*Сибирский математический журнал*
*Март—апрель, 2011. Том 52, № 2*

*УДК 517.98*

# О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ОРТОГОНАЛЬНО АДДИТИВНЫХ ПОЛИНОМОВ

**З. А. Кусраева**

**Аннотация.** Доказано, что ограниченный ортогонально аддитивный однородный полином, действующий из архимедовой векторной решетки в отделимое выпуклое борнологическое пространство, при дополнительном условии полноты борнологического пространства или равномерной полноты векторной решетки представим в виде композиции ограниченного линейного оператора и специального однородного полинома, играющего роль отсутствующей в векторной решетке степенной функции. Предлагаемый подход опирается на понятия выпуклой борнологии и степени векторной решетки.

**Ключевые слова:** степень векторной решетки, выпуклая борнология, ортогонально аддитивный полином, полилинейный оператор, ортосимметричность.

## § 1. Введение

Цель данной работы — показать, что любой ортогонально аддитивный ограниченный однородный полином, действующий из архимедовой векторной решетки в отделимое выпуклое борнологическое пространство, может быть представлен в виде композиции отображения степенного типа и ограниченного линейного оператора при дополнительном условии полноты борнологического пространства или равномерной полноты векторной решетки. Данный вопрос привлек особое внимание после выхода в свет работы [1], в которой установлено, что любой $n$-однородный ортогонально аддитивный полином $P : L^p \to \mathbb{R}$ допускает представление

$$P(f) = \int f^n g \, d\mu \quad (f \in L^p),$$

где $g \in L^{\frac{p}{p-n}}$. Аналогичные результаты получены позже в [2, 3] для полиномов, определенных на векторной решетке $C(K)$ и со значениями в банаховом пространстве. Наконец, в [4] установлено, что ортогонально аддитивный $n$-однородный непрерывный полином, действующий из функциональной банаховой решетки в произвольное банахово пространство, представим в виде $P(f) = S(f^n)$, где $S$ — линейный ограниченный оператор. Другой подход к результатам из [1] см. также в [5].

Подход к представлению однородных ортогонально аддитивных полиномов, предлагаемый в данной работе, основан на следующих идеях. Во-первых, можно объединить и расширить различные результаты о представлении ортогонально аддитивных полиномов, привлекая теорию борнологических пространств, поскольку изучаемый вопрос в большей степени зависит от ограниченности, нежели от положительности или непрерывности. Необходимые сведения о борнологических пространствах и ограниченных полиномах в них представлены в § 2.

Во-вторых, в общей архимедовой векторной решетке вместо отсутствующей в ней степенной функции используем отображение $x \mapsto x^{s\odot} = \odot_s(x,\dots,x)$, где $\odot_s : E \times \dots \times E \to E^{s\odot}$ — канонический симметричный решеточный $s$-морфизм $s$-й степени $E^{s\odot}$ векторной решетки $E$. Для этой цели необходимо доказать универсальное свойство степени векторной решетки и симметричность ограниченного ортосимметричного полилинейного оператора в классе борнологических векторных пространств, что и сделано в § 3. Наконец, в § 4 представлены основные результаты.

Используются стандартные обозначения и терминология, принятые в [6, 7] — для теории векторных решеток, в [8] — для теории борнологических пространств, в [9, 10] — для теории полиномов. В данной работе предполагается, что все векторные пространства рассматриваются над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$, все векторные решетки архимедовы и все локально выпуклые пространства и борнологические векторные пространства отделимы. Всюду ниже слово «компакт» обозначает хаусдорфово компактное топологическое пространство.

## § 2. Предварительные сведения

Здесь мы приведем терминологию и обозначения, а также некоторые предварительные сведения, необходимые для дальнейшего.

Определение 1. *Борнологией* на множестве $X$ называют возрастающий (относительно отношения $\subset$) фильтр $\mathfrak{B}$, элементы которого образуют покрытие множества $X$. При этом множества из $\mathfrak{B}$ называют *ограниченными*. *Базой* борнологии $\mathfrak{B}$ на $X$ называют любую базу фильтра $\mathfrak{B}$. Отображение, действующее между множествами с борнологией, называется *ограниченным*, если образ любого ограниченного множества ограничен.

Определение 2. Борнология на векторном пространстве $E$, определенном над полем $\mathbb{K}$, называется *векторной борнологией*, если отображения $E \times E \ni (x, y) \mapsto x + y \in E$, $\mathbb{K} \times E \ni (\lambda, x) \mapsto \lambda x \in E$ ограничены. *Борнологическим векторным пространством* называют пару $(E, \mathfrak{B})$, состоящую из векторного пространства $E$ и векторной борнологии $\mathfrak{B}$ на $E$. Борнологическое векторное пространство $(E, \mathfrak{B})$, борнология $\mathfrak{B}$ которого устойчива относительно образования выпуклых оболочек, называют *выпуклым борнологическим пространством.* Борнологическое векторное пространство $(E, \mathfrak{B})$ *отделимо*, если $\{0\}$ является единственным ограниченным векторным подпространством $E$ или, что то же самое, никакая прямая в $E$ не является ограниченным множеством.

Определение 3. *Диском* назовем абсолютно выпуклое множество. Пусть $E$ — векторное пространство. Диск $A \subset E$ называется *полным диском*, если подпространство $E_A = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} nA$, полунормированное функционалом Минковского диска $A$, является банаховым пространством. Выпуклое борнологическое пространство называется *полным выпуклым борнологическим пространством*, если его борнология имеет базу, состоящую из полных дисков.

Пример 1. Совокупность всех порядково ограниченных множеств векторной решетки $F$ есть борнология, называемая *порядковой борнологией* $E$. Всюду далее, рассматривая векторную решетку $E$ как борнологическое векторное пространство, мы подразумеваем порядковую борнологию. В этом случае борнологическое векторное пространство $E$ *полно* (*отделимо*), если векторная решетка $E$ равномерно полна (архимедова).

Пример 2. Совокупность всех ограниченных множеств локально выпуклого пространства $F$ образует борнологию, называемую *борнологией фон Неймана* пространства $F$. Отделимость борнологии фон Неймана равносильна отделимости соответствующего локально выпуклого пространства. Квазиполное локально выпуклое пространство, рассматриваемое со своей борнологией фон Неймана, является полным выпуклым борнологическим пространством [11, предложение II.8.4]. Напомним, что локально выпуклое пространство называют *квазиполным*, если в нем полно всякое ограниченное замкнутое множество [11].

Определение 4. Пусть $E$ и $F$ — векторные пространства и $s$ — целое число, $s \geq 1$. Отображение $P : E \to F$ называют *однородным полиномом степени* $s$ (или $s$-однородным полиномом), если существует $s$-линейное отображение $\varphi : E^s \to F$ такое, что $P(x) = \varphi(x, \dots, x)$ для всех $x \in X$. Таким образом, однородный полином $P$ степени $s$ допускает представление $P = \varphi \circ D_s$, где $D_s : E \to E^s$ — диагональный оператор. Условимся, что константа (т. е. постоянное отображение $e \mapsto f \in F$, $e \in E$) является однородным полиномом степени $s = 0$.

Определение 5. Полилинейный оператор $\varphi : E^s \to F$ называют *симметричным*, если $\varphi(x_1, \dots, x_s) = \varphi(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(s)})$ для любых $x_1, \dots, x_s \in E$ и любой перестановки $\sigma$ множества $\{1, \dots, s\}$.

Для однородного полинома $P : E \to F$ степени $s$ существует единственное симметричное полилинейное отображение $\varphi : E^s \to F$, называемое *порождающим* отображением, такое, что $P(x) = \varphi(x, \dots, x)$. Порождающее отображение $\varphi : E^s \to F$ полинома $P$ может быть восстановлено по формуле

$$\varphi(h_1, \dots, h_s) = \frac{1}{s!}\Delta_{h_1,\dots,h_s} P(x) \quad (x, h_1, \dots, h_s \in E), \tag{1}$$

где $\Delta_{h_1,\dots,h_s} := \Delta_{h_s} \dots \Delta_{h_1}$ и $\Delta_h$ обозначает разностный оператор $\Delta_h f(x) = f(x + h) - f(x)$ [10, теорема 15.1.1]. Более того, $\Delta_{h_1,\dots,h_k} P(x) = 0$ для всех $x \in E$, если $k > s$ (см. [10, лемма 15.9.2]). Индукцией по $k$ можно показать, что имеет место формула

$$(\Delta_{h_1,\dots,h_k} P)(x) = \sum_{\varepsilon \in \Delta} (-1)^{k-(\varepsilon(1)+\dots+\varepsilon(k))} P\left(x + \sum_{i=1}^{k} \varepsilon(i) h_i\right), \tag{2}$$

где $\Delta$ — множество всех функций из $\{1, \dots, s\}$ в $\{0, 1\}$.

Определение 6. Отображение $P : E \to F$ есть *полином* (не обязательно однородный) *степени* $\leq s$, если $P = P_0 + P_1 + \dots + P_s$, где $P_k : E \to F$ — $k$-однородный полином для всех ($k = 0, 1, \dots, s$). Здесь $P_0 = \mathrm{const} \in F$, а $P_1$ — это линейный оператор.

**Предложение 1.** *Пусть $E$ и $F$ — борнологические векторные пространства, $P_k : E \to F$ — однородный полином степени $k$ и $\varphi_k$ — соответствующее $k$-линейное порождающее отображение ($k = 1, \dots, s$). Если $P = \sum_{k=0}^{s} P_k$, то эквивалентны следующие утверждения:*

1) *$\varphi_1, \dots, \varphi_s$ ограничены;*
2) *$P_1, \dots, P_s$ ограничены;*

3) *$P$ ограничен.*

Доказательство. Импликации 1) $\Rightarrow$ 2) и 2) $\Rightarrow$ 3) очевидны. Докажем 3) $\Rightarrow$ 1).

Если дано ограниченное множество $A \subset E$, то в силу ограниченности $P$ можно выбрать ограниченное множество $B \subset F$ таким образом, что

$$\underbrace{\pm P(\overbrace{A+\dots+A}^{(s\ \text{раз})}) \pm \dots \pm P(\overbrace{A+\dots+A}^{(s\ \text{раз})})}_{2^s\ \text{раз}} \subset B.$$

В силу (1) для симметричного полилинейного оператора $\varphi_s : E^s \to F$ выполняется $\varphi(h_1,\dots,h_s) = \frac{1}{s!}\Delta_{h_1,\dots,h_s}P(x)$, а из (2) видно, что значение $\varphi(h_1,\dots,h_s)$ представимо как сумма $2^s$ функций, каждая из которых имеет вид

$$x \mapsto (-1)^{s-p}P(x + x_{k_1} + \dots + x_{k_s}),$$

где $k_1 < \dots < k_p$ и $k_1,\dots,k_p \in \{1,2,\dots,s\}$. Далее, если $x_{k_i} \in A$, то согласно сказанному $\varphi_s(x_1,\dots,x_s) \in B$. Таким образом, $\varphi_s$ ограничен. Но тогда ограничен и однородный полином $P_s = \varphi_s \circ D_s$. Повторяя те же рассуждения для ограниченного полинома $P - P_s$, получаем ограниченность $P_{s-1}$. Действуя индукцией по $s$, завершаем доказательство теоремы. $\square$

**Следствие 1.** *Пусть $E$ и $F$ — борнологические векторные пространства. Однородный полином $P : E \to F$ степени $s$ ограничен тогда и только тогда, когда порождающее симметричное полилинейное отображение $\varphi : E^s \to F$ ограничено.*

Определение 7. Пусть $E$ — векторная решетка. Полином $P$, определенный на $E$, называется *ортогонально аддитивным*, если $P_0(x+y) = P_0(x)+P_0(y)$ для любых дизъюнктных $x, y \in E$, где $P_0(x) := P(x) - P(0)$. Напомним, что два элемента векторной решетки $x, y \in E$ называют *дизъюнктными* и пишут $x \perp y$, если $|x| \wedge |y| = 0$. Будем обозначать через $L_b(E,F)$ и $\mathscr{P}_o({}^sE,F)$ соответственно пространства ограниченных линейных операторов и $s$-однородных ортогонально аддитивных ограниченных полиномов, действующих из $E$ в $F$.

**Лемма 1.** *Пусть $E$ — векторная решетка, $F$ — борнологическое векторное пространство. Полином $P : E \to F$, $P = P_0 + P_1 + \dots + P_s$ ортогонально аддитивен тогда и только тогда, когда однородные полиномы $P_k$ $(k = 1,\dots,s)$ ортогонально аддитивны.*

Доказательство. Предположим, что $P$ ортогонально аддитивен и $x, y$ дизъюнктны. Тогда

$$P(x+y)-P(0) = P_1(x+y)+\dots+P_s(x+y) = P_1(x)+\dots+P_s(x)+P_1(y)+\dots+P_s(y).$$

Заменив в последнем равенстве $x$ на $tx$ и $y$ на $ty$ при $0 \neq t \in \mathbb{R}$ и разделив обе части равенства на $t$, получим

$$P_1(x+y) + \sum_{k=2}^{s} t^{k-1}P_k(x+y) = P_1(x) + \sum_{k=2}^{s} t^{k-1}P_k(x) + P_1(y) + \sum_{k=2}^{s} t^{k-1}P_k(y).$$

Если $t \to 0$, то $P_1(x+y) = P_1(x) + P_1(y)$, так как $F$ предполагается отделимым. Повторяя рассуждения, шаг за шагом докажем, что $P_2,\dots,P_s$ ортогонально аддитивны. Обратное очевидно. $\square$

## § 3. Вспомогательные факты

Определение 8. $s$-Линейный оператор $\varphi : E_1 \times \dots \times E_s \to F$ называется *решеточным $s$-морфизмом*, если для любого $k = 1, \dots, s$ и для любых $x_i \in E_i^+$ $(i = 1, \dots, k-1, k+1, \dots, s)$ отображение $x_k \mapsto \varphi(x_1, \dots, x_k, \dots, x_s)$ $(x_k \in E_k)$ является решеточным гомоморфизмом.

Определение 9. Пусть $2 \leq s \in \mathbb{N}$ и $E$ — архимедова векторная решетка. Пара $(E^{s\odot}, \odot_s)$ называется *$s$-й степенью* $E$, если

1) $E^{s\odot}$ — векторная решетка;

2) $\odot_s : E \times \dots \times E \to E^{s\odot}$ — симметричный решеточный $s$-морфизм;

3) для любой архимедовой векторной решетки $F$ и любого симметричного решеточного $s$-морфизма $\varphi : E \times \dots \times E \to F$ существует единственный решеточный гомоморфизм $S : E^{s\odot} \to F$ такой, что $S \circ \odot_s = \varphi$.

Это определение введено в [12, определение 3.1] (случай $s = 2$ см. в [13]). Там же [12, теорема 3.2] установлен следующий результат о существовании $s$-й степени для любой архимедовой векторной решетки. Ниже для удобства полагаем $E^{1\odot} = E$ и $\odot_1 = I_E$.

**Теорема 1.** *Пусть $s \in \{2, 3, \dots\}$ и $E$ — архимедова векторная решетка. Тогда существует единственная с точностью до решеточного изоморфизма $s$-я степень $(E^{s\odot}, \odot_s)$ векторной решетки $E$.*

Однородный полином, порождаемый симметричным $s$-морфизмом $\odot_s$, обозначим символом $x \mapsto x^{s\odot}$. Этот полином заменит степенную функцию в наших основных результатах о представлении (см. ниже теоремы 3, 4).

Отметим также, что если $f$-алгебра $A$ с умножением $\cdot$ точна (т. е. нуль — ее единственный нильпотентный элемент), а $E$ — подрешетка $A$, то существуют подрешетка $F \subset A$ и изоморфизм $\iota$ из $E^{s\odot}$ на $F$ такие, что $\iota(x_1 \odot \dots \odot x_s) = x_1 \cdot \ldots \cdot x_s$ для всех $x_1, \dots, x_s \in E$. В частности, $\iota(x^{s\odot}) = x^s$, и, следовательно, получаем обычную степенную функцию, действующую из $E$ в $F$. В случае равномерно полной векторной решетки $E$ имеем также $F = E_{(s)} := \{x_1 \cdot \ldots \cdot x_s : x_i \in E\} = \{x|x|^{s-1} : x \in E\}$ и $F_+ = (E_{(s)})_+ := \{|x|^s : x \in E\}$ (см. [12, теорема 4.1]).

Определение 10. Полилинейный оператор $\varphi : E \times \dots \times E \to F$ называется *ортосимметричным*, если $\varphi(x_1, \dots, x_s) = 0$, как только $|x_i| \wedge |x_j| = 0$ для некоторых $i \neq j$, *положительным*, если $\varphi(x_1, \dots, x_s) \geq 0$ для любых $0 \leq x_1, \dots, x_s \in E$, и *орторегулярным*, если он представим в виде разности двух положительных ортосимметричных операторов.

**Лемма 2.** *Пусть $Q$ — компакт. Для любой орторегулярной $s$-линейной формы $\varphi : C(Q) \times \dots \times C(Q) \to \mathbb{R}$ существует единственная ограниченная счетно аддитивная регулярная борелевская мера $\nu := \nu_\varphi$ на $Q$ такая, что верно следующее представление:*

$$\varphi(x_1, \dots, x_s) = \int\limits_Q x_1(t) \cdot \ldots \cdot x_s(t) d\nu(t) \quad (x_1, \dots, x_s \in C(Q)).$$

*В частности, форма $\varphi$ симметрична.*

Доказательство. Этот факт доказан в [14, теорема 1.7] для орторегулярных билинейных ($s = 2$) операторов со значениями в $K$-пространствах. Для $s \geq 3$ доказательство без труда проводится индукцией по $s$. $\square$

Нам также понадобится следующее простое следствие из леммы 2.

**Следствие 2.** *Пусть $Q$ — компакт, а $X$ — нормированное пространство. Для любого ограниченного ортосимметричного $s$-линейного оператора $\varphi : C(Q) \times \dots \times C(Q) \to X$ имеет место следующее представление:*

$$\varphi(x_1, \dots, x_s) = \varphi(x_1 \cdot \ldots \cdot x_s, \underbrace{\mathbb{1}, \dots, \mathbb{1}}_{(s-1 \text{ раз})}). \tag{3}$$

Доказательство. Для любого $l \in X'$ $s$-линейная форма $l \circ \varphi$ ограничена. Таким образом, ввиду леммы 2 можно написать

$$l \circ \varphi(x_1, \dots, x_s) = l \circ \varphi(x_1 \cdot \ldots \cdot x_s, \mathbb{1}, \dots, \mathbb{1}).$$

Так как $X'$ разделяет точки, получаем

$$\varphi(x_1, \dots, x_s) = \varphi(x_1 \cdot \ldots \cdot x_s, \mathbb{1}, \dots, \mathbb{1}). \quad \square$$

Степени равномерно полных векторных решеток $E$ конструктивно описываются при помощи однородного функционального исчисления (см. [12]). Для $s \geq 1$ функция $\Theta_s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, определенная равенством $\Theta_s(t) = t|t|^{s-1}$, есть сохраняющая порядок биекция. С помощью $\Theta$ вводятся положительные однородные непрерывные функции

$$H_s : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (u, v) \mapsto \Theta_s^{-1}(\Theta_s(u) + \Theta_s(v)),$$

$$J_s : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}, \quad (u_1, \dots, u_s) \mapsto \Theta_s^{-1}(u_1 \cdot \ldots \cdot u_s).$$

Если $E$ — равномерно полная векторная решетка, то элементы $H_s(u, v) \in E$ и $J_s(u_1, \dots, u_s) \in E$ корректно определены для любых $u, v, u_1, \dots, u_s \in E$. Используя эти функции, можно определить новое сложение $\boxplus$ и умножение на скаляр $\boxdot$ в $E$ следующим образом:

$$u \boxplus v = H_s(u, v), \quad \lambda \boxdot u = \Theta_s^{-1}(\lambda)u \quad (u, v \in E).$$

Множество $E$ с новым сложением и умножением на скаляр, но с исходным порядком есть архимедова векторная решетка, и $J_s : E \times \dots \times E \to (E, \boxplus, \boxdot)$ является симметричным $s$-линейным отображением. Более того, пара $((E, \boxplus, \boxdot), J_s)$ и является $s$-й степенью $E$.

**Теорема 2.** *Пусть $E$ — равномерно полная векторная решетка, $F$ — выпуклое борнологическое пространство или локально выпуклое пространство и $\varphi : E^s \to F$ — ограниченное ортосимметричное $s$-линейное отображение. Тогда отображение $T_\varphi : E^{s\odot} \to F$, определенное равенством*

$$T_\varphi(x) = \varphi(x, |x|, \dots, |x|) \quad (x \in E),$$

*есть единственный ограниченный линейный оператор такой, что $\varphi = T_\varphi \circ \odot_s$. Соответствие $\varphi \mapsto T_\varphi$ является изоморфизмом в $L_b({}^sE, F)$ на $L_b(E, F)$.*

Доказательство. Очевидно, оператор $T_\varphi$ ограничен, так как отображение $\varphi$ ограничено. Покажем, что $T_\varphi$ линеен. Пусть $x, y \in E$, и рассмотрим идеал $J(e)$, порожденный элементом $e = |x| + |y|$. Очевидно, $(J(e), \|\cdot\|_e)$ — $AM$-пространство. По теореме Крейнов — Какутани $(J(e), \|\cdot\|_e) \simeq C(Q)$ для некоторого компакта $Q$. В силу ограниченности $T_\varphi$ имеем $T_\varphi([-e, e]) \subset A$ для некоторого ограниченного диска $A$ в $F$. Рассмотрим подпространство $F_A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} nA$ в

$F$ и снабдим его нормой $\|x\|_A := \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda A\}$. Пара $(F_A, \|\cdot\|_A)$ есть нормированное пространство в силу отделимости $F$. Тем самым можем считать, что $T_\varphi$ отображает $C(Q)$ в $F_A$. Теперь линейность $T_\varphi$ может быть установлена при помощи несложных выкладок с использованием следствия 2 (см. [12]):

$$\begin{aligned}T_\varphi(x \boxplus y) &= \varphi(x \boxplus y, |x \boxplus y|, \dots, |x \boxplus y|) = \varphi(x \boxplus y \cdot |x \boxplus y|^{s-1}, \mathbb{1}, \dots, \mathbb{1})\\ &= \varphi(\Theta_s(x \boxplus y), \mathbb{1}, \dots, \mathbb{1}) = \varphi(\Theta_s\big(\Theta_s^{-1}[\Theta_s x(\cdot) + \Theta_s y(\cdot)]\big), \mathbb{1}, \dots, \mathbb{1})\\ &= \varphi(\Theta_s x(\cdot) + \Theta_s y(\cdot), \mathbb{1}, \dots, \mathbb{1}) = \varphi(\Theta_s x(\cdot), \mathbb{1}, \dots, \mathbb{1}) + \varphi(\Theta_s y(\cdot), \mathbb{1}, \dots, \mathbb{1})\\ &= \varphi(x, |x|, \dots, |x|) + \varphi(y, |y|, \dots, |y|) = T_\varphi(x) + T_\varphi(y);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}T_\varphi(\lambda \boxdot x) = T_\varphi\big(\Theta_s^{-1}(\lambda)x\big) &= \varphi\big(\Theta_s^{-1}(\lambda)x, \big|\Theta_s^{-1}(\lambda)x\big|, \dots, \big|\Theta_s^{-1}(\lambda)x\big|\big)\\ &= \Theta_s^{-1}(\lambda) \cdot \big|\Theta_s^{-1}(\lambda)\big|^{s-1}\varphi(x, |x|, \dots, |x|) = \lambda \cdot T_\varphi(x).\end{aligned}$$

Таким образом, оператор $T_\varphi$ линеен. Справедливость представления $\varphi = T_\varphi \circ \odot_s$ вытекает из следующей цепочки равенств:

$$\begin{aligned}\varphi(x_1, \dots, x_s) &= \varphi\big(\Theta_s\big[\Theta_s^{-1}x_1 \cdot \ldots \cdot x_s\big], \mathbb{1}, \dots, \mathbb{1}\big) = \varphi(\Theta_s \circ J_s(x_1, \dots, x_s), \mathbb{1}, \dots, \mathbb{1})\\ &= \varphi(J_s(x_1, \dots, x_s), |J_s(x_1, \dots, x_s)|, \dots, |J_s(x_1, \dots, x_s)|)\\ &= T_\varphi(J_s(x_1, \dots, x_s)) = T_\varphi(x_1 \odot \cdots \odot x_s).\end{aligned}$$

Оставшиеся утверждения очевидны. В случае отделимого локально выпуклого пространства нужно доказанное применить к борнологии фон Неймана. Таким образом, доказательство окончено. $\square$

Замечание 1. Теорема 2 обобщает результат [12, теорема 5.1(ii)], установленный для положительных ортосимметричных полилинейных операторов, при условии, что $E$ и $F$ — векторные решетки, причем $E$ равномерно полна. Приведенное нами доказательство показывает, что для справедливости теоремы 2 существенна не порядковая структура образа $\varphi$, а его борнология.

## § 4. Основные результаты

Теперь мы можем сформулировать и доказать основные результаты.

**Лемма 3.** *Пусть $Q$ — компакт, а $E$ — равномерно плотная подрешетка $C(Q)$. Тогда порядково ограниченный ортогонально аддитивный $s$-однородный полином $P_0$ из $E$ в полное выпуклое борнологическое пространство $G$ допускает единственное продолжение до порядково ограниченного ортогонально аддитивного $s$-однородного полинома $P : C(Q) \to G$.*

Доказательство. Можно предположить, что функция $\mathbb{1}$, тождественно равная 1, лежит в $E$. Заметим, что по условию $P_0([-\mathbb{1}, \mathbb{1}]) \subset B$ для некоторого полного диска $B \subset G$. Таким образом, $\|P_0(x)\|_B \leq \|x\|_\infty$ $(x \in E)$, где $\|\cdot\|_B$ — функционал Минковского диска $B$. Отсюда видно, что $P_0$ непрерывен в нуле, а значит, и локально равномерно непрерывен из $E$ в $(G_B, \|\cdot\|_B$ (см. [9, предложение 1.11]), следовательно, продолжение $P$ по непрерывности полинома $P_0$ существует, единственно и удовлетворяет указанным в формулировке леммы свойствам. Поясним, например, ортогональную аддитивность. Возьмем неотрицательные дизъюнктные функции $x, y \in C(Q)$. Можно выбрать две последовательности $(x_n)$ и $(y_n)$ в $E$ такие, что $0 \leq x_n \leq x$ и $0 \leq y_n \leq y$, равномерно сходящиеся к $x$ и $y$ соответственно. Так как по условию $P_0$ ортогонально аддитивен, то $P_0(x_n + y_n) = P_0(x_n) + P_0(y_n)$. Предельный переход в этом равенстве приводит к ортогональной аддитивности $P$. $\square$

**Лемма 4.** *Пусть $E$ — векторная решетка, $F$ — выпуклое борнологическое пространство. Если $P$ — ограниченный ортогонально аддитивный $s$-однородный полином, то его порождающее $s$-линейное отображение $\varphi : E^s \to F$ ортосимметрично.*

Доказательство. Пусть $P$ — ортогонально аддитивный ограниченный $s$-однородный полином. Обозначим $e := |x_1|+\dots+|x_s|$, и пусть $J(e)$ — порядковый идеал в $E$, порожденный элементом $e$. Нормированная решетка $(J(e), \|\cdot\|_e)$ изоморфна плотной подрешетке в $C(Q)$, а в силу леммы 3 можем считать, что $J(e) = C(Q)$. Так как $P$ ограничен, существует ограниченный диск $B \subset F$ такой, что $P([-e, e]) \subset B$. Следовательно, для любых $x, x_1, \dots, x_s \in J(e)$ имеем $P(x) \in F_B$ и

$$\varphi(x_1, \dots, x_s) = \frac{1}{s!}\Delta_{x_1,\dots,x_s} P \in F_B.$$

Теперь рассмотрим $P_0 : J(e) \to F_B$ и $\varphi_0 : J(e) \times \dots \times J(e) \to F_B$ — ограничения $P$ и $\varphi$ на $J(e)$. Оба отображения ограничены, следовательно, они ограничены по норме. В силу сделанных предположений $F_B$ — нормированное пространство (см. пример 2). Согласно лемме 2 имеем

$$P_0(x) = \varphi_0(x, \dots, x) = S(x^s) \quad (x \in J(e))$$

для некоторого ограниченного линейного оператора $S : C(Q) \to F_B$.

Заметим, что если $P(x) = x^s$, то

$$x_1 \cdots x_s = \frac{1}{s!}\Delta_{x_s}(\Delta_{x_{s-1}} \dots \Delta_{x_1} x^s).$$

Принимая во внимание тот факт, что $S$ коммутирует с оператором $\Delta_h$, заключаем

$$\varphi_0(x_1, \dots, x_s) = \frac{1}{s!}\Delta_{x_1\dots,x_s} P_0(x) = \frac{1}{s!}\Delta_{x_s} \dots \Delta_{x_1} S_0(x^s) = S_0(x_1 \cdots x_s).$$

Теперь если $x_i$ и $x_j$ дизъюнктны, то $x_i \cdot x_j = 0$ и, следовательно,

$$\varphi(x_1, \dots, x_s) = \varphi_0(x_1, \dots, x_s) = S_0(x_1 \cdot \ldots \cdot x_s) = 0.$$

Таким образом, оператор $\varphi$ ортосимметричен. $\square$

**Теорема 3.** *Пусть $E$ — векторная решетка и $F$ — выпуклое борнологическое пространство или локально выпуклое пространство. Тогда любое ограниченное ортосимметричное полилинейное отображение из $E^s$ в $F$ симметрично.*

Доказательство. Рассмотрим ограниченное ортосимметричное полилинейное отображение $\varphi : E^s \to F$. Возьмем $x_1, \dots, x_s \in E$, и пусть $e \in E$, $J(e)$, $Q$, $\varphi_0$ и $B$ те же, что и в доказательстве леммы 4. Пусть $X$ — пополнение нормированного пространства $G_B$. Как и в лемме 3 (см. также [14, лемма 2.2]), устанавливается, что $\varphi_0$ допускает продолжение до ограниченного ортосимметричного полилинейного отображения $\widetilde{\varphi}_0 : C(Q)^s \to X$. В силу следствия 2 для $\widetilde{\varphi}_0$ имеет место представление (3). Следовательно, из $x_i \perp x_j$ $(i \neq j)$ вытекает, что $x_1 \cdot \ldots \cdot x_s = 0$, а значит,

$$\varphi(x_1, \dots, x_s) = \widetilde{\varphi}_0(x_1, \dots, x_s) = 0. \quad \square$$

Замечание 2. В случае, когда $E$ и $F$ — архимедовы векторные решетки, а полилинейное отображение положительно, следствие 3 установлено в [15, теорема 2]. Случай положительных и ограниченных билинейных операторов в векторных решетках рассмотрен в [16, следствие 2] и [17, теорема 3.4] соответственно. В [18, теорема 14] показано, что в случае векторных решеток условие порядковой ограниченности билинейного оператора можно ослабить до непрерывности относительно равномерной сходимости ($ru$-топологии).

**Теорема 4.** *Пусть $E$ — равномерно полная векторная решетка, а $F$ — выпуклое борнологическое пространство. Тогда для любого ортогонально аддитивного ограниченного $s$-однородного полинома $P : E \to F$ существует единственный ограниченный линейный оператор $S : E^{s\odot} \to F$ такой, что $P = S \circ \odot_s \circ D_s$, т. е.*

$$P(x) = S(x^{s\odot}) = S(\underbrace{x \odot \dots \odot x}_{s \text{ раз}}) \quad (x \in E). \tag{4}$$

*Более того, соответствие $P \leftrightarrow S$ есть изоморфизм:*

$$\mathscr{P}_o({}^sE, F) \simeq L_b(E^{s\odot}, F).$$

Доказательство. Так как отображение $P : E \to F$ есть $s$-однородный полином, существует единственный полилинейный симметричный оператор $\varphi : E^s \to F$ такой, что $P(x) = \varphi(x, \dots, x)$. Как показано в следствии 1, $\varphi$ ограничен. Согласно лемме 4 $\varphi$ ортосимметричен. Ввиду теоремы 2 существует линейный ограниченный оператор $S : E^{s\odot} \to F$ такой, что $\varphi(x_1, \dots, x_s) = S(x_1 \odot \dots \odot x_s)$ для всех $x_1, \dots, x_s \in E$. Ограничение последнего равенства на диагональ пространства $E^s$ и дает требуемый результат. $\square$

Замечание 3. Так как для банаховой функциональной решетки $E$ имеем $E^{s\odot} = E_{(s)} = \{f|f|^{s-1} : f \in E\}$ и $f^{s\odot} = f^s$ для любого $f \in E$, теорема 4 обобщает основной результат о представлении из [4, теорема 2.3].

**Теорема 5.** *Пусть $E$ — векторная решетка, а $F$ — полное выпуклое борнологическое пространство или квазиполное локально выпуклое пространство. Тогда для любого ортогонально аддитивного порядково ограниченного $s$-однородного полинома $P : E \to F$ существует единственный ограниченный линейный оператор $S$ такой, что имеет место представление* (4). *Более того, $\mathscr{P}_o({}^sE, F) \simeq L_b(E^{s\odot}, F)$.*

Доказательство. Приведем лишь схему доказательства. Пусть $E^{\mathrm{ru}}$ — равномерное пополнение векторной решетки в смысле [19]. Ввиду полноты $F$ существует единственное продолжение $P$ до ортогонально аддитивного порядково ограниченного $s$-однородного полинома $\widetilde{P} : E^{\mathrm{ru}} \to F$ (см. доказательство леммы 3). Далее следует применить теорему 4 к полиному $\widetilde{P}$ и воспользоваться соотношением $(E^{\mathrm{ru}})^{s\odot} = (E^{s\odot})^{\mathrm{ru}}$. $\square$

**Теорема 6.** *Пусть $E$ — равномерно полная векторная решетка, $F$ — выпуклое борнологическое пространство. Тогда для любого ограниченного ортогонально аддитивного полинома $P : E \to F$ степени $s \geq 1$ существуют единственный набор ограниченных линейных операторов $S_k : E^{k\odot} \to F$ $(k := 1, \dots, s)$ и константа $S_0 \in F$ такие, что*

$$P(x) = S_0 + \sum_{k=1}^{s} S_k(x^{k\odot}) \quad (x \in E). \tag{5}$$

Доказательство. Пусть $P$ — ограниченный ортогонально аддитивный полином. Тогда в силу предложения 1 существуют константа $S_0 \in F$ и ограниченный $k$-однородный полином $P_k$ $(k = 1, \dots, s)$ такие, что $P = S_0 + \sum\limits_{k=1}^{s} P_k$.

В силу теоремы 4 для каждого $k = 1, \dots, s$ существует единственный ограниченный линейный оператор $S_k : E^{k\odot} \to F$ такой, что $P_k = S_k \circ \odot_k \circ D_s$ (напомним, что $E^{1\odot} = E$, $\odot_1 = D_1 = \mathrm{id}_E$). Тем самым

$$P(x) = S_0 + \sum_{k=1}^{s} S_k \circ \odot_k(x, \dots, x) = S_0 + \sum_{k=1}^{s} S_k(x^{k\odot}),$$

и теорема доказана. □

**Теорема 7.** *Пусть $E$ — векторная решетка, а $F$ — полное выпуклое борнологическое пространство или квазиполное локально выпуклое пространство. Тогда для любого ограниченного ортогонально аддитивного полинома $P : E \to F$ степени $s \geq 1$ существуют единственный набор ограниченных линейных операторов*

$$S_k : E^{k\odot} \to F \quad (k := 1, \dots, s)$$

*и константа $S_0 \in F$ такие, что имеет место представление* (5).

Доказательство. Работают те же соображения, что и в доказательстве теоремы 6, с учетом теоремы 5 вместо теоремы 4. □

**Следствие 3.** *Пусть $E$ и $F$ — векторные решетки, причем по меньшей мере одна из них равномерно полна. Тогда для любого порядково ограниченного ортогонально аддитивного полинома $P : E \to F$ степени $s \geq 1$ существуют единственный набор порядково ограниченных линейных операторов $S_k : E^{k\odot} \to F$ $(k := 1, \dots, s)$ и константа $S_0 \in F$ такие, что справедливо представление* (5).

Доказательство вытекает из теорем 6 и 7, если в $F$ взять порядковую борнологию (см. пример 1). □

## *ЛИТЕРАТУРА*


1. *Sundaresan K.* Geometry of spaces of homogeneous polynomials on Banach lattices // Applied geometry and discrete mathematics. DIMACS Ser. Discrete Math. Comput. Sci. Providence, RI. Amer. Math. Soc., 1991. P. 571–586.
2. *Perez-Garcia D., Villanueva I.* Orthogonally additive polynomials on spaces of continuous functions // J. Math. Anal. Appl. 2005. V. 306, N 1. P. 97–105.
3. *Carando D., Lassale S., Zalduendo I.* Orthogonally additive polynomials over $C(K)$ are measures — a short proof // Int. Equat. Oper. Theory. 2006. V. 56, N 4. P. 597–602.
4. *Benyamini Y., Lassalle S., Llavona J. G.* Homogeneous orthogonally additive polynomials on Banach lattices // Bull. London Math. Soc. 2006. V. 38, N 3. P. 459–469.
5. *Ibort A., Linares P., Llavona J. G.* On represetation of orthogonally additive polynomials in $l_p$ // Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto Univ. 2009. V. 306, N 45. P. 519–524.
6. *Aliprantis C. D., Burkinshaw O.* Positive operatirs. Orlando: Acad. press, 1985.
7. *Luxemburg W. A. J., Zaanen A. C.* Riesz spaces. Amserdam; London; New York: North-Holland, 1971. V. I.
8. *Hogbe-Nlend H.* Bornologies and functional analysis. Amsterdam; New York; Oxford: North-Holland, 1977. (Math. Stud.; V. 26).
9. *Dineen S.* Complex analysis on infinite dimensional spaces. Berlin: Springer, 1999.
10. *Kuczma M.* An introduction to the theory of functional equations and inequalities. Basel; Boston; Berlin: Birkhäuser, 2009.
11. *Шефер Х.* Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1971.
12. *Boulabier K., Buskes G.* Vector lattice powers: $f$-algebras and functional calculus // Commun. Algebra. 2006. V. 34. P. 1435–1442.
13. *Buskes G., van Rooij A.* Squares of Riesz spaces // Rocky Mountain J. Math. 2001. V. 31, N 1. P. 45–56.
14. *Кусраев А. Г., Табуев С. Н.* О некоторых свойствах ортосимметричных билинейных операторов // Математический форум. Исследования по математическому анализу (отв. ред. Ю. Ф. Коробейник, А. Г. Кусраев). Владикавказ: ВНЦ РАН, 2008. Т. 1. С. 104–124.

**15.** *Boulabiar K.* Products in almost $f$-algebras // Comment. Math. Univ. Carolinae. 2000. V. 41, N 4. P. 747–759.

**16.** *Buskes G., van Rooij A.* Almost $f$-algebras: commutativity and the Cauchy–Schwarz inequality // Positivity. 2000. V. 4, N 3. P. 227–231.

**17.** *Buskes G., Kusraev A. G.* Representation and extension of orthoregular bilinear operators // Владикавказский мат. журн. 2007. V. 9, N 1. P. 16–29.

**18.** *Ben Amor F.* On orthosymmetric bilinear operators // Positivity. 2010. V. 14, N 1. P. 123–134.

**19.** *Quinn J.* Intermediate Riesz spaces // Pacific J. Math. 1975. V. 56, N 1. P. 225–263.

*Статья поступила 6 мая 2010 г.*

Кусраева Залина Анатольевна
Южный математический институт ВНЦ РАН,
ул. Маркуса, 24, Владикавказ 362019
zali13@mail.ru