Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2011. Том 52, № 2

УДК 517.956.8:517.956.227

ЛОКАЛИЗАЦИЯ ОКОЛО УГЛОВОЙ ТОЧКИ ПЕРВОЙ СОБСТВЕННОЙ ФУНКЦИИ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ В ОБЛАСТИ С ТОНКИМ ОКАЙМЛЕНИЕМ

С. А. Назаров

Аннотация. Установлено, что в области с тонким тяжелым окаймлением происходит локализация первой собственной функции задачи Дирихле около угловой точки раствором $\alpha > \pi$. Окаймление представляет собой пограничную полоску малой ширины ε, на которой функция плотности принимает значение ε^{-2-m}, $m > 0$, но в остальной части области она равна $O(1)$. Результат получен на основе анализа существенного и дискретного спектров вспомогательной задачи без малого параметра в бесконечном угле. Сформулировано несколько открытых вопросов о строении спектров обеих задач.

Ключевые слова: спектральная задача Дирихле, концентрированная масса, тонкое тяжелое окаймление, угловая точка, локализация собственных функций.

1. Постановка задачи. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — область с компактным замыканием $\overline{\Omega}$ и границей $\Gamma = \partial\Omega$ — простым замкнутым контуром, гладким (класса C^∞) всюду, кроме начала $\mathscr{O}$ декартовых координат $x = (x_1, x_2)$. В окрестности $\mathscr{V}$ точки $\mathscr{O}$ область совпадает с углом

$$\mathbb{K} = \{x : r > 0,\ \varphi \in (0, \alpha)\}, \tag{1}$$

причем (r, φ) — система полярных координат с центром $\mathscr{O}$, $\alpha \in (0, 2\pi)$ — раствор угла и $x_1 = r\cos\varphi$, $x_2 = r\sin\varphi$. Пусть еще ω^ε — тонкое окаймление (глубоко тонировано на рис. 1(a),(b)), которое вне $\mathscr{V}$ состоит из точек $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$, удаленных на расстояние $\operatorname{dist}(x, \Gamma) \in (0, \varepsilon)$ от контура Γ, а внутри окрестности $\mathscr{V}$ является объединением двух полуполос со скошенными торцами, отсекаемых внешней биссектрисой угла $\mathbb{K}$ от примыкающих к его сторонам полос шириной ε. Параметр $\varepsilon \in (0, 1]$ считается малым. Если $\alpha > \pi$ (угол (1) невыпуклый), то окаймление ω^ε можно определить формулой

$$\{x \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega} : \operatorname{dist}(x, \Gamma) < \varepsilon\}, \tag{2}$$

однако в случае $\alpha < \pi$ множество (2) у́же, чем ω^ε (ср. рис. 2(a) и рис. 1(b)).

Область $\Omega^\varepsilon = \overline{\Omega} \cup \omega^\varepsilon$ имеет границу Γ^ε, гладкую всюду, кроме вершины $\mathscr{O}^\varepsilon$ угла $\mathbb{K}^\varepsilon$, полученного параллельным переносом угла $\mathbb{K}$ на расстояние $O(\varepsilon)$.

Рассмотрим спектральную задачу Дирихле

$$-\Delta_x u^\varepsilon(x) = \lambda^\varepsilon(a + \varepsilon^{-2-m}\mathfrak{k}^\varepsilon(x))u^\varepsilon(x), \quad x \in \Omega^\varepsilon, \tag{3}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 09–01–00759).

© **2011 Назаров С. А.**

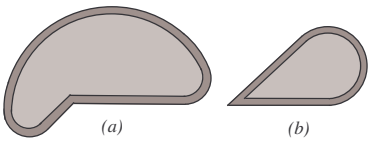

Рис. 1. Кусочно-гладкие области с тонкими окаймлениями.

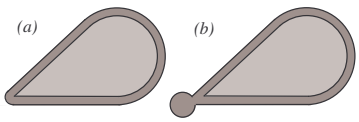

Рис. 2. Окаймление, сглаженное в угловой точке.

$$u^\varepsilon(x) = 0, \quad x \in \Gamma^\varepsilon, \tag{4}$$

Здесь Δ_x — оператор Лапласа в координатах x, a и m — положительные числа, а $\mathfrak{x}^\varepsilon$ — характеристическая функция множества ω^ε. Наличие большого множителя ε^{-2-m} в функции плотности из правой части дифференциального уравнения (3) позволяет причислить задачу (3), (4) к классу задач с *концентрированными массами*. Эта тематика, инициированная работой [1], усиленно разрабатывалась и продолжает разрабатываться, имея многочисленные приложения. В настоящей статье обнаружен новый эффект, связанный с локализацией первой собственной функции около излома окаймления (см. пояснения в п. 2). В отличие от предыдущих исследований спектр возникающей предельной задачи в неограниченной области (угол $\mathbb{K}$ с окаймлением единичной ширины) оказывается существенным (теорема 3) и приобретает непустую дискретную компоненту только при определенных ограничениях на раствор угла (предложения 6 и 7).

Вариационная формулировка задачи (3), (4) апеллирует к интегральному тождеству [2]

$$(\nabla_x u^\varepsilon, \nabla_x v^\varepsilon)_{\Omega^\varepsilon} = \lambda^\varepsilon((a + \varepsilon^{-m-2}\mathfrak{x}^\varepsilon)u^\varepsilon, v^\varepsilon)_{\Omega^\varepsilon}, \quad v^\varepsilon \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega^\varepsilon), \tag{5}$$

в котором $(,)_{\Omega^\varepsilon}$ — натуральное скалярное произведение в пространстве Лебега $L_2(\Omega^\varepsilon)$, а $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega^\varepsilon)$ — подпространство функций из класса Соболева $H^1(\Omega^\varepsilon)$, подчиненных краевому условию (4). По понятным причинам спектр

$$0 < \lambda_1^\varepsilon < \lambda_2^\varepsilon \leqslant \lambda_3^\varepsilon \leqslant \ldots \leqslant \lambda_p^\varepsilon \leqslant \ldots \to +\infty \tag{6}$$

задачи (5) дискретен, а ее собственные функции $u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon, u_3^\varepsilon, \ldots, u_p^\varepsilon, \ldots \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega^\varepsilon)$, которые отвечают собственным числам, внесенным в список (6) при учете кратностей, можно подчинить условиям ортогональности и нормировки

$$\big((a + \varepsilon^{-2-m}\mathfrak{x}^\varepsilon)u_p^\varepsilon, u_q^\varepsilon\big)_{\Omega^\varepsilon} = \delta_{p,q}, \quad p, q \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}. \tag{7}$$

Здесь $\delta_{p,q}$ — символ Кронекера. В силу принципа максимума первое собственное число λ_1^ε простое, а первую собственную функцию u_1^ε можно взять положительной в Ω^ε. Каждая из функций u_p^ε бесконечно дифференцируема в областях Ω и ω^ε вплоть до границ Γ и $\Gamma \cup \Gamma^\varepsilon$, за исключением угловых точек $\mathscr{O}$ и $\mathscr{O}^\varepsilon$ (см., например, вводную главу в книге [3]).

Если $\alpha = \pi$, то оба контура Γ и Γ^ε гладкие. Несколько переделывая представленные далее доказательства, можно убедиться в том, что при гладком контуре Γ верно соотношение

$$\varepsilon^{-m}\lambda_p^\varepsilon \to \pi^2/4 \quad \text{при } \varepsilon \to +0, \ p \in \mathbb{N}. \tag{8}$$

Основной результат настоящей статьи заключается в том, что при $\alpha \geqslant \alpha_*$, где $\alpha_* \in (\pi, 2\pi)$ — корень трансцендентного уравнения

$$\frac{\alpha}{2} + 2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = 0, \tag{9}$$

первое собственное число λ_1^ε задачи (3), (4) подчинено соотношению

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \varepsilon^{-m}\lambda_1^\varepsilon = \mu_1 \in (0, \pi^2/4), \tag{10}$$

а соответствующая собственная функция u_1^ε, нормированная условием (7), локализована около вершины угла в следующем (упрощенном — см. теорему 8 и комментарии к ней) смысле:

$$\big\|(1+\varepsilon^{-1}r)^\vartheta \nabla_x u_1^\varepsilon; L_2(\Omega^\varepsilon)\big\| + \big\|(1+\varepsilon^{-1}r)^\vartheta u_1^\varepsilon; L_2(\Omega^\varepsilon)\big\| \leqslant c_\vartheta \varepsilon^{m/2}, \tag{11}$$

здесь ϑ — некоторый положительный показатель (см. формулу (7)). Весовые множители в (11) имеют порядок один в непосредственной близости от угловой точки, увеличиваются с ростом r и приобретают порядок $\varepsilon^{-\vartheta}$ вне окрестности $\mathscr{V}$. Тем самым собственная функция степенным образом затухает при удалении от вершины $\mathscr{O}^\varepsilon$. Подчеркнем, что коэффициент $\varepsilon^{m/2}$ в правой части (11), обеспечивающий малость величины $u_1^\varepsilon(x)$ всюду в Ω^ε, вызван условием нормировки (6), которое содержит большой множитель при характеристической функции $\mathfrak{x}^\varepsilon$ множества ω^ε. Обнаруженная локализация подтверждена и теоремой 11.

2. О локализации собственных функций. Вопрос о строении спектра краевой задачи с концентрированной массой на малом, диаметром $O(\varepsilon)$, множестве был впервые поднят в статье [1] в следующей постановке[1)]:

$$-\Delta_x u^\varepsilon(x) = \lambda^\varepsilon(a + \varepsilon^{-2-m}\mathfrak{x}_\omega(\varepsilon^{-1}x))u^\varepsilon(x),\ x \in \Omega, \quad u^\varepsilon(x) = 0,\ x \in \partial\Omega. \tag{12}$$

Здесь $\mathfrak{x}_\omega$ — характеристическая функция области $\omega \subset \mathbb{R}^3$ с гладкой границей и компактным замыканием. Для собственных чисел (5) задачи (12) установлена сходимость $\varepsilon^{-m}\lambda_p^\varepsilon \to \beta_p$ при $\varepsilon \to +0$, $p \in \mathbb{N}$; здесь фигурируют собственные числа уравнения

$$-\Delta_\xi w(\xi) = \beta\mathfrak{x}_\omega(\xi)w(\xi), \quad x \in \mathbb{R}^3, \tag{13}$$

которое получено из задачи (12) при помощи растяжения координат

$$x \mapsto \xi = (\xi_1, \xi_2), \quad \xi_j = \varepsilon^{-1}x_j,\ j = 1, 2, \tag{14}$$

и формального перехода к $\varepsilon = 0$ после замены спектрального параметра

$$\lambda^\varepsilon \mapsto \varepsilon^{-m}\lambda^\varepsilon. \tag{15}$$

Поскольку множитель $\mathfrak{x}_\omega$ в правой части уравнения (13) обращается в нуль вне компакта $\overline{\omega}$, спектр оказывается полностью дискретным и образует монотонную бесконечно большую последовательность собственных чисел $0 < \beta_1 < \beta_2 \leqslant \beta_3 \leqslant \ldots \leqslant \beta_p \leqslant \ldots \to +\infty$. Соответствующие собственные функции w_p, $p \in \mathbb{N}$, удовлетворяют следующим оценкам, обеспеченным общими результатами (см. [4–6] и др., а также [3, гл. 3, 6]):

$$\big|\nabla_\xi^j w_p(\xi)\big| \leqslant c_{jp},\ \xi \in \omega,\ \big|\nabla_\xi^j w_p(\xi)\big| \leqslant c_{jp}(1+|\xi|)^{-1-j},\ \xi \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\omega},\ j = 0, 1, 2, \ldots. \tag{16}$$

[1)] В [1] изучен случай $m = 1$, но переход к произвольному $m > 0$ не вызывает никаких осложнений.

Эффект локализации собственных функций в задаче (12) выражен неравенствами

$$\begin{gathered}\bigl|\nabla_x^j u_p^\varepsilon(x)\bigr| \leqslant C_{jp}\varepsilon^{-j}, \quad x \in \omega_\varepsilon, \\ \bigl|\nabla_x^j u_p^\varepsilon(x)\bigr| \leqslant \varepsilon C_{jp}(\varepsilon^2 + |x|^2)^{-(1+j)/2}, \quad x \in \overline{\Omega} \setminus \overline{\omega_\varepsilon},\ j = 0, 1, 2, \dots,\end{gathered} \tag{17}$$

которые могут быть получены на основе формул (16) при помощи метода из [7, гл. 4]. В соотношениях (16) и (17) под $\nabla_x^j u$ подразумевается совокупность всех производных функции u порядка j, а $\omega_\varepsilon = \{x : \varepsilon^{-1}x \in \omega\}$ — множество малого диаметра, на котором и концентрируется масса.

В обзоре [8] можно найти обширный список публикаций, посвященных обобщению результатов [1] и исследованию других задач с концентрированными массами.

Рис. 3. Тонкие области, порождающие эффект локализации собственных функций.

Локализация иного сорта обнаружена [9, 10] для собственных функций смешанной краевой задачи для уравнения

$$-\Delta_x u^\varepsilon(x) = \lambda^\varepsilon u^\varepsilon(x), \quad x \in \Omega^\varepsilon, \tag{18}$$

в тонкой трехмерной пластине Ω^ε (рис. 3(a)) с условиями Дирихле на основаниях и Неймана на боковой поверхности. Именно, при подходящем возмущении (искривлении) боковой поверхности собственные функции концентрируются около точки s^0 максимальной кривизны на границе $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ срединного сечения пластины и затухают экспоненциально со скоростью $\exp(-\delta_1|n|/\varepsilon)$ при движении внутрь области Ω^ε и со скоростью $\exp(-\delta_2(s-s^0)^2/\varepsilon)$ вдоль боковой поверхности. Здесь $\delta_i > 0$, а n и s — естественные криволинейные координаты в окрестности $\mathscr{V}$, соответственно ориентированное расстояние до контура Γ и длина дуги на нем. Получен [11] аналогичный результат о собственных функциях u_p^ε задачи Дирихле для уравнения (18) в тонкой искривленной трапеции (рис. 3(b)):

$$\Omega^\varepsilon = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1| < 1,\ 0 < x_2 < \varepsilon H(x_1)\},$$

с гладкой профильной функцией H, имеющий единственный глобальный строгий максимум в точке $x_1 = x_1^0$, при удалении от которой и происходит экспоненциальное затухание величин $u_p^\varepsilon(x)$ со скоростью $\exp\bigl(-\delta_2\bigl(x_1 - x_1^0\bigr)^2/\varepsilon\bigr)$.

В обеих ситуациях асимптотики собственных чисел и функций включают решения $\{\beta_p, W_p\}$ классической задачи о гармоническом осцилляторе (см., например, [12]):

$$-\frac{dW}{dt}(t) + (1 + t^2)W(t) = \beta W(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

и именно экспоненциальное затухание собственных функций W_j при $t \to \pm\infty$ приводит к эффекту локализации.

Об областях, изображенных на рис. 3, уместно говорить, что им свойственна *экспоненциальная локализация* собственных функций, но в задаче (12) и рассматриваемой далее задаче (3), (4) локализация *степенная*. Этот факт будет подтвержден в пп. 5 и 6 после исследования спектра предельной задачи в бесконечном угле (пп. 3 и 4). В заключительном п. 7 обсуждаются доступные обобщения и сопутствующие вопросы, оставшиеся нерешенными.

3. Задача о пограничном слое и ее существенный спектр. Сделаем замену координат (14). Теперь при формальном переходе к $\varepsilon = 0$ часть $\Gamma^\varepsilon \setminus$

$\mathscr{V}$ границы отодвигается на бесконечность, а дифференциальный оператор из уравнения (3) после замены (10) спектрального параметра приобретает вид

$$-\Delta_x + \lambda^\varepsilon(a + \varepsilon^{-2-m}\mathfrak{x}^\varepsilon(x)) = \varepsilon^{-2}(\Delta_\xi + \mu^\varepsilon\mathfrak{X}(\xi)) + a\varepsilon^m\mu^\varepsilon. \tag{19}$$

Коэффициент при последнем слагаемом мал по сравнению с ε^{-2}, и выражение $a\varepsilon^m\mu^\varepsilon$ можно отбросить при формировании предельной задачи. Таким образом, пограничный слой следует описывать при помощи решений задачи Дирихле

$$-\Delta_\xi w(\xi) = \mu\mathfrak{X}(\xi)w(\xi),\ \xi\in\Pi, \quad w(\xi) = 0,\ \xi\in\partial\Pi, \tag{20}$$

в угле Π, полученном как объединения угла $\mathbb{K}$ и двух полуполос $\varpi_\pm$ со скошенными торцами, образующих окаймление ϖ и отсекаемых внешней биссектрисой угла от примыкающих к его сторонам полос единичной ширины (см. рис. 4(a)). В формулах (19) и (20) под $\mathfrak{X}$ подразумевается характеристическая функция множества ϖ; эта функция получается из первоначальной функции $\mathfrak{x}^\varepsilon$ при помощи замены координат (14) и формального перехода к $\varepsilon = 0$.

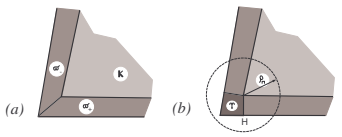

Рис. 4. Бесконечный угол с окаймлением.

Изучим спектр задачи (20), который никак не может быть дискретным из-за отсутствия компактности вложения $H^1(\varpi)\subset L_2(\varpi)$ на неограниченном множестве ϖ. Вариационная формулировка задачи (20) использует интегральное тождество

$$(\nabla_\xi w, \nabla_\xi z)_\Pi = \mu(w,z)_\varpi, \quad z\in C_c^\infty(\Pi). \tag{21}$$

Обозначим через $\mathscr{H}$ гильбертово пространство, полученное как пополнение линеала $C_c^\infty(\Pi)$ (бесконечно дифференцируемые функции с компактными носителями, расположенными внутри Π) по норме, порожденной скалярным произведением

$$\langle w, z\rangle = (\nabla_\xi w, \nabla_\xi z)_\Pi. \tag{22}$$

Следующие утверждения, в частности, показывают, что по замыканию интегральное тождество (21) распространяется на пробные функции $v\in\mathscr{H}$.

Лемма 1. *Норма в пространстве $\mathscr{H}$ эквивалентна такой:*

$$(\|\nabla_\xi w; L_2(\Pi)\|^2 + \|\mathscr{R}^{-1}w; L_2(\Pi)\|^2)^{1/2}. \tag{23}$$

Весовой множитель $\mathscr{R}(\xi)$ равен единице при $|\xi| = \rho\leqslant\rho_\Pi$ и $(1+\rho\Phi(\varphi))^{-1}$ при $\rho>\rho_\Pi$, причем $\Phi(\varphi) = \max\{|\varphi|, |\varphi-\alpha|\}$, а радиус $\rho_\Pi>0$ выбран так, как указано на рис. 4(b).

Доказательство. Достаточно иметь дело с функциями $w\in C_c^\infty(\Pi)$, равными нулю при $\rho\leqslant\rho_\Pi$: для функций с носителями в круге $\mathbb{B}_{2\rho_\Pi} = \{\xi : \rho<2\rho_\Pi\}$ эквивалентность норм сомнений не вызывает. Нужно лишь проверить неравенство $\|\mathscr{R}^{-1}w; L_2(\Pi)\|\leqslant c\|\nabla_\xi w; L_2(\Pi)\|$. Заметим, что область $\Pi\setminus\overline{\mathbb{B}}_{\rho_\Pi}$ содержится в множестве:

$$\{\xi : \rho>\rho_\Pi,\ -C_\Pi\rho^{-1} < \varphi < \alpha + C_\Pi\rho^{-1}\}, \tag{24}$$

где C_Π — некоторая положительная постоянная. Продолжим функцию $w\in C_c^\infty\left(\Pi\setminus\overline{\mathbb{B}}_{\rho_\Pi}\right)$ нулем на всю плоскость. Умножим на ρ^{-1} обе части формулы

$$\int\limits_{-C_\Pi\rho^{-1}}^{\alpha+C_\Pi\rho^{-1}} (1+\Phi(\varphi)\rho)^{-2}|w(\rho,\varphi)|^2\,d\varphi \leqslant c\int\limits_{-C_\Pi\rho^{-1}}^{\alpha+C_\Pi\rho^{-1}} \left|\frac{\partial w}{\partial\varphi}(\rho,\varphi)\right|^2 d\varphi, \tag{25}$$

и проинтегрируем по $\rho \in (\rho_\Pi, \infty)$. Поскольку $d\xi = \rho\, d\rho d\varphi$ и градиент ∇_ξ принимает в полярных координатах вид $(\partial/\partial\rho, \rho^{-1}\partial/\partial\varphi)$, из переделанного соотношения (25) выводится оценка (24). Само соотношение (25) — следствие одномерного неравенства Харди

$$\int\limits_0^h z^{-2}|Z(z)|^2 dz \leqslant 4 \int\limits_0^h \left|\frac{dZ}{dz}(z)\right|^2 dz, \quad Z \in C_c^\infty(0,h],\ h>0,$$

в котором следует положить $z = C_\Pi\rho^{-1} + \varphi$ и $z = \alpha + C_\Pi\rho^{-1} - \varphi$, а также $h = C_\Pi\rho^{-1} + \varphi/2$. В обоих случаях $z \leqslant c(\rho^{-1} + \Phi(\varphi))$. $\square$

Следствие 2. $\|w; L_2(\varpi)\| \leqslant c\|\nabla_\xi w; L_2(\Pi)\|,\ \ w \in \mathscr{H}$.

Доказательство. Часть $\varpi \setminus \overline{\mathbb{B}}_{\rho_\Pi}$ окаймления ϖ содержится в множестве

$$\{\xi : \rho > \rho_\Pi, -C_\Pi\rho^{-1} < \varphi < 0 \quad \text{или} \quad \alpha < \varphi < \alpha + C_\Pi\rho^{-1}\}$$

(ср. формулу (24)), на котором $(1+\Phi(\varphi)\rho)^{-1} \geqslant c_\varpi > 0$ по определению веса $\mathscr{R}$. $\square$

В пространстве $\mathscr{H}$ введем оператор $\mathscr{T}$ формулой

$$\langle \mathscr{T} w, z\rangle = (w,z)_\varpi, \quad w, z \in \mathscr{H}. \tag{26}$$

Он положительный, симметрический и в силу следствия 2 непрерывный, а значит, самосопряженный. Согласно определениям (22) и (26) вариационная задача (21) эквивалентна абстрактному уравнению $\mathscr{T} w = \tau w$ в $\mathscr{H}$ с новым спектральным параметром

$$\tau = 1/\mu. \tag{27}$$

Теорема 3. *Существенный спектр Σ_e оператора $\mathscr{T}$ занимает сегмент $[0, 4\pi^{-2}]$, причем точка $\tau = 0$ является бесконечнократным собственным числом, а соответствующее собственное подпространство состоит из функций $w \in \mathscr{H}$, обращающихся в нуль на окаймлении ϖ. Если норма $\mathfrak{t} = \|\mathscr{T}; \mathscr{H} \to \mathscr{H}\|$ оператора $\mathscr{T}$ равна $4\pi^{-2}$ (она не может быть меньше верхней грани существенного спектра), то дискретный спектр отсутствует. Если же $\mathfrak{t} > 4\pi^{-2}$, то дискретный спектр, располагающийся на полуинтервале $(4\pi^{-2}, \mathfrak{t}]$, заведомо непуст, так как $\mathfrak{t}$ — наибольшее собственное число оператора $\mathscr{T}$.*

Доказательство. Сначала проверим утверждение о дискретном спектре. С этой целью рассмотрим видоизмененную и неоднородную вариационную задачу

$$(\nabla_\xi w, \nabla_\xi z)_\Pi - \mu(w,z)_{\varpi\setminus\Upsilon} = f(z), \quad z \in \mathscr{H}, \tag{28}$$

в которой $f \in \mathscr{H}^*$ — линейный функционал на пространстве $\mathscr{H}$. Подчеркнем, что по сравнению с интегральным тождеством (21) в множителе при μ сужена область интегрирования — исключен четырехугольник Υ, глубоко тонированный на рис. 4(b). Одномерное неравенство Фридрихса

$$\int\limits_{-1}^0 |w(\xi_1,\xi_2)|^2\, d\xi_2 \leqslant \frac{4}{\pi^2} \int\limits_{-1}^0 \left|\frac{\partial w}{\partial \xi_2}(\xi_1,\xi_2)\right|^2 d\xi_2, \tag{29}$$

справедливое благодаря условию Дирихле $w(\xi_1,-1) = 0$, $\xi_1 > H$ (размер H отмечен на рис. 4(b)), проинтегрируем по $\xi_1 \in (H, +\infty)$ и получим неравенство

$$\|w; L_2(\varpi\setminus\Upsilon)\|^2 \leqslant 4\pi^{-2}\|\nabla_\xi w; L_2(\varpi\setminus\Upsilon)\|^2 \tag{30}$$

на усеченной полуполосе ϖ_+; вторая полуполоса ϖ_- рассматривается аналогично. Согласно оценке (30) левую часть (28) при $\mu \in [0, \pi^2/4)$ можно взять в качестве скалярного произведения в пространстве $\mathscr{H}$, а значит, задача (28) однозначно разрешима по теореме Рисса о представлении линейного функционала в гильбертовом пространстве. Иными словами, луч $(4\pi^{-2}, +\infty) \ni \tau$ (ср. связь (27) спектральных параметров μ и τ) свободен от спектра оператора $\mathscr{T}_\Upsilon$, заданного аналогичным (26) равенством $\langle \mathscr{T}_\Upsilon w, z\rangle = (w, z)_{\varpi\setminus\Upsilon}$, $w, z \in \mathscr{H}$. Поскольку $\mathscr{T} - \mathscr{T}_\Upsilon$ — компактный оператор (множество Υ ограничено), выполнено включение $\Sigma_d \subset (4\pi^{-2}, +\infty)$. Осталось вспомнить, что норма $\mathfrak{t}$ — верхняя грань спектра.

Докажем первое утверждение теоремы. Построим сингулярную последовательность для оператора $\mathscr{T}$ в точке $\tau \in (0, 4\pi^{-2})$ (случай $\tau = 4\pi^{-2}$ обсуждается отдельно в замечании 4, однако для проверки теоремы он не нужен, так как существенный спектр Σ_e — замкнутое множество по определению). Пусть Y_N — гладкая срезающая функция:

$$\begin{aligned} &Y_N(\xi_1) = 0 \ \text{ при } \xi_1 \leqslant 2^{N+2} \ \text{ или } \xi_1 \geqslant 2^{N+3}, \\ &Y_N(\xi_1) = 1 \ \text{ при } 2^{N+2} + 1 \leqslant \xi_1 \leqslant 2^{N+3} - 1. \end{aligned} \tag{31}$$

Отметим, что при увеличении номера $N \in \mathbb{N}$ изменение функции (31) заключается только в удлинении участка, на котором она обращается в единицу. Введем еще одну функцию

$$W_\tau(\xi) = \begin{cases} \sin(t_\mu(\xi_2 + 1)) \exp\big(\pm i\xi_1\sqrt{\mu - t_\mu^2}\big) & \text{при } \xi_2 \in (-1, 0), \\ \sin(t_\mu) \exp\big(-\xi_2\sqrt{\mu - t_\mu^2}\big) \exp\big(\pm i\xi_1\sqrt{\mu - t_\mu^2}\big) & \text{при } \xi_2 > 0, \end{cases} \tag{32}$$

где $\mu = \tau^{-1} > \pi^2/4$, а $t_\mu \in (\pi/2, \pi)$ — корень уравнения $t \operatorname{ctg} t = -\sqrt{\mu - t^2}$. Функция (32) обладает следующими свойствами: она гармоническая в полуплоскости $\{\xi : \xi_2 > 0\}$, удовлетворяет уравнению Гельмгольца в полосе $\{\xi : \xi_2 \in (-1, 0)\}$, обращается в нуль при $\xi_2 = 0$, а на оси абсцисс непрерывна вместе с производной по ξ_2. Подчеркнем, что все эти свойства удается обеспечить только в случае $\mu > \pi^2/4$.

Положим

$$w_N(\xi) = 2^{-N/2} Y_N(\xi_1) W_\tau(\xi). \tag{33}$$

Если $\alpha \geqslant \pi/2$, функция (33) принадлежит пространству $\mathscr{H}$, так как имеет носитель в полуполосе $[2^{N+2}, 2^{N+3}] \times [-1, +\infty)$, обращается в нуль при $\xi_2 = -1$ и экспоненциально затухает при $\xi_2 \to +\infty$. В случае острого угла $\alpha < \pi/2$ требуется еще соблюсти условие Дирихле на стороне $\{\xi : \rho > 0, \varphi = \alpha\}$ — это делается умножением на подходящую срезающую функцию, которая ввиду экспоненциального затухания $W_\tau(\xi)$ при $\xi_2 \to +\infty$ не влияет на последующие выкладки и потому далее не принимается во внимание.

Сначала заметим, что

$$\begin{aligned} &\|\nabla_\xi w_N; L_2(\varpi)\|^2 \\ &\quad \geqslant 2^{-N} \int_{-1}^{0} \int_{2^{N+2}+1}^{2^{N+3}-1} \left(\frac{\pi^2}{4} \left(\cos\frac{\pi}{2}\xi_2 \right)^2 + \left(\frac{1}{\tau} - \frac{\pi^2}{4} \right) \left(\sin\frac{\pi}{2}\xi_2 \right)^2 \right) d\xi_1 d\xi_2 \\ &\quad = 2^{-N-1}\tau^{-1} \left(2^{N+3} - 2^{N+2} - 2 \right) \geqslant \tau^{-1} > 0, \end{aligned}$$

т. е. первое свойство сингулярной последовательности Вейля проверено. Выполнив дифференцирование и интегрирование, находим, что

$$\|w_N; \mathscr{H}\|^2 = \|\nabla_\xi w_N; L_2(\varpi)\|^2 \leqslant C.$$

Поскольку носители функций w_N и w_M не пересекаются при $N \neq M$, сомнений не вызывает и второе свойство: слабая сходимость $w_N \to 0$ в пространстве $\mathscr{H}$ (может быть, только вдоль неограниченной подпоследовательности натуральных чисел). Осталось установить третье свойство:

$$\|\mathscr{T} w_N - \tau w_N; \mathscr{H}\| \to 0. \tag{34}$$

Согласно определениям (23) и (26) имеем

$$\begin{aligned}\|\mathscr{T} w_N - \tau w_N; \mathscr{H}\| &= \sup |\langle \mathscr{T} w_N - \tau w_N, z\rangle| \\ &= \tau \sup |\tau^{-1}(w_N, z)_\varpi - (\nabla_\xi w_N, \nabla_\xi z)_\Pi| \\ &= \tau \sup |(\Delta_\xi w_N + \mu^{-1} X w_N, z)_\Pi| = N^{-1/2}\tau \sup |([\Delta_\xi, Y_N] W_\tau, z)_\Pi|. \end{aligned} \tag{35}$$

При этом супремум вычисляется по таким $z \in \mathscr{H}$, что $\|z; \mathscr{H}\| = 1$. Кроме того, $[\Delta_\xi, Y_N]$ — коммутатор оператора Лапласа со срезающей функцией (31),

$$[\Delta_\xi, Y_N] W_\tau = 2\nabla_\xi W_\tau \cdot \nabla_\xi Y_N + W_\tau \Delta_\xi Y_N, \tag{36}$$

а в последнем преобразовании из выкладки (35) использованы все указанные ранее свойства функции (32). Итак,

$$\|\mathscr{T} w_N - \tau w_N; \mathscr{H}\| \leqslant c N^{-1/2} \tau \|[\Delta_\xi, Y_N] W_\tau; L_2(\Pi)\|.$$

Последняя норма (содержащая коммутатор) равномерно (относительно N) ограничена ввиду следующих обстоятельств: во-первых, функция W_τ и ее производные не превосходят $c\exp(-\pi\xi_2/2)$, во-вторых, носители коэффициентов дифференциального оператора (36) расположены в двух полуполосах $[2^{N+2}, 2^{N+2}+1]$ и $[2^{N+3}-1, 2^{N+3}]$ и, в-третьих, эти коэффициенты также равномерно ограничены. В итоге получаем, что величина (35) есть $O(N^{-1/2})$, т. е. соотношение (34), а вместе с ним и третье свойство сингулярной последовательности проверены. По критерию Вейля (см., например, [13, § 9.1]) точка $\tau \in (0, 4\pi^{-2})$ принадлежит существенному спектру оператора $\mathscr{T}$, замкнутому множеству. Теорема доказана. □

Замечание 4. При $\tau = 4\pi^{-2}$ функция (32) теряет свойство затухания при $\xi_2 \to +\infty$. Тем не менее при новом определении

$$W_{4\pi^{-2}}(\xi) = \begin{cases} \cos(\pi\xi_2/2) & \text{при } \xi_2 \in (-1, 0), \\ L_N^{-1}(L_N - \xi_2) & \text{при } \xi_2 \in (0, L_N), \\ 0 & \text{при } \xi_2 \in (L_N, +\infty), \end{cases}$$

все выкладки и рассуждения сохраняются, поскольку скачок производной при $\xi_2 = 0$ равен L_N^{-1}, и выполнена формула

$$\int_0^{L_N} |\nabla_\xi W_{4\pi^{-2}}(\xi_1, \xi_2)|^2 \, d\xi_2 = \frac{1}{L_N},$$

а значит, (большой) параметр L_N удается подобрать так, чтобы сохранить все три свойства сингулярной последовательности $\{w_N\}$ оператора $\mathscr{T}$ в точке $\tau = 4\pi^{-2}$. □

Связь (27) спектральных параметров в уравнении (14) и краевой задаче (3), (4) передает свойства τ-спектра, проверенные в теореме 3, μ-спектру, для которого используем обозначение $\sigma = \sigma_e \cup \sigma_d$. Точка $\tau = 0$ переводится в бесконечно удаленную точку $\mu = \infty$, которая, разумеется, выпадает из существенного спектра $\sigma_e = [\pi^2/4, +\infty)$.

Замечание 5. Весьма правдоподобно выглядит гипотеза: полуинтервал $(0, 4\pi^{-2}]$ — непрерывный спектр оператора $\mathscr{T}$. Для ее подтверждения достаточно проверить, что никакая точка полуинтервала не может быть бесконечнократным собственным числом оператора. Автор не знает, как установить этот, на первый взгляд элементарный, факт. Интересно то, что по разным причинам ни теория в [4] (см. также монографию [3]) эллиптических краевых задач в угловых (конических) областях, ни результаты из [14, 15] о поведении на бесконечности решений формально самосопряженных краевых задач в угловых областях с параболическими и периодическими окаймлениями (полуполосы — частный случай) не позволяют установить конечномерность ядра оператора задачи (3), (4) при $\mu \geqslant \pi^2/4$. Таким образом, вопрос о непрерывном спектре остается открытым. Вместе с тем метод [14, 15] применим к задаче (21) при любом $\mu \notin [\pi^2/4, +\infty)$, в том числе комплексном. □

4. Дискретный спектр задачи о пограничном слое. Следующее утверждение показывает, что в случае выпуклого угла дискретный спектр у задачи (21) отсутствует.

Предложение 6. *Если $\alpha < \pi$, то справедливо неравенство*

$$\|w; L_2(\varpi)\|^2 \leqslant 4\pi^{-2}\|\nabla_\xi w; L_2(\Pi)\|^2, \quad w \in \mathscr{H}, \tag{37}$$

т. е. $\sigma_d = \varnothing$ и $\Sigma_d = \varnothing$.

Доказательство. К одномерному неравенству Фридрихса (29), проинтегрированному по $\xi_2 \in (H, +\infty)$, добавим такое же неравенство для полуполосы, примыкающей ко второй стороне угла $\mathbb{K}$, а также неравенство

$$\|w; L_2(\Upsilon)\|^2 \leqslant \beta_1\|\nabla_\xi w; L_2(\Upsilon)\|^2, \quad w \in H^1(\Upsilon),\ w(x) = 0,\ x \in \partial\Pi \cap \partial\Upsilon, \tag{38}$$

на оставшейся части окаймления — четырехугольнике Υ. В результате приходим к оценке (37), обеспечивающей отсутствие дискретного спектра. Само соотношение (38) есть не что иное, как следствие минимального принципа, примененного к оператору смешанной краевой задачи в Υ, причем на двух его сторонах назначены условия Неймана, а на двух, отмеченных последними в формуле (38), — условия Дирихле. Первое собственное число указанной задачи меньше $\pi^2/4$ опять-таки благодаря одномерному неравенству Фридрихса. Это неравенство применяется на отрезках, перпендикулярных катетам (с условиями Дирихле) прямоугольных треугольников $\Upsilon_\pm$, на которые биссектриса угла Π рассекает четырехугольник Υ. □

Для проверки непустоты дискретного спектра воспользуемся вариационным методом, почерпнутым из разных источников, в частности, [16, 17], и сформулированным в [18, 19].

Предложение 7. *Если $\alpha \geqslant \alpha_*$, где α_* — решение трансцендентного уравнения* (9)*, то $\sigma_d \neq \varnothing$ и $\Sigma_d \neq \varnothing$.*

Доказательство. Нижняя грань спектра оператора $-\mathscr{T}$ (со знаком минус) вычисляется по формуле (см., например, [7, § 10.2])

$$-\underline{\Sigma} = \inf_{w\in\mathscr{H}\setminus\{0\}} \frac{-\langle \mathscr{T}w, w\rangle}{\langle w, w\rangle} = -\sup_{w\in\mathscr{H}\setminus\{0\}} \frac{\|w; L_2(\varpi)\|^2}{\|\nabla_\xi w; L_2(\Pi)\|^2}.$$

Таким образом, согласно теореме 3 в случае $\Sigma_d = \varnothing$ величина $\underline{\Sigma}$ совпадает с верхней гранью $4\pi^{-2}$ существенного спектра самого оператора $\mathscr{T}$, т. е. справедливо неравенство

$$\|w; L_2(\varpi)\|^2 \leqslant 4\pi^{-2}\|\nabla_\xi w; L_2(\Pi)\|, \quad w \in \mathscr{H}. \tag{39}$$

Подставим в соотношение (39) пробную функцию w^δ, зависящую от параметра $\delta > 0$, определенную на половине $\Pi_+ = \{\xi \in \Pi : \varphi \in (0, \alpha/2)\}$ угла Π формулой

$$w^\delta(\xi) = \begin{cases} \cos(\pi\xi_2/2)\exp(-\delta\xi_1) & \text{при } \xi \in \varpi_+, \\ \exp(-\delta|\xi|) & \text{при } \xi \in \mathbb{K}_+ \end{cases} \tag{40}$$

и продолженную по четности через биссектрису на вторую половину Π_-. Ясно, что $w^\delta \in \mathscr{H}$. Поскольку $\exp(-\delta\xi_1) = 1 + O(\delta)$ при $\xi \in \varpi_+$, $\xi_1 \leqslant H$, имеем

$$\begin{aligned}\|w^\varepsilon; L_2(\varpi_+)\|^2 &= \int_{-1}^{0}\Bigg(\int_{H}^{+\infty}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\xi_2\right)\right)^2\exp(-2\delta\xi_1)\,d\xi_1 \\ &\quad + \left(H - \xi_2\operatorname{ctg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\xi_2\right)\right)^2 + O(\delta)\Bigg)d\xi_2 \\ &= \frac{1}{4\delta}\exp(-2\delta H) + \frac{1}{2}\left(H + \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) - \frac{1}{\pi^2}\operatorname{ctg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) + O(\delta), \end{aligned} \tag{41}$$

$$\begin{aligned}\|\nabla_\xi w^\varepsilon; L_2(\varpi_+)\|^2 &= \int_{-1}^{0}\Bigg(\int_{H}^{+\infty}\left(\frac{\pi^2}{4}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\xi_2\right)\right)^2\right. \\ &\quad \left. + \delta^2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\xi_2\right)\right)^2\right)\exp(-2\delta\xi_1)\,d\xi_1 \\ &\quad + \left(H - \xi_2\operatorname{ctg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)\left(\frac{\pi^2}{4}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\xi_2\right)\right)^2 + \delta^2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\xi_2\right)\right)^2\right) + O(\delta)\Bigg)d\xi_2 \\ &= \frac{\pi^2}{16\delta}\exp(-2\delta H) + \frac{\pi^2}{8}\left(H + \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) + \frac{1}{4}\operatorname{ctg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) + O(\delta), \end{aligned}$$

$$\|\nabla_\xi w^\varepsilon; L_2(\mathbb{K}_+)\|^2 = \delta^2\int_0^{+\infty}\int_0^{\alpha/2}|\nabla_\xi\rho|^2\exp(-2\delta\rho)\rho\,d\rho d\varphi = \frac{\alpha}{8}.$$

В соотношении (39) большинство членов из правых частей (41) взаимно уничтожаются, в частности, те, которые растут при $\delta \to +0$. В итоге обнаруживаем, что это соотношение с пробной функцией (40) принимает вид

$$2\left|\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right| \leqslant \frac{\alpha}{2} + c\delta. \tag{42}$$

Если $\alpha_* \in (\pi, 2\pi)$ — корень трансцендентного уравнения (38), то при $\alpha > \alpha_*$ и достаточно малом $\delta > 0$ неравенство (42) невозможно. Обнаруженное противоречие означает, что предположение $\underline{\Sigma} = 4\pi^{-2}$ неверно, т. е. дискретный спектр Σ_d непустой.

Если $\alpha = \alpha_*$, то формула (42) не приводит к противоречию. Действуя в соответствии с [19], изменим пробную функцию и положим

$$w_0^\delta(\xi) = w^\delta(\xi) + \sqrt{\delta} w_0(\xi), \tag{43}$$

где w^δ по-прежнему задана формулой (40), а $w_0 \in C_c^\infty(\Upsilon)$ — произвольная функция, четная относительно биссектрисы угла Π (множество Υ указано на рис. 4(b)). Опираясь на выкладки (41), продолжим вычисления и при учете условия $\alpha = \alpha_*$, уничтожающего и члены порядка δ^0 в неравенстве (39) с пробной функцией (43), приходим к соотношению

$$2 \times 2\sqrt{\delta}\frac{4}{\pi^2}\Big(\cos\Big(\frac{\pi}{2}\xi_2\Big), w_0\Big)_{\Upsilon_+} \leqslant 2 \times 2\sqrt{\delta}\Big(\nabla_\xi \cos\Big(\frac{\pi}{2}\xi_2\Big), \nabla_\xi w_0\Big)_{\Upsilon_+} + c\delta. \tag{44}$$

Заметим, что ввиду четности относительно биссектрисы интегралы по Υ_+ и Υ_- совпадают, поэтому в обеих частях (44) поставлен множитель два; второй такой множитель унаследован от перекрестных членов при умножении суммы (43) на нее саму скалярно. Интегрируя по частям и учитывая, что $\cos(\pi\xi_2/2)$ — решение уравнения Гельмгольца в полосе $\mathbb{R}\times(-1,0)$ с коэффициентом $\pi^2/4$ и по предположению функция w_0 обращается в нуль на двух сторонах треугольника $\Upsilon_+ = \{\xi \in \Upsilon : \xi_1 > \xi_2 \operatorname{ctg}(\alpha/2)\}$, преобразуем соотношение (44) в такое:

$$16\pi^{-2}\sqrt{\delta}(\partial_\nu \cos(\pi\xi_2/2), w_0)_\varsigma \leqslant 4\sqrt{\delta}((-\Delta_\xi - 4\pi^{-2})\cos(\pi\xi_2/2), w_0)_{\Upsilon_+} + c\delta. \tag{45}$$

При этом ς — сторона треугольника Υ_+, лежащая на биссектрисе угла, а ν — внешняя нормаль на ней. Поскольку сужение $w_0|_\varsigma$ произвольно, скалярному произведению из левой части (45) можно придать любой знак и величину (производная $\partial_\nu \cos(\pi\xi_2/2)$ обращается в нуль всюду на ς только в случае $\alpha = \pi$). Полученное противоречие $C\sqrt{\delta} \leqslant c\delta$ заканчивает доказательство предложения. $\square$

Дискретный спектр устойчив по отношению к малым возмущениям оператора (см., например, [13, теорема 10.2.2]), поэтому множество значений параметра α, при которых спектр σ_d непуст, не может быть замкнутым сегментом. Таким образом, мажоранта α_*, найденная в предложении 7, заведомо неточная. Вычисление точной грани $\underline{\alpha} = \sup\{\alpha \in (\pi, 2\pi) \mid \sigma_d(\alpha) = \varnothing\}$ остается открытым вопросом. Также неясно, совпадает ли эта грань с $\bar{\alpha} = \inf\{\alpha \in (\pi, 2\pi) \mid \sigma_d(\alpha) \neq \varnothing\}$. Подчеркнем, что отсутствие ответов на упомянутые вопросы никак не сказывается на основном результате работы.

5. Первичная информация о локализации собственной функции. Следующая весовая оценка устанавливает свойство локализации некоторых из собственных функций. Используется весовой множитель

$$R_\vartheta^\varepsilon(x) = \big(\min\big\{\varepsilon^2 + r_\varepsilon^2, \varepsilon^2 + d^2\big\}\big)^{\vartheta/2}, \tag{46}$$

где $\vartheta \in \mathbb{R}$, r_ε — расстояние до вершины $\mathscr{O}^\varepsilon$ угла $\mathbb{K}^\varepsilon$, а параметр $d > 0$ зафиксирован так, чтобы внутри $2d$-окрестности $\mathscr{V}_{2d}^\varepsilon$ точки $\mathscr{O}^\varepsilon$ область Ω^ε совпала с углом $\mathbb{K}^\varepsilon$.

Теорема 8. *Пусть* $u^\varepsilon \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega^\varepsilon)$ *— собственная функция задачи* (3), (4), *нормированная условием* (7) *и отвечающая собственному числу*

$$\lambda^\varepsilon \in (0, \varepsilon^m(\pi^2/4 - \theta)), \tag{47}$$

где $\theta > 0$ *— некоторая малая фиксированная (не зависящая от* ε*) величина. Тогда при любом*

$$\vartheta \in (-2\alpha^{-1}\theta^{1/2}, 2\alpha^{-1}\theta^{1/2}) \tag{48}$$

найдется такое число $\varepsilon_\theta > 0$*, что при всяком* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_\theta)$ *выполнено неравенство*

$$\big\|R^\varepsilon_\vartheta \nabla_x u^\varepsilon; L_2(\Omega^\varepsilon)\big\| + \big\|R^\varepsilon_{\vartheta-1} u^\varepsilon; L_2(\Omega^\varepsilon)\big\| \leqslant c_\theta \varepsilon^{\vartheta + m/2}, \tag{49}$$

где множитель c_θ *не зависит от* u^ε *и* ε*, а весовые функции определены формулой* (46).

Доказательство. Подставим в тождество (5) пробную функцию $v^\varepsilon = R^\varepsilon_\vartheta U^\varepsilon$, где $U^\varepsilon = R^\varepsilon_\vartheta u^\varepsilon$. Несложные преобразования показывают, что

$$\begin{aligned}(\nabla_x u^\varepsilon, \nabla_x v^\varepsilon)_{\Omega^\varepsilon} &= \big(R^\varepsilon_\vartheta \nabla_x u^\varepsilon, \nabla_x U^\varepsilon\big)_{\Omega^\varepsilon} + \big(\nabla_x u^\varepsilon, u^\varepsilon \nabla_x R^\varepsilon_\vartheta\big)_{\Omega^\varepsilon} = (\nabla_x U^\varepsilon, \nabla_x U^\varepsilon)_{\Omega^\varepsilon} \\ &\quad - \big(u^\varepsilon \nabla_x R^\varepsilon_\rho, \nabla_x U^\varepsilon\big)_{\Omega^\varepsilon} + \big(\nabla_x U^\varepsilon, u^\varepsilon \nabla_x R^\varepsilon_\vartheta\big)_{\Omega^\varepsilon} - \big(u^\varepsilon \nabla_x R^\varepsilon_\vartheta, u^\varepsilon \nabla_x R^\varepsilon_\vartheta\big)_{\Omega^\varepsilon} \\ &= \|\nabla_x U^\varepsilon; L_2(\Omega^\varepsilon)\|^2 - \big\|U^\varepsilon \big(R^\varepsilon_\vartheta\big)^{-1} \nabla_x R^\varepsilon_\vartheta; L_2(\Omega^\varepsilon)\big\|^2 =: J_1 - J_2. \end{aligned} \tag{50}$$

Правую часть тождества запишем в виде

$$\begin{aligned}&\lambda^\varepsilon((a + \varepsilon^{-m-2}\mathfrak{x}^\varepsilon)u^\varepsilon, v^\varepsilon)_{\Omega^\varepsilon} = a\lambda^\varepsilon \|U^\varepsilon; L_2(\Omega^\varepsilon)\|^2 \\ &\quad + \varepsilon^{-2-m}\lambda^\varepsilon \|U^\varepsilon; L_2(\omega^\varepsilon \setminus \Upsilon^\varepsilon)\|^2 + \varepsilon^{-2-m}\lambda^\varepsilon \|U^\varepsilon; L_2(\Upsilon^\varepsilon)\|^2 =: J_3 + J_4 + J_5, \end{aligned} \tag{51}$$

где $\Upsilon^\varepsilon = \{x : \varepsilon^{-1}x \in \Upsilon\}$ — четырехугольник, вырезанный из окаймления ω^ε около угловой точки $\mathscr{O}$. На этом четырехугольнике $R^\varepsilon_\beta(x) \leqslant c\varepsilon^\vartheta$, а значит,

$$J_5 \leqslant c\lambda^\varepsilon \varepsilon^{-2-m}\varepsilon^{2\vartheta} \|u^\varepsilon; L_2(\Upsilon^\varepsilon)\|^2 \leqslant c\varepsilon^{m+2\vartheta}(\varepsilon^{-2-m}\mathfrak{x}^\varepsilon u^\varepsilon, u^\varepsilon)_{\omega^\varepsilon} \leqslant c\varepsilon^{m+2\vartheta}. \tag{52}$$

Поскольку

$$\|U; L_2(\Omega^\varepsilon)\| \leqslant c\|\nabla_x U^\varepsilon; L_2(\Omega^\varepsilon)\|, \tag{53}$$

имеем

$$J_3 = a\lambda^\varepsilon \|U^\varepsilon; L_2(\Omega^\varepsilon)\|^2 \leqslant c\varepsilon^m \|\nabla_x U^\varepsilon; L_2(\Omega^\varepsilon)\|^2 = c\varepsilon^m J_1. \tag{54}$$

Кроме того, справедливы формула

$$\big|\nabla_x R^\varepsilon_\vartheta(x)\big| = \begin{cases} \vartheta r_\varepsilon R^\varepsilon_{\vartheta-1}(x) & \text{при } r_\varepsilon \leqslant d, \\ 0 & \text{при } r_\varepsilon > d \end{cases} \tag{55}$$

и весовая оценка

$$\big\|r_\varepsilon^{-1} U^\varepsilon; L_2\big(\Omega^\varepsilon \cap \mathscr{V}^\varepsilon_d\big)\big\| \leqslant \alpha^2\pi^{-2}\big\|\nabla_x U^\varepsilon; L_2\big(\Omega^\varepsilon \cap \mathscr{V}^\varepsilon_d\big)\big\|, \quad U^\varepsilon \in \overset{\circ}{H}{}^0(\Omega^\varepsilon). \tag{56}$$

Она получается интегрированием по $r_\varepsilon \in (0, d)$ умноженного на r_ε^{-1} неравенства

$$\int\limits_0^\alpha |U^\varepsilon(r_\varepsilon, \varphi_\varepsilon)|^2 \, d\varphi \leqslant \frac{\alpha^2}{\pi^2} \int\limits_0^\alpha \left|\frac{\partial U^\varepsilon}{\partial \varphi_\varepsilon}(r_\varepsilon, \varphi_\varepsilon)\right|^2 d\varphi, \quad U^\varepsilon(r_\varepsilon, 0) = U^\varepsilon(r_\varepsilon, \alpha) = 0. \tag{57}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} J_2 &\leqslant \vartheta^2 \big\|r_\varepsilon\big(\varepsilon^2 + r_\varepsilon^2\big)^{-1} U^\varepsilon; L_2\big(\Omega^\varepsilon \cap \mathscr{V}^\varepsilon_d\big)\big\|^2 \\ &\leqslant \vartheta^2\alpha^2\pi^{-2}\big\|\nabla_x U^\varepsilon; L_2\big(\Omega^\varepsilon \cap \mathscr{V}^\varepsilon_d\big)\big\|^2 \leqslant \vartheta^2\alpha^2\pi^{-2} J_1. \end{aligned} \tag{58}$$

Наконец, одномерное неравенство Фридрихса (29), примененное к функции U^ε, которая записана на множестве $\omega^\varepsilon \setminus \Upsilon^\varepsilon$ при помощи естественных криволинейных координат n и s, т. е. ориентированного расстояния до контура Γ и длины дуги на нем, обеспечивает соотношение

$$\|U^\varepsilon; L_2(\omega^\varepsilon \setminus \Upsilon^\varepsilon)\|^2 = \int\limits_{\Gamma'_\varepsilon} \int\limits_0^\varepsilon |U^\varepsilon(n,s)|^2 (1 + n\varkappa(s))\, dnds$$

$$\leqslant (1 + \varkappa_0\varepsilon) \int\limits_{\Gamma'_\varepsilon} \int\limits_0^\varepsilon |U^\varepsilon(n,s)|^2\, dnds \leqslant \frac{4\varepsilon^2}{\pi^2}(1 + \varkappa_0\varepsilon) \int\limits_{\Gamma'_\varepsilon} \int\limits_0^\varepsilon |\partial_n U^\varepsilon(n,s)|^2\, dnds$$

$$\leqslant \frac{4\varepsilon^2}{\pi^2}\frac{1 + \varkappa_0\varepsilon}{1 - \varkappa_0\varepsilon}\|\nabla_x U^\varepsilon; L_2(\omega^\varepsilon \setminus \Upsilon^\varepsilon)\|^2 = \frac{4\varepsilon^2}{\pi^2}\frac{1 + \varkappa_0\varepsilon}{1 - \varkappa_0\varepsilon} J_1. \quad (59)$$

Здесь $1 + n\varkappa(s)$ — якобиан, $\varkappa$ — кривизна дуги $\Gamma \setminus \mathscr{O}$, причем по определению $\varkappa$ равна нулю в окрестности начала координат, где контур Γ состоит из двух отрезков прямых, а $\varkappa_0$ — максимум функции $s \mapsto |\varkappa(s)|$. Числитель $4\varepsilon^2$ возник благодаря малости длины интервала $(0, \varepsilon) \ni n$. Теперь в силу предположения (47) приходим к оценке

$$\lambda^\varepsilon \varepsilon^{-2-m}\|U^\varepsilon; L_2(\omega^\varepsilon \setminus \Upsilon^\varepsilon)\|^2 \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2}\left(\frac{\pi^2}{4} - \theta\right)\frac{4\varepsilon^2}{\pi^2}\frac{1 + \varkappa_0\varepsilon}{1 - \varkappa_0\varepsilon}\|\nabla_x U^\varepsilon; L_2(\omega^\varepsilon \setminus \Upsilon^\varepsilon)\|^2$$

$$= (1 - 4\pi^{-2}\theta)(1 + C\varepsilon) J_1. \quad (60)$$

Полученные оценки (52), (54), (58) и (60) позволяют вывести из равенства (50), (51), унаследованного от интегрального тождества (5), соотношение

$$\|\nabla_x U^\varepsilon; L_2(\Omega^\varepsilon)\|^2 (1 - (1 - 4\pi^{-2}\theta)(1 + C\varepsilon) - \vartheta^2\alpha^2\pi^{-2} - c\varepsilon^m) \leqslant c\varepsilon^{m+2\vartheta}.$$

Если выполнено ограничение (48), то можно выбрать $\varepsilon_\vartheta > \varepsilon$ так, чтобы множитель при $\|\nabla_x U^\varepsilon; L_2(\Omega^\varepsilon)\|^2$ оказался положительным. В результате при учете неравенств (53) и (56) обнаруживаем, что

$$\|\nabla_x U^\varepsilon; L_2(\Omega^\varepsilon)\|^2 + \left\|\left(\varepsilon^2 + r_\varepsilon^2\right)^{-1/2} U^\varepsilon; L_2(\Omega^\varepsilon)\right\|^2 \leqslant c_\vartheta \varepsilon^{m+2\vartheta}. \quad (61)$$

Осталось заметить, что в силу формулы (55) и определения $U^\varepsilon = R^\varepsilon_\vartheta u^\varepsilon$ квадратичные формы из левых частей (61) и (49) эквивалентны. $\square$

Соотношение (14) в п. 1 обеспечено формулами (61) и (53), но является более грубым, чем приведенное в теореме 8. Оценку (49) можно уточнить, привлекая вместо (56) неравенство с весовым множителем, зависящим от функции Φ угловой переменной (ср. лемму 1). Также можно применить неравенства Фридрихса с малой постоянной $O(\varepsilon^2)$ на элементах мелкого, диаметром $O(\varepsilon)$, разбиения окаймления, просуммировать их и получить соотношение $\varepsilon^{-1}\left\|u_1^\varepsilon; L_2(\Upsilon^\varepsilon)\right\| \leqslant c_\vartheta^{\vartheta+m/2}$. В любом варианте обработанные весовые нормы подтверждают эффект локализации первой собственной функции (см. пояснения в п. 1).

6. Асимптотика собственного числа и собственной функции. Всюду в этом пункте считаем, что дискретный спектр σ_d вариационной задачи (21) (или задачи (20) в дифференциальной форме) содержит хотя бы одну точку — первое собственное число $\mu_1 \in (0, \pi^2/4)$. При $\alpha \geqslant \alpha_*$ это требование выполнено

согласно предложению 7. По принципу максимума (см., например, [20]) первое собственное число простое, а соответствующую собственную функцию можно выбрать положительной в Π. Введем обозначение $\mu_* = \pi^2/4$, если спектр σ_d состоит из одной точки, и $\mu_* = \mu_2 > \mu_1$ в противном случае. При этом на сегменте

$$[0, (\mu_1 + \mu_*)/2] \tag{62}$$

имеется только точка μ_1 спектра.

Предположим, что $\lambda_p^\varepsilon < \varepsilon^m \pi^2/4$ при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_p)$, $\varepsilon_p > 0$, и тем самым найдем бесконечно малую последовательность $\{\varepsilon_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, для которой

$$\varepsilon^{-m}\lambda_p^{\varepsilon_j} \to \mu_p^0 \in (0, \pi^2/4) \quad \text{при } j \to +\infty. \tag{63}$$

Пусть еще χ — гладкая срезающая функция, равная единице в d-окрестности $\mathscr{V}_d$ точки $\mathscr{O}$ и нулю вне $\mathscr{V}_{2d} \subset \mathscr{V}$, т. е. число $d > 0$ зафиксировано малым. По собственной функции u_p^ε, подчиненной условию (7), определим функцию быстрых переменных (14)

$$w_p^\varepsilon(\xi) = \varepsilon^{-m/2}\chi(\varepsilon\xi)u_p^\varepsilon(\varepsilon\xi), \tag{64}$$

принадлежащую $\mathscr{H}$ ввиду компактности ее носителя и включения $u_p^\varepsilon \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega^\varepsilon)$. Имеем

$$\begin{aligned}\big\|\nabla_\xi w_p^\varepsilon; L_2(\Pi)\big\|^2 &= \varepsilon^{-m}\big\|\nabla_x\big(\chi u_p^\varepsilon\big); L_2(\Omega^\varepsilon)\big\|^2 \\ &\leqslant c\varepsilon^{-m}\big(\big\|\nabla_x u_p^\varepsilon; L_2(\Omega^\varepsilon)\big\|^2 + \big\|u_p^\varepsilon; L_2(\Omega^\varepsilon \setminus \mathscr{V}_d)\big\|^2\big) \\ &\leqslant c\varepsilon^{-m}\big(\lambda_p^\varepsilon\big\|(a + \varepsilon^{-2-m}\mathfrak{r}^\varepsilon)^{1/2}u_p^\varepsilon; L_2(\Omega^\varepsilon)\big\|^2 + \big\|R_0^\varepsilon u_p^\varepsilon; L_2(\Omega^\varepsilon)\big\|^2\big) \leqslant c.\end{aligned}$$

При этом учтены интегральное тождество (5), предположение о собственном числе λ_p^ε и неравенство (49) с допустимым показателем $\vartheta = 0$ (обращаем внимание на то, что $R_0^\varepsilon(x) \geqslant c > 0$ на $\Omega^\varepsilon \setminus \mathscr{V}_d$). Таким образом, разрежая при необходимости последовательность $\{\varepsilon_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, находим

$$w_p^{\varepsilon_j} \to w_p^0 \quad \text{слабо в } \mathscr{H} \text{ при } j \to +\infty. \tag{65}$$

Убедимся в том, что

$$w_p^{\varepsilon_j} \to w_p^0 \quad \text{сильно в } L_2(\varpi) \text{ при } j \to +\infty, \tag{66}$$

может быть, опять после выделения из $\{\varepsilon_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ подпоследовательности. К сожалению, сходимость (66) не вытекает непосредственно из формулы (65) из-за отсутствия компактности вложения $\mathscr{H} \subset L_2(\varpi)$. Воспользуемся теоремой 8 и заметим, что из оценки (49) с положительным малым показателем ϑ вытекает, что

$$\begin{aligned}\big\|(1 + |\xi|^2)^{\vartheta/2}\nabla_\xi w_p^\varepsilon; L_2(\Pi)\big\|^2 &= \varepsilon^{-2\vartheta-m}\big\|R_\vartheta^\varepsilon\nabla_x\big(\chi u_p^\varepsilon\big); L_2(\Omega^\varepsilon)\big\|^2 \\ &\leqslant \varepsilon^{-2\vartheta-m}\big(\big\|R_\vartheta^\varepsilon\nabla_x u_p^\varepsilon; L_2(\Omega^\varepsilon)\big\|^2 + \big\|R_{\vartheta-1}^\varepsilon u_p^\varepsilon; L_2(\Omega^\varepsilon)\big\|^2\big) \leqslant c.\end{aligned}$$

Справедливо неравенство

$$\begin{aligned}\big\|(1 + |\xi|^2)^{\vartheta/2}\nabla_\xi w_p^\varepsilon; L_2(\Pi)^2\big\|^2 &\geqslant c\big\|(1 + |\xi|^2)^{\vartheta/2}\mathscr{R}^{-1}w_p^\varepsilon; L_2(\varpi)\big\|^2 \\ &\geqslant c\big\|(1 + |\xi|^2)^{\vartheta/2}w_p^\varepsilon; L_2(\varpi)\big\|^2, \quad c > 0,\end{aligned}$$

которое проверяется в точности так же, как лемма 1 со следствием 2, где и был определен весовой множитель $\mathscr{R}$. Таким образом, при некотором $\vartheta > 0$ имеем

$$\big\|w_p^\varepsilon - w_p^0; L_2(\varpi)\big\| \leqslant c\big((1+h^2)^{-\vartheta/2}\big\|(1+|\xi|^2)^{\vartheta/2}\big(w_p^\varepsilon - w_p^0\big); L_2(\varpi\setminus\varpi(h))\big\|^2 + \big\|w_p^\varepsilon - w_p^0; L_2(\varpi(h))\big\|^2\big);$$

здесь $\varpi(h) = \{\xi \in \varpi : |\xi| < h\}$ — ограниченное множество, для которого вложение $\mathscr{H} \subset L_2(\varpi(h))$ компактно. Итак, благодаря множителю $(1+h^2)^{-\vartheta/2}$ (его можно сделать сколь угодно малым, увеличивая параметр h) сходимость по норме в $L_2(\varpi)$ имеется.

Возьмем какую-либо функцию $z \in C_c^\infty(\Pi)$ и положим $v^\varepsilon(x) = \varepsilon^{m/2} z(\varepsilon^{-1}x)$. Если параметр ε мал, то $v^\varepsilon = 0$ вне $\Omega^\varepsilon \cap \mathscr{V}_{2d}$, т. е. $\chi v^\varepsilon = v^\varepsilon$ и $v^\varepsilon \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega^\varepsilon)$. Интегральное тождество (5) с ингредиентами u_p^ε, λ_p^ε и χv^ε умножим на ε^{-m} и перепишем в виде

$$0 = \varepsilon^{-m}\big(\big(\nabla_x u_p^\varepsilon, \chi\nabla_x v^\varepsilon\big)_{\Omega^\varepsilon} - \lambda_p^\varepsilon\big((a+\varepsilon^{-2-m}\chi^\varepsilon)u_p^\varepsilon, \chi v^\varepsilon\big)_{\Omega^\varepsilon}\big) = \big(\nabla_\xi w_p^\varepsilon, \nabla_\xi z\big)_\Pi - \varepsilon^{-m}\lambda_p^\varepsilon\big(w_p^\varepsilon, z\big)_\varpi - \varepsilon^{-m}\big(u_p^\varepsilon\nabla_x\chi, \nabla_x v^\varepsilon\big)_{\Omega^\varepsilon} + \varepsilon^{-m}\lambda_p^\varepsilon a\big(u_p^\varepsilon, v^\varepsilon\big)_{\Omega^\varepsilon}. \quad (67)$$

Третье слагаемое справа обращается в нуль ввиду того, что носители функций $|\nabla_x\chi|$ и v^ε не пересекаются. Последнее слагаемое не превосходит величины

$$\frac{1}{4}\pi^2\big\|u_p^\varepsilon; L_2(\Omega^\varepsilon)\big\|\varepsilon^{1+m/2}\|z; L_2(\Pi)\|$$

и исчезает в пределе при $\varepsilon \to 0$ для фиксированной функции $z \in C_c^\infty(\Pi)$, так как $L_2(\Omega^\varepsilon)$-норма собственной функции меньше $a^{-1/2}$ согласно условиям нормировки (7) (отбросили слагаемое $\varepsilon^{-2-m}\mathfrak{x}^\varepsilon$ в функции плотности). Теперь вычисляем предел первых двух слагаемых в правой части (67) при помощи формул (63) и (65), (66) и приходим к интегральному тождеству

$$\big(\nabla_\xi w_p^0, \nabla_\xi z\big)_\Pi = \mu_p^0\big(w_p^0, z\big)_\varpi, \quad z \in C_c^\infty(\Pi).$$

Заметим, что

$$\big\|w_p^0; L_2(\varpi)\big\|^2 = \lim_{\varepsilon_j\to 0}\big\|w_p^\varepsilon; L_2(\varpi)\big\|^2 = \lim_{\varepsilon_j\to 0}\varepsilon^{-m-2}\big\|\chi u_p^\varepsilon; L_2(\omega^\varepsilon)\big\|^2 = 1 - \lim_{\varepsilon_j\to 0}\big(\varepsilon^{-m-2}\big\|(1-\chi^2)^{1/2}u_p^\varepsilon; L_2(\omega^\varepsilon)\big\|^2 + a\big\|u_p^\varepsilon; L_2(\Omega^\varepsilon)\big\|^2\big). \quad (68)$$

Неравенство (49) с показателем $\vartheta = 0$ устанавливает, что $\big\|u_p^\varepsilon; L_2(\Omega^\varepsilon)\big\|^2 \leqslant c\varepsilon^m$. Кроме того, обращаясь к формулам (59) и (49), находим

$$\varepsilon^{-m-2}\big\|(1-\chi^2)^{1/2}u_p^\varepsilon; L_2(\omega^\varepsilon)\big\|^2 \leqslant c\varepsilon^{-m-2}\big\|R_\vartheta^\varepsilon u_p^\varepsilon; L_2(\omega^\varepsilon)\big\|^2 = c\varepsilon^{-m-2}\big\|U_p^\varepsilon; L_2(\omega^\varepsilon)\big\|^2 \leqslant c\varepsilon^{-m}\big\|\nabla_x U_p^\varepsilon; L_2(\omega^\varepsilon)\big\|^2 \leqslant c\varepsilon^{2\vartheta}, \quad \vartheta > 0.$$

Итак, последний предел в соотношении (68) равен нулю, т. е. $\big\|w_p^0; L_2(\varpi)\big\| = 1$, а значит, μ_p^0 и $\tau_p^0 = \big(\mu_p^0\big)^{-1}$ — собственные числа задачи (5) и оператора $\mathscr{T}$ соответственно. Тем самым доказана следующая

Лемма 9. *Если $\lambda_p^\varepsilon < \varepsilon^m\pi^2/4$, то вдоль некоторой бесконечно малой последовательности $\{\varepsilon_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ имеет место сходимость* (63)*, где μ_p^0 — собственное число*

задачи (13), *а отвечающая ему собственная функция находится по формулам* (64)–(66) *и удовлетворяет равенству* $\bigl\|w_p^0; L_2(\varpi)\bigr\| = 1$.

Введем гильбертово пространство $\mathscr{H}^\varepsilon = \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega^\varepsilon)$ со скалярным произведением

$$\langle u^\varepsilon, v^\varepsilon\rangle_\varepsilon = (\nabla_x u^\varepsilon, \nabla_x v^\varepsilon)_{\Omega^\varepsilon} + \varepsilon^m((a+\varepsilon^{-m-2}\mathfrak{x}^\varepsilon)u^\varepsilon, v^\varepsilon)_{\Omega^\varepsilon} \tag{69}$$

и оператор $\mathscr{T}^\varepsilon$, непрерывный и симметрический, т. е. самосопряженный:

$$\langle \mathscr{T}^\varepsilon u^\varepsilon, v^\varepsilon\rangle_\varepsilon = \bigl((a+\varepsilon^{-2-m}\mathfrak{x}^\varepsilon)u_p^\varepsilon, u_q^\varepsilon\bigr)_{\Omega^\varepsilon}, \quad u^\varepsilon, v^\varepsilon \in \mathscr{H}^\varepsilon. \tag{70}$$

К тому же он компактный ввиду ограниченности области Ω^ε. Его дискретный спектр формирует бесконечно малую последовательность $\tau_1^\varepsilon > \tau_2^\varepsilon \geqslant \tau_3^\varepsilon \geqslant \ldots \geqslant \tau_p^\varepsilon \geqslant \ldots \to +0$, в которую собственные числа включены при учете кратностей. Вариационная задача (5) эквивалентна абстрактному уравнению

$$\mathscr{T}^\varepsilon u^\varepsilon = \tau^\varepsilon u^\varepsilon \quad \text{в } \mathscr{H}^\varepsilon \tag{71}$$

с новым спектральным параметром

$$\tau^\varepsilon = (\varepsilon^m + \lambda^\varepsilon)^{-1}. \tag{72}$$

Для вывода формул (71) и (72) нужно прибавить к обеим частям тождества (5) выражение $\varepsilon^m((a+\varepsilon^{-m-2}\mathfrak{x}^\varepsilon)u^\varepsilon, v^\varepsilon)_{\Omega^\varepsilon}$ и разделить результат на $\varepsilon^m+\lambda^\varepsilon$. Свойства оператора позволяют применить классическую лемму о «почти собственных» числах и векторах (см. [21; 13, гл. 6] и др.), которая в достаточной для ближайшей цели общности выглядит так:

$$T^\varepsilon \in (0,+\infty),\ U^\varepsilon \in \mathscr{H}^\varepsilon,\ \|U^\varepsilon; \mathscr{H}^\varepsilon\| = 1,\ \|\mathscr{T}^\varepsilon U^\varepsilon - T^\varepsilon U^\varepsilon; \mathscr{H}^\varepsilon\| = \delta^\varepsilon \in (0, T^\varepsilon)$$
$$\Rightarrow \bigl|T^\varepsilon - \tau_j^\varepsilon\bigr| \leqslant \delta^\varepsilon \ \text{ при некотором } j \in \mathbb{N}. \tag{73}$$

Положим

$$\mathscr{U}_1^\varepsilon(x) = \varepsilon^{-m/2}\chi(x)w_1(\varepsilon^{-1}x), \quad U_1^\varepsilon = \bigl\|\mathscr{U}_1^\varepsilon; \mathscr{H}^\varepsilon\bigr\|^{-1}\mathscr{U}_1^\varepsilon, \quad T_1^\varepsilon = \varepsilon^{-m}(1+\mu_1)^{-1}, \tag{74}$$

где μ_1 и $w_1 \in \mathscr{H}$ — первые собственные число и функция задачи (21), а χ — срезка, введенная перед формулой (67). Очередная лемма позволит оценить нормы, фигурирующие в посылке импликации (73).

Лемма 10. *Если* $w \in \mathscr{H}$ *— собственная функция задачи* (14), *отвечающая ее собственному числу* $\mu \in (0, \pi^2/4)$ *и нормированная условием*

$$\|w; L_2(\varpi)\| = \mu^{-1/2}\|\nabla_\xi w; L_2(\Pi)\| = 1, \tag{75}$$

то при любом

$$\vartheta \in (0, \sqrt{1-4\pi^{-2}\mu}) \tag{76}$$

выполнено неравенство

$$\bigl\|\bigl(1+\rho_1^2\bigr)^{\vartheta/2}\nabla_\xi w; L_2(\Pi)\bigr\| + \bigl\|\bigl(1+\rho_1^2\bigr)^{\vartheta/2}\mathscr{R}^{-1}u^\varepsilon; L_2(\Pi)\bigr\| + \bigl\|\bigl(1+\rho_1^2\bigr)^{\vartheta/2} w; L_2(\varpi)\bigr\| \leqslant c, \tag{77}$$

где $\rho_1(\xi)$ *— расстояние от точки* ξ *до вершины* $\mathscr{O}^1$ *угла* Π.

Доказательство в значительной степени повторяет проверку утверждения теоремы 8. Подставим в тождество (5) пробную функцию $z = R_\ell W_\ell$, где

$W_\ell = R_\ell w$, $R_\ell(\xi) = \min\{(1+\rho_1^2)^{\vartheta/2}, (1+\ell^2)^{\vartheta/2}\}$ (новое обозначение). Аналогично (50) получаем, что

$$\|\nabla_\xi W_\ell; L_2(\Pi)\|^2 - \big\|W_\ell R_\ell^{-1}\nabla_\xi R_\ell; L_2(\Pi)\big\|^2 - \mu\|W_\ell; L_2(\varpi\setminus\Upsilon)\|^2 = \mu\|W_\ell; L_2(\varpi)\|^2.$$

Поскольку $|R_\ell(\xi)^{-1}\nabla_\xi R_\ell(\xi)| \leqslant \vartheta\rho_1\big(1+\rho_1^2\big)^{-1} \leqslant \vartheta\rho_1^{-1}$, первое вычитаемое слева обрабатывается при помощи неравенства (57). Второе вычитаемое можно оценить согласно одномерному неравенству Фридрихса (29) (ср. доказательство теоремы 3). В итоге получаем, что

$$\|\nabla_\xi W_\ell; L_2(\Pi)\|^2(1-\vartheta^2-4\pi^{-2}\mu) \leqslant \mu\|W_\ell; L_2(\varpi)\|^2.$$

По понятной причине правая часть остается ограниченной при $\ell\to+\infty$. Выполнив предельный переход в правой части и заметив, что в условиях леммы множитель $1-\vartheta^2-4\pi^{-2}\mu$ положителен, заканчиваем проверку неравенства (77). □

Перейдем к вычислению норм. Прежде всего заметим, что

$$\big\|\mathscr{U}_1^\varepsilon;\mathscr{H}^\varepsilon\big\|^2 > \|\nabla_x(\chi w_1); L_2(\Omega^2)\|^2 \geqslant \frac{1}{2}\int\limits_\Pi |\nabla_\xi w_1(\xi)|^2\,d\xi$$
$$-\frac{1}{2}\int\limits_\Pi (1-\chi(\varepsilon\xi)^2)|\nabla_\xi w_1(\xi)|^2\,d\xi - \varepsilon^2\int\limits_\Pi |\nabla_x\chi(x)|^2_{x=\varepsilon^{-1}}|w_1(\xi)|^2\,d\xi \geqslant \frac{1}{2} - c\varepsilon^{2\vartheta}. \tag{78}$$

Здесь $\vartheta>0$ — показатель (76) из леммы 10, причем при оценивании воспользовались тем, что благодаря присутствию срезок носители двух последних подынтегральных выражений расположены в множестве $\{\xi\in\overline{\Pi} : |\xi|\geqslant 2d/\varepsilon\}$, где весовые множители $\big(1+\rho_1^2\big)^{\vartheta/2}$ и $\big(1+\rho_1^2\big)^{\vartheta/2}\mathscr{R}(\xi)$ больше соответственно $c\varepsilon^\vartheta$ и $c\varepsilon^{\vartheta-1}$, $c>0$. Итак, при малом ε справедливо неравенство

$$\big\|\mathscr{U}_1^\varepsilon;\mathscr{H}^\varepsilon\big\|^2 \geqslant 1/4. \tag{79}$$

Теперь обработаем величину δ_1^ε из правой части (73). Благодаря условиям нормировки (75) при учете определений (69), (70) получаем

$$\big\|\mathscr{T}^\varepsilon U_1^\varepsilon - T_1^\varepsilon U_1^\varepsilon;\mathscr{H}^\varepsilon\big\| = \varepsilon^{-m}(1+\mu_1)^{-1}\big\|\mathscr{U}_1^\varepsilon;\mathscr{H}^\varepsilon\big\|^{-1}$$
$$\times\sup\big|\varepsilon^m(1+\mu_1)\big\langle\mathscr{T}^\varepsilon\mathscr{U}_1^\varepsilon, v^\varepsilon\big\rangle_\varepsilon - \big\langle\mathscr{U}_1^\varepsilon, v^\varepsilon\big\rangle_\varepsilon\big| = \varepsilon^{-m}(1+\mu_1)^{-1}\big\|\mathscr{U}_1^\varepsilon;\mathscr{H}^\varepsilon\big\|^{-1}$$
$$\times\sup\big|\big(\nabla_x\mathscr{U}_1^\varepsilon, \nabla_x v^\varepsilon\big)_{\Omega^\varepsilon} - \varepsilon^m\mu_1\big((a+\varepsilon^{-2-m}\mathfrak{x}^\varepsilon)\mathscr{U}_1^\varepsilon, v^\varepsilon\big)_{\Omega^\varepsilon}\big|. \tag{80}$$

При этом супремум вычисляется по таким $v^\varepsilon\in\mathscr{H}^\varepsilon$, что $\|v^\varepsilon;\mathscr{H}^\varepsilon\|=1$. В формуле

$$\big(\nabla_x\mathscr{U}_1^\varepsilon, \nabla_x v^\varepsilon\big)_{\Omega^\varepsilon} = (\nabla_x w_1, \nabla_x(\chi v^\varepsilon))_{\Omega^\varepsilon} - (w_1\nabla_x\chi, v^\varepsilon)_{\Omega^\varepsilon} - (\nabla_x w_1, v^\varepsilon\nabla_x\chi)_{\Omega^\varepsilon} \tag{81}$$

модули последних двух скалярных произведений не превосходят величины

$$c\|v^\varepsilon; H^1(\Omega^\varepsilon)\|\Big(\int\limits_{\xi\in\Pi,\varepsilon|\xi|\in[d,2d]} (|\nabla_x w_1(\xi)|^2+\varepsilon^2|w_1(\xi)|^2)\,d\xi\Big)^{1/2} \leqslant c\varepsilon^\vartheta.$$

Как и в соотношении (78), использованы весовые множители, разрешенные леммой 10. Кроме того, аналогично предыдущему находим

$$\big|\varepsilon^m\mu_1\big((a+\varepsilon^{-2-m}\mathfrak{x}^\varepsilon)\mathscr{U}_1^\varepsilon, v^\varepsilon\big)_{\Omega^\varepsilon} - \mu_1\varepsilon^{-2}(w_1,\chi v^\varepsilon)_{\omega^\varepsilon}\big| = \varepsilon^m\mu_1 a|(w_1,\chi v^\varepsilon)_{\Omega^\varepsilon}|$$
$$\leqslant c\varepsilon^m\|v^\varepsilon; L_2(\Omega^\varepsilon)\|\Big(\varepsilon^2(1+4d^2\varepsilon^{-2})^{1-\vartheta}\int\limits_{\xi\in\Pi,\varepsilon|\xi|\in[0,2d]}(1+\rho_1)^\vartheta\mathscr{R}(\xi)^{-2}|w_1(\xi)|^2\,d\xi\Big)^{1/2}$$
$$\leqslant c\varepsilon^{-m+\vartheta}. \tag{82}$$

Принимая во внимание интегральное тождество (13) с пробной функцией $z = \chi v^\varepsilon$, обнаруживаем, что

$$(\nabla_x w_1, \nabla_x(\chi v^\varepsilon))_{\Omega^\varepsilon} = \mu_1 \varepsilon^{-2} (w_1, \chi v^\varepsilon)_{\omega^\varepsilon},$$

а значит, члены, оставшиеся необработанными в формулах (81) и (82), взаимно уничтожаются при подстановке в последнее выражение из (80). В итоге благодаря неравенству (79) выводим соотношение $\delta_1^\varepsilon \leqslant c\varepsilon^{m+\vartheta}$. Таким образом, согласно утверждению (73) существует собственное число $\tau^\varepsilon_{p(\varepsilon)}$ оператора $\mathscr{T}^\varepsilon$, для которого выполнено неравенство

$$\bigl|\tau^\varepsilon_{p(\varepsilon)} - T_1^\varepsilon\bigr| \leqslant c'_\vartheta \varepsilon^{-m+\vartheta}, \tag{83}$$

где показатель ϑ удовлетворяет требованию (76). Вспоминая равенства (72) и (74), выводим из формулы (83) соотношение, связывающее собственные числа задач (3), (4) и (20):

$$\bigl|\varepsilon^{-m}\lambda_1^\varepsilon - \mu_1\bigr| \leqslant c_\vartheta \varepsilon^\vartheta. \tag{84}$$

Обращаем внимание на то, что по сравнению с (83) в формуле (84) фигурирует не какое-то собственное число $\lambda^\varepsilon_{p(\varepsilon)}$, а именно первое λ_1^ε. Эта подмена сделана при помощи следующих соображений. Предположим, что нашлась бесконечно малая последовательность $\{\varepsilon_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, для которой при $\varepsilon = \varepsilon_j$ на сегменте

$$[0, \varepsilon^m(\mu_1 + \mu_*)/2] \tag{85}$$

имеется два собственных числа λ_1^ε и λ_2^ε, а соответствующие собственные функции u_1^ε и u_2^ε подчинены условию (7). Тогда по лемме 9 пределы μ_1^0 и μ_2^0, рассчитанные по формуле (63), принадлежат сегменту (62) и являются собственными числами задачи (20), а значит, $\mu_1^0 = \mu_2^0 = \mu_1$, так как на указанном сегменте есть только одно собственное число и к тому же оно простое. Таким образом, пределы w_1^0 и w_2^0 (см. сходимости (65) и (66)) попадают в одномерное подпространство, натянутое на w_1, что противоречит установленным ранее фактам: $\bigl\|w_1^0; \mathscr{H}\bigr\| = \bigl\|w_2^0; \mathscr{H}\bigr\| = 1$ и $\bigl(Xw_1^0, w_2^0\bigr)_\varpi = 0$ (условие ортогональности унаследовано от условия (7) при $p = 1$, $q = 2$).

Поскольку установлено, что на интервале (85) имеется лишь одно простое собственное число λ_1^ε, уже упоминавшаяся и использованная лемма о почти собственных числах и векторах [21] доставляет асимптотическую формулу для собственной функции

$$\bigl\|u_1^\varepsilon - \varepsilon^{-m/2}\chi w_1; \mathscr{H}\bigr\| \leqslant C_\vartheta \varepsilon^\vartheta, \tag{86}$$

где u_1^ε и w_1 нормированы равенствами (7) и (75) соответственно.

Сформулируем финальную теорему об асимптотике.

Теорема 11. *Пусть дискретный спектр σ_d задачи* (13) *непуст и содержит точку μ_1, первое собственное число. Тогда для любого показателя ϑ, подчиненного требованию* (76) *с $\mu = \mu_1$, найдутся такие положительные величины ε_ϑ и c_ϑ, C_ϑ, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_\vartheta)$ для первого члена λ_1^ε последовательности* (6) *собственных чисел задачи* (3), (4) *и для соответствующей собственной функции u_1^ε верны соотношения* (84) *и* (86).

7. Вопросы, оставшиеся без ответов. Помимо неясностей со строением спектра задачи (13), отмеченных в замечании 5 и конце п. 4, осталась несосчитанной полная кратность дискретного спектра. Вместе с тем если на промежутке $(0, \pi^2/4)$ расположены несколько собственных чисел $\mu_1, \ldots, \mu_J \in \sigma_d$, то прежние выкладки и рассуждения позволяют заключить, что для собственных чисел $\lambda_1^\varepsilon, \ldots, \lambda_J^\varepsilon$ задачи (3), (4) (или (5)) верна формула $\lim \varepsilon^{-m}\lambda_j^\varepsilon = \mu_j$.

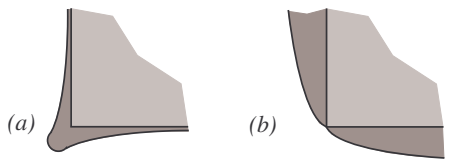

Рис. 5. Углы с сужающимся и расширяющимся (параболическим) окаймлениями.

Несложные изменения и обобщения подхода из п. 3 приводят к следующим выводам: спектр задачи (20) полностью дискретный, если окаймление утончается при $\rho \to \infty$ (рис. 5(a)), и полностью существенный, если утолщается (рис. 5(b)). В последнем случае угол претерпевает «параболическое возмущение» (ср. [15] и замечание 5) и, кроме того, $\sigma_e = [0, +\infty)$. Отметим, что из результатов [22] о компактности вложения класса Соболева H^1 в класс Лебега L_2 на бесконечных пикообразных областях вытекает, что в случае сверхэкспоненциального утончения окаймления ϖ на бесконечности спектр аналогичной (20) задачи Неймана в составной области $\Pi = \overline{\mathbb{K}} \cup \varpi$ (рис. 5(a)) оказывается дискретным, но в случае степенного и экспоненциального убывания или роста ширины спектр все-таки существенный.

При $\mu \in \sigma_e$ для корректной постановки задачу (20) следует дополнить подходящими *условиями излучения*, которые обычно используют асимптотические разложения решений на бесконечности (см., например, [23; 3, гл. 5]). Как уже упоминалось в замечании 5, ни теория из [4, 6], ни подход в [14, 15] не предоставляют такие разложения в случае попадания параметра μ на существенный спектр.

Автору неизвестны какие-либо результаты о спектре задачи Дирихле (20) в многомерном конусе с инородным покрытием постоянной толщины.

Нетрудно убедиться в том, что замена на гладком контуре Γ^ε условий Дирихле (4) краевыми условиями Неймана

$$\partial_\nu u^\varepsilon(x) = 0, \quad x \in \Gamma^\varepsilon, \tag{87}$$

где ∂_ν — производная вдоль внешней нормали, все собственные числа задачи (3), (87) удовлетворяют соотношению

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \lambda_p^\varepsilon = 0, \quad p \in \mathbb{N}. \tag{88}$$

Более того, установлена (см., например, [24]) следующая формула:

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \varepsilon^{-m-1} \lambda_p^\varepsilon = \beta_p, \quad p \in \mathbb{N}. \tag{89}$$

Здесь $0 = \beta_1 < \beta_2 \leqslant \cdots \leqslant \beta_p \leqslant \cdots$ — собственные числа спектральной задачи Стеклова

$$-\Delta_x v(x) = 0, \ x \in \Omega, \quad \partial_\nu v(x) = \beta v(x), \ x \in \Gamma^\varepsilon.$$

Формулу (88) нельзя считать асимптотической: в ней все собственные числа «склеиваются» в пределе. С другой стороны, формула (89) асимптотическая, поскольку она сортирует величины λ_p^ε в соответствии с их поведением при $\varepsilon \to +0$. Точно так же не является асимптотической и формула (8), справедливая для всех элементов последовательности (6) в случае гладкого контура, но формула $\lim \varepsilon^{-m} \lambda_1^\varepsilon = \mu_1$ в области Ω^ε с угловой точкой раствором $\alpha \geqslant \alpha_*$ выделяет единственное (первое) собственное число λ_1^ε.

Весьма возможно, что соотношение (8) выполнено в том случае, если пуст дискретный спектр задачи (20), однако соответствующее утверждение не доказано. Нет ни одной публикации о локализации собственных функций задачи

Неймана. Отсутствие результатов о поведении на бесконечности решений задачи (20) при $\mu = \pi^2/4$ не позволят даже построить асимптотику решений задачи (3), (4) в прямоугольнике Ω с тонким окаймлением ω^ε.

Если допустить окаймления переменной ширины, в частности, нерегулярные, то добиться появления дискретного спектра нетрудно при любом растворе α угла $\mathbb{K}$: достаточно присоединить к окаймлению ϖ круг $\mathbb{B}_\varrho$ большого, но фиксированного (не зависящего от ε) радиуса ϱ, который при замене координат $\xi \mapsto x$ превращается в малое возмущение угловой точки, изображенное на рис. 2(b). Принцип сравнения (см., например, [25]) позволяет без труда установить, что при большом ϱ задача (21) в новой угловой области $\Pi_\varrho = \Pi \cup \mathbb{B}_\varrho$ обязательно имеет собственное число $\mu_1 \in (0, \pi^2/4)$, т. е. ее дискретный спектр непуст. В частности, и при гладком контуре Γ задаче (3), (4) с нерегулярно возмущенным окаймлением свойственна локализация первой собственной функции. При этом окаймление необходимо увеличивать: уменьшение множества ω^ε (ср. скругление угла на рис. 2(a)) не способствует появлению дискретного спектра у задачи о пограничном слое. Последний вывод опять-таки делается на основе принципа сравнения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Sanchez-Palencia E.* Perturbation of eigenvalues in thermoelasticity and vibration of systems with concentrated masses // Lect. Notes Phys. 1984. V. 195. P. 346–368.

2. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.

3. *Назаров С. А., Пламеневский Б. А.* Эллиптические задачи в областях с кусочно гладкой границей. М.: Наука, 1991.

4. *Кондратьев В. А.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Тр. Моск. мат. о-ва. 1963. Т. 16. С. 219–292.

5. *Pazy A.* Asymptotic expansions of solutions of ordinary differential equations in Hilbert space // Arch. Rational Mech. Anal. 1967. V. 24. P. 193–218.

6. *Мазья В. Г., Пламеневский Б. А.* Оценки в L_p и в классах Гёльдера и принцип максимума Миранда — Агмона для решений эллиптических краевых задач в областях с особыми точками на границе. Math. Nachr. 1977. Bd 77. S. 25–82.

7. *Мазья В. Г., Назаров С. А., Пламеневский Б. А.* Асимптотика решений эллиптических краевых задач при сингулярном возмущении области. Тбилиси: Изд-во ТГУ, 1981.

8. *Lobo M., Pérez E.* Local problems or vibrating systems with concentrated masses: a review // C. R. Mecanique. 2003. V. 331. P. 303–317.

9. *Камоцкий И. В., Назаров С. А.* О собственных функциях, локализованных около кромки тонкой области // Проблемы мат. анализа. Вып. 19. Новосибирск: Научн. книга, 1999. С. 105–148.

10. *Nazarov S. A.* Localization effects for eigenfunctions near to the edge of a thin domain // Math. Bohem. 2002. V. 127, N 2. P. 283–292.

11. *Friedlander L., Solomyak M.* On the spectrum of the Dirichlet Laplacian in a narrow strip // Israel J. Math. 2009. V. 170. P. 337–354.

12. *Ландау Л. Д., Лившиц М. Е.* Квантовая механика. Нерелятивистская теория. М.: Наука, 1974.

13. *Бирман М. Ш., Соломяк М. З.* Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1980.

14. *Назаров С. А.* Асимптотика решения задачи Дирихле в угловой области с периодически изменяющейся границей // Мат. заметки. 1991. Т. 49, № 5. С. 86–96.

15. *Назаров С. А.* Задача Неймана в угловых областях с периодическими и параболическими возмущениями границы // Труды Моск. мат. о-ва. 2007. Т. 69. С. 183–243.

16. *Михлин С. Г.* Проблема минимума квадратичного функционала. М.: Гостехиздат, 1952.

17. *Evans D. V., Levitin M., Vasil'ev D.* Existence theorems for trapped modes // J. Fluid Mech. 1994. V. 261. P. 21–31.

18. *Камоцкий И. В., Назаров С. А.* Упругие волны, локализованные около периодических семейств дефектов // Докл. РАН. 1999. Т. 368, № 6. С. 771–773.

19. *Камоцкий И. В., Назаров С. А.* Экспоненциально затухающие решения задачи о дифракции на жесткой периодической решетке // Мат. заметки. 2003. Т. 73, № 1. С. 138–140.
20. *Михлин С. Г.* Линейные уравнения в частных производных. М.: Высш. шк., 1977.
21. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. 1957. Т. 12, № 5. С. 3–122.
22. *Wilcox C.* Scattering theory for diffraction gratings. Berlin: Springer-Verl., 1980.
23. *Evans W. D., Harris D. J.* Sobolev embeddings for generalized ridged domains // Proc. London Math. Soc. 1987. V. 54, N 3. P. 141–175.
24. *Gomez D., Lobo M., Nazarov S. A., Perez E.* Spectral stiff problems in domains surrounded by thin bands: Asymptotic and uniform estimates for eigenvalues // J. Math. Pures Appl. 2006. V. 85. P. 598–632.
25. *Jones D. S.* The eigenvalues of $\nabla^2 u + \lambda u = 0$ when the boundary conditions are given on semi-infinite domains // Proc. Camb. Phil. Soc. 1953. V. 49. P. 668–684.

Статья поступила 29 апреля 2010 г.

Назаров Сергей Александрович
Институт проблем машиноведения РАН,
Большой пр. В. О., 61, Санкт-Петербург 199178
srgnazarov@yahoo.co.uk