frac{4r^n}{(1-r)^2(1+r)} > 0$$

верно при $r = r_n$, а простые преобразования показывают, что это равносильно неравенству

$$(1-r)^3(1+r)^2 - r^n(1+r^2)^2[5+r+n(1-r^2)] > 0. \tag{12}$$

Непосредственные вычисления с использованием программы «Математика» дают $r_3 = 0.361697$, $r_4 = 0.423274$, $r_5 = 0.470298$. Для обсуждения общего случая для больших значений n положим $r = 1 - \alpha/n$. Поскольку $e^{-\alpha/n} \geq 1 - \alpha/n$, достаточно доказать, что

$$\left(\frac{\alpha}{n}\right)^3 \left(2 - \frac{\alpha}{n}\right)^2 - e^{-\alpha} \left[1 + \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^2\right]^2 \left[6 + 2\alpha - \frac{\alpha}{n} - \frac{\alpha^2}{n}\right] > 0 \quad \text{для } n \geq 5$$

или, что то же,

$$\frac{e^{\alpha}}{n^3} \left(2 - \frac{\alpha}{n}\right)^2 - \frac{1}{\alpha^2} \left[1 + \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^2\right]^2 \left[2 + \frac{6}{\alpha} - \frac{1+\alpha}{n}\right] > 0 \quad \text{для } n \geq 5.$$

Стало быть, неравенство (12) выполнено при $r = r_n$ $(n \geq 5)$, если последнее неравенство верно при $r = r_n$ $(n \geq 5)$. Для доказательства последнего неравенства возьмем

$$\alpha = \alpha(n) := \log\left(\frac{n^3}{\log n}\right) = 3\log n - \log(\log n)$$

и заметим, что оно эквивалентно неравенству $L(n) > 0$ при $n \geq 5$, где

$$L(n) = \alpha^2 \left(2 - \frac{\alpha}{n}\right)^2 - \left[1 + \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^2\right]^2 \left[2 + \frac{6}{\alpha} - \frac{1+\alpha}{n}\right] \log n$$

или, равносильно,

$$L(n) = -\left\{\left[2 + \frac{6}{\alpha} - \frac{1+\alpha}{n}\right] \log n\right\} t^2 + \alpha^2 t + 2\alpha^2 \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right), \tag{13}$$

где $t = 1 + \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^2$. Обозначим правую часть в (13) через $g(t)$. Она определена на интервале $(0, 2)$ при $n \geq 5$. Стало быть, доказательство теоремы будет закончено, как только мы покажем, что $g(t) > 0$. Более того, так как

$$g(0) = 2\alpha^2 \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right) > 0,$$

с учетом первой производной доказательство будет закончено, если мы докажем, что $g(2) > 0$. Имеем $g(2) > 0$ в том и только в том случае, если

$$\alpha^2 \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right) + \left(\frac{1+\alpha}{n}\right) \log n + \left[\alpha^2 - \left(\frac{12}{\alpha} + 4\right) \log n\right] > 0. \tag{14}$$

Положим $\beta(n) = \alpha(n)/n$. Легко видеть, что функция α возрастает при $n \geq 5$, а β убывает при $n \geq 5$. В частности,

$$\alpha(n) \geq \alpha(5) \approx 4.35243 \text{ и } \beta(n) \leq \beta(5) = \frac{\alpha(5)}{5} \approx 0.870486.$$

Кроме того, $6/\alpha(n) \leq 6/\alpha(5) \approx 1.37854$. Из последних рассуждений следует, что первый и второй члены в (14) положительны. Тем самым $g(t) > 0$, если третий член в (14) положителен, т. е. если $\alpha^2 - (12/\alpha + 4)\log n > 0$ при $n \geq 5$, а это равносильно тому, что

$$\phi(n) = \left(3 - \frac{\log(\log n)}{\log n}\right)^2 > \psi(n) = \left(\frac{12}{\alpha} + 4\right) \frac{1}{\log n}.$$

Легко показать, что ϕ возрастает, а ψ убывает и $\phi(5) > \psi(5)$, стало быть,

$$\phi(n) \geq \phi(5) > \psi(5) \geq \psi(n) \quad \text{при } n \geq 5.$$

Итак, $L(n) > 0$ при $n \geq 5$, так что (12) верно для $r = r_n$ ($n \geq 5$). Наконец, привлекая упомянутый выше принцип максимума модуля, заключаем, что

$$\left| s_n'(z)\left(\frac{z}{s_n(z)}\right)^2 - 1 \right| < 1$$

для $|z| \leq r_n = 1 - \alpha/n$ с $\alpha = 3\log n - \log(\log n)$. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 3. Пусть $f \in \mathscr{U}$ и $f''(0) = 0$. Тогда (8) выполнено с $a_2 = 0$. Это вместе с (6) приводит к тому, что

$$f'(z) = \frac{1 + w(z)}{\left(1 - \int\limits_0^1 \frac{w(tz)}{t^2}\,dt\right)^2}, \quad z \in \mathbb{D},$$

где $w : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ аналитична и $|w(z)| \leq |z|^2$ в $\mathbb{D}$. Напомним, что $\operatorname{Re} f'(z) > 1/2$ тогда и только тогда, когда

$$\left|\frac{1}{f'(z)} - 1\right| < 1,$$

а это равносильно тому, что

$$\left|\left(1 - \int\limits_0^1 \frac{w(tz)}{t^2}\,dt\right)^2 - (1 + w(z))\right| < |1 + w(z)|.$$

Так как $|w(z)| \leq |z|^2$ в $\mathbb{D}$, последнее неравенство верно при условии

$$|z|^4 + 2|z|^2 + |z|^2 < 1 - |z|^2,$$

которое выполнено, если $|z| < r_0 := \sqrt{\sqrt{5} - 2}$. Таким образом, $\operatorname{Re} f'(z) > 1/2$ для $|z| < r_0$. Положим $g(z) = r_0^{-1} f(r_0 z)$. Тогда $\operatorname{Re} g'(z) > 1/2$ для $z \in \mathbb{D}$ и тем самым ввиду [18, теорема 3] имеем

$$\operatorname{Re} \frac{g(z)}{s_n(g, z)} > \frac{1}{2} \quad \text{для } z \in \mathbb{D},$$

а это эквивалентно тому, что

$$\operatorname{Re} \frac{f(z)}{s_n(f, z)} > \frac{1}{2} \quad \text{для } |z| < r_0.$$

Доказательство закончено.

4. Необходимые условия на коэффициенты для функций из $\mathscr{U}$ и соответствующая проблема радиуса

Теорема 4. *Пусть $f \in \mathscr{U}$ имеет вид*

$$\frac{z}{f(z)} = 1 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots. \tag{15}$$

Тогда

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n-1)^2 |b_n|^2 \leq 1. \tag{16}$$

В частности, $|b_1| \le 2$ *и* $|b_n| \le \frac{1}{n-1}$ *при* $n \ge 2$. *Эти результаты точны.*

Доказательство. Напомним, что $f \in \mathscr{U}$ тогда и только тогда, когда

$$\left|\left(\frac{z}{f(z)}\right)^2 f'(z) - 1\right| = \left|\frac{z}{f(z)} - z\left(\frac{z}{f(z)}\right)' - 1\right| = \left|\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)b_n z^n\right| < 1.$$

Заметим, что $g(z) = \sum\limits_{n=2}^{\infty}(n-1)b_n z^n$ аналитична в $\mathbb{D}$ и, стало быть, взяв $z = re^{i\theta}$, получим

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)^2|b_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|g(re^{i\theta})|^2\, d\theta < 1,$$

так что при $r \to 1^-$ придем к требуемому неравенству.

Поскольку $b_1 = -f''(0)/2$, из неравенства Бибербаха вытекает, что $|b_1| \le 2$, а тот факт, что функция Кёбе $k(z) = z/(1-z)^2$ принадлежит $\mathscr{U}$, показывает точность результата. Далее, из неравенства (16) вытекает, что при $n \ge 2$ имеем $|b_n| \le \frac{1}{n-1}$. Функции $s_n(z)$ при $n \ge 2$, определенные равенством

$$s_n(z) = \frac{(n-1)z}{z^n + n - 1}, \quad \text{т. е. } \frac{z}{s_n(z)} = 1 + \frac{z^n}{n-1},$$

также принадлежат классу $\mathscr{U}$, стало быть, результат точен. Теорема доказана.

Заметим, что необходимое условие (16) на коэффициенты для класса $\mathscr{U}$ сильнее, чем для класса $\mathscr{S}$.

Положим (см. [19])

$$\mathscr{P} =: \left\{f \in \mathscr{A} : \left|\left(\frac{z}{f(z)}\right)''\right| \le 2,\ z \in \mathbb{D}\right\}.$$

Стоит отметить, что функции из $\mathscr{P}$ лежат также в $\mathscr{U}$ и эти классы играют роли классов $\mathscr{C}$ и $\mathscr{S}^*$ соответственно. В [20] рассмотрены проблемы радиусов для многих специальных классов однолистных отображений.

Теорема 5. *Пусть* $f \in \mathscr{U}$. *Тогда функция* $r^{-1}f(rz)$, *где* $0 < r \le 1$, *принадлежит классу* $\mathscr{P}$ *для* $0 < r \le r_0$, *где* $r_0 \approx 0.68224$ — *корень уравнения*

$$r^8 + r^6 - 8r^4 + 12r^2 - 4 = 0$$

в интервале $(0, 1)$.

Пусть $f \in \mathscr{U}$ имеет вид (15). Требуется показать, что g, определенная равенством $g(z) = r^{-1}f(rz)$, принадлежит $\mathscr{P}$ для $0 < r \le r_0$. Согласно предположению

$$\frac{z}{g(z)} = \frac{z}{r^{-1}f(rz)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n r^n z^n$$

и, стало быть, достаточно доказать, что

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)|b_n| r^n \le 2$$

для $0 < r \le r_0$. Из классического неравенства Коши — Шварца и (16) вытекает, что

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)|b_n| r^n \le \left(\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)^2|b_n|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{n=2}^{\infty} n^2 r^{2n}\right)^{1/2} \le \left(\sum_{n=2}^{\infty} n^2 r^{2n}\right)^{1/2}.$$

Поскольку
$$\sum_{n=2}^{\infty} n^2 x^n = x\left(\frac{1+x}{(1-x)^3}-1\right) = \frac{4x^2-3x^3+x^4}{(1-x)^3},$$
последнее неравенство эквивалентно тому, что
$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)|b_n|r^n \le \left(\frac{4r^4-3r^6+r^8}{(1-r^2)^3}\right)^{1/2},$$
а это не больше чем 2, если $r\in(0,1)$ удовлетворяет неравенству
$$\psi(r) = r^8+r^6-8r^4+12r^2-4\le 0,$$
и вычисления показывают, что $0<r\le r_0$, где $\psi(r_0)=0$. Теорема доказана.

Теорема 6. *Пусть $f\in\mathscr{U}$ и $s_n(z)$ — частичная сумма. Тогда для каждого $n\ge 2$*
$$\left|\frac{s_n(z)}{f(z)}-1\right| < |z|^n(n+1)\left(1+\frac{\pi}{\sqrt{6}}\frac{|z|}{1-|z|}\right),\quad z\in\mathbb{D}.$$

Как обычно, положим $f(z)=z+a_2z^2+a_3z^3+\cdots$, так что
$$s_n(z) = z+a_2z^2+a_3z^3+\cdots+a_nz^n$$
является n-й частичной суммой. Кроме того, пусть
$$\frac{z}{f(z)} = 1+b_1z+b_2z^2+\cdots,\quad z\in\mathbb{D}.$$
Как и в доказательстве теоремы 1, имеем
$$\frac{s_n(z)}{f(z)} = 1+c_nz^n+c_{n+1}z^{n+1}+\cdots,$$
где $c_n=-a_{n+1}$ и
$$c_m = b_{m-n+1}a_n+b_{m-n+2}a_{n-1}+\cdots+b_ma_1$$
при $m=n+1,n+2,\ldots$. По теореме де Бранже $|a_n|\le n$ для всех $n\ge2$, откуда получаем, что
$$|c_n| = |-a_{n+1}|\le n+1$$
и что при $m\ge n+1$ (ввиду (4) и неравенства Коши — Шварца)
$$|c_m|^2 \le \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{(n+1-k)^2}{(m-(n+1-k))^2}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}(m-n+k-1)^2\,|b_{m-n+k}|^2\right) =: A\cdot B.$$
Из теоремы 4 вытекает, что $B\le 1$, а для $m\ge n+1$ имеем
$$A = \sum_{k=1}^{n}\frac{(n+1-k)^2}{(m-(n+1-k))^2} \le \sum_{k=1}^{n}\frac{(n+1-k)^2}{k^2}$$
$$= (n+1)^2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} - 2(n+1)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\sum_{k=1}^{n}1.$$
Из неравенств
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} > \log(n+1) \text{ и } \log(n+1)>1 \text{ при } n\ge 3$$

легко следует неравенство

$$A < \frac{\pi^2}{6}(n+1)^2 - 2(n+1)\log(n+1) + n < \frac{\pi^2}{6}(n+1)^2 - (n+2),$$

из которого, в частности, вытекает, что

$$|c_m| < \frac{\pi}{\sqrt{6}}(n+1) \text{ при } m \geq n+1 \text{ и } n \geq 3.$$

Последнее неравенство вместе с тем, что $|c_n| = |a_{n+1}| \leq n+1$, дает оценку

$$\left|\frac{s_n(z)}{f(z)} - 1\right| \leq |c_n|\,|z|^n + |c_{n+1}|\,|z|^{n+1} + \cdots$$

$$\leq (n+1)|z|^n + \frac{\pi}{\sqrt{6}}(n+1)\left(|z|^{n+1} + |z|^{n+2} + \cdots\right) = (n+1)|z|^n\left(1 + \frac{\pi}{\sqrt{6}}\frac{|z|}{1-|z|}\right)$$

при $n \geq 3$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть $f \in \mathscr{U}$. Тогда при $n \geq 3$*

$$\left|\frac{s_n(z)}{f(z)} - 1\right| < \frac{1}{2} \quad \textit{для } |z| < r_n := 1 - \frac{2\log n}{n}$$

или, равносильно,

$$\left|\frac{f(z)}{s_n(z)} - \frac{4}{3}\right| < \frac{2}{3} \quad \textit{для } |z| < r_n.$$

Следствие 1, в частности, показывает, что для $f \in \mathscr{U}$ имеем

$$\operatorname{Re}\frac{s_n(z)}{f(z)} > \frac{1}{2} \text{ для } |z| < r_n \text{ и } n \geq 3,$$

$$\operatorname{Re}\frac{f(z)}{s_n(z)} > \frac{2}{3} \text{ для } |z| < r_n \text{ и } n \geq 3.$$

Благодарности. Авторы признательны рецензенту за его/ее внимательное прочтение рукописи и многочисленные предложения по улучшению изложения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Suffridge T. J.* Some special classes of conformal mappings // Handbook of complex analysis: geometric function theory (Ed. Kühnau). Amsterdam: Elsevier, 2005. V. 2. P. 309–338.
2. *Duren P. L.* Univalent Functions. New York; Berlin; Heidelberg; Tokyo: Springer-Verl., 1983. (Grundlehren Math. Wiss.; 259).
3. *Goodman A. W.* Univalent functions. Tampa, Florida: Mariner Publ. Co., 1983. V. I, II.
4. *Jenkins J. A.* On an inequality of Goluzin // Amer. J. Math. 1951. V. 73, N 1. P. 181–185.
5. *Robertson M. S.* The partial sums of multivalently star-like functions // Ann. Math. 1941. V. 42, N 4. P. 829–838.
6. *Sheil-Small T.* A note on the partial sums of convex schlicht functions, // Bull. London Math. Soc. 1970. V. 2, N 2. P. 165–168.
7. *Ruscheweyh St.* On the radius of univalence of the partial sums of convex functions // Bull. London Math. Soc. 1972. V. 4, N 3. P. 367–369.
8. *Szegö G.* Zur Theorie der schlichten Abbildungen // Ann. of Math. 1928. Bd 100. S. 188–211.
9. *Bshouty D., Hengartner W.* Criteria for the extremality of the Koebe mapping // Proc. Amer. Math. Soc. 1991. V. 111, N 2. P. 403–411.
10. *Reade M. O., Silverman H., Todorov P. G.* On the starlikeness and convexity of a class of analytic functions // Rend. Circ. Mat. Palermo. 1984. V. 33, N 2. P. 265–272.

11. *Аксентьев Л. А.* К достаточным условиям однолистности регулярных функций // Изв. вузов. Математика. 1958. № 3. С. 3–7.

12. *Obradović M., Ponnusamy S.* New criteria and distortion theorems for univalent functions // Complex Variables Theory Appl. 2001. V. 44. P. 173–191.

13. *Obradović M., Ponnusamy S.* Univalence and starlikeness of certain integral transforms defined by convolution of analytic functions // J. Math. Anal. Appl. 2007. V. 336, N 2. P. 758–767.

14. *Fournier R., Ponnusamy S.* A class of locally univalent functions defined by a differential inequality // Complex variables elliptic equat. 2007. V. 52, N 1. P. 1–8.

15. *Obradović M., Ponnusamy S., Singh V., Vasundhra P.* Univalency, starlikesess and convexity applied to certain classes of rational functions // Analysis (Munich). 2002. V. 22, N 3. P. 225–242.

16. *Friedman B.* Two theorems on schlicht functions // Duke Math. J. 1946. V. 13. P. 171–177.

17. *Obradović M., Ponnusamy S.* Coefficient characterization for certain classes of univalent functions // Bull. Belg. Math. Soc. (Simon Stevin). 2009. V. 16, N 2. P. 251–263.

18. *Singh R., Puri S.* Odd starlike functions // Proc. Amer. Math. Soc. 1985. V. 94, N 1. P. 77–80.

19. *Nunokawa M., Obradović M., Owa S.* One criterion for univalency // Proc. Amer. Math. Soc. 1989. V. 106, N 4. P. 1035–1037.

20. *Obradović M., Ponnusamy S.* On certain subclasses of univalent functions and radius properties // Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 2009. V. 54, N 4. P. 317–329.

Статья поступила 8 октября 2009 г., окончательный вариант — 3 июля 2010 г.

Обрадович Милутин (Milutin Obradović)
Department of Mathematics,
Faculty of Civil Engineering,
Bulevar Kralja Aleksandra 73,
11000 Belgrade, Serbia
obrad@grf.bg.ac.rs

Поннусами Саминасан (Saminathan Ponnusamy)
Department of Mathematics,
Indian Institute of Technology Madras, Chennai–600 036, India
samy@iitm.ac.in