Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2011. Том 52, № 2

УДК 517.983

ОБ ОДНОЙ АЛГЕБРЕ ЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В. Б. Коротков

Аннотация. Приводится критерий принадлежности оператора в L_p множеству I_p всех сумм интегральных операторов в L_p и операторов умножения (на функции из L_∞). Дается описание замыкания множества I_p по операторной норме. Доказывается, что множество $L_{p,1}$ всех сумм операторов умножения и операторов в L_p, отображающих единичный шар L_p в компактные в L_1 множества, является банаховой алгеброй.

Ключевые слова: интегральный оператор, оператор умножения, интегральный оператор 3-го рода, почти компактный оператор, $\langle p,1\rangle$-компактный оператор, банахова алгебра, существенный спектр.

Пусть (X,μ) — пространство с конечной положительной мерой μ, $L_0 = L_0(X,\mu)$ — пространство всех определенных на X μ-измеримых μ-п. в. конечных функций (с обычным отождествлением функций, отличающихся одна от другой лишь на множестве μ-меры 0), $L_p = L_p(X,\mu)$ — пространство всех функций f из L_0 с конечной нормой

$$\|f\|_p = \left(\int\limits_X |f|^p \, d\mu\right)^{1/p}.$$

Линейный оператор $T : L_p \to L_0$ называется *интегральным*, если найдется функция $K \in L_0(X \times X, \mu \times \mu)$ такая, что для всех $f \in L_p$

$$Tf(s) = \int\limits_X K(s,t) f(t) \, d\mu(t) \tag{1}$$

для μ-п. в. $s \in X$. Интеграл в (1) понимается в лебеговом смысле. Функция $K(s,t)$ называется *ядром интегрального оператора*.

Всюду в статье под оператором в L_p понимается линейный непрерывный оператор, определенный на L_p и действующий в L_p. Совокупность всех операторов в L_p обозначим через $B(L_p)$.

Определение 1. Оператор A называется *оператором умножения* на функцию $a \in L_\infty$, если $Af = af$ для всех $f \in L_p$.

Определение 2. Оператор, представимый в виде суммы интегрального оператора в L_p и оператора умножения на функцию из L_∞, называется *интегральным оператором 3-го рода* [1, с. 5]. Совокупность всех интегральных операторов 3-го рода обозначим через I_p.

Интегральные операторы 3-го рода играют важную роль в теории интегральных уравнений. Описание множества I_p дает

Теорема 1. *Пусть $1 < p < \infty$. Оператор T в L_p принадлежит I_p тогда и только тогда, когда найдется интегральный оператор $Z : L_p \to L_0$ с неотрицательным ядром такой, что для любого множества e, $\mu e > 0$, оператор $P_e T P_{X\setminus e}$ регулярен как оператор из L_p в L_0 и $|P_e T P_{X\setminus e}| \leq Z$. Здесь $P_E f = \chi_E f$, $f \in L_p$, χ_E — характеристическая функция множества E.*

При $p = 2$ теорема 1 доказана в [2]. Для произвольного $1 < p < \infty$ доказательство аналогично. Использованное в формулировке теоремы 1 понятие модуля регулярного оператора см. в [3, с. 46].

Множество I_p неплотно в $B(L_p)$, если мера μ не является чисто атомической [4, с. 50]. Представляет интерес описание замыкания множества I_p по операторной норме. Нам понадобится

Определение 3 [5]. Оператор T в L_p называется *почти компактным*, если для любого $\varepsilon > 0$ и любого $g \subset X$ найдется множество $e \subset g$ такое, что $\mu e < \varepsilon$ и оператор $P_{g\setminus e} T$ отображает единичный шар L_p в компактное в L_p множество.

Каждый интегральный оператор в L_p почти компактен, если $p > 1$ [5, 6].

Теорема 2. *Пусть $1 < p < \infty$. Оператор T принадлежит замыканию $\overline{I}_p$ множества I_p тогда и только тогда, когда $T = A + L$, где A — оператор умножения на функцию из L_∞, $L \in B(L_p)$ — почти компактный оператор.*

Доказательство. Достаточность. Так как L — почти компактный оператор, по теореме Вайса [7] найдется последовательность интегральных операторов L_n в L_p, сходящаяся к L по норме $B(L_p)$. Тогда $T_n = A + L_n \in I_p$ и $\|T_n - T\| \to 0$ при $n \to \infty$.

Необходимость. Пусть $S \in B(L_p)$ и $\|S - (A_n + M_n)\| \to 0$ при $n \to \infty$, где M_n — интегральный оператор в L_p, $A_n f = a_n f$, $f \in L_p$, $a_n \in L_\infty$, $n = 1, 2, 3, \dots$. По неравенству Шепа [8, с. 89] (см. также [4, с. 47]) $\|a_n - a_m\|_\infty \leq \|S_n - S_m\|$, здесь $\|\cdot\|_\infty$ — норма в L_∞, $S_n = A_n + M_n$. Следовательно,

$$\|M_n - M_m\| \leq \|A_n - A_m\| + \|S_n - S_m\| = \|a_n - a_m\|_\infty + \|S_n - S_m\| \leq 2\|S_n - S_m\|$$

для всех n, m. Поэтому существуют $a \in L_\infty$ и $M \in B(L_p)$ такие, что

$$\lim_{n\to\infty} \|a_n - a\|_\infty = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \|M_n - M\| = 0.$$

Тогда $S = A + M$, где A — оператор умножения на функцию a. Так как интегральные операторы M_n почти компактны, M — почти компактный оператор.

Теорема 2 дает ответ на вопрос, поставленный в [4, с. 51].

Рассмотрим еще один важный класс линейных операторов, близких к интегральным.

Следуя [1, с. 94], линейный компактный оператор $T : L_p \to L_1$ назовем $\langle p, 1\rangle$ *компактным оператором*. При $1 < p < \infty$ каждый интегральный оператор, действующий из L_p в L_1, является $\langle p, 1\rangle$-компактным [9, с. 53]. Обратное утверждение неверно: контрпримером может служить любой компактный в L_p неинтегральный оператор.

Определение 4. Обозначим через $L_{p,1}$ совокупность всех сумм операторов умножения на функции из L_∞ и $\langle p, 1\rangle$-компактных операторов в L_p.

При $p > 1$ каждый почти компактный оператор T в L_p будет $\langle p, 1\rangle$-компактным. Это следует из определения 3 и неравенства

$$\sup_{\|f\|_p \leq 1} \|Tf - P_{X\setminus e} Tf\|_1 \leq (\mu e)^{1/q} \|T\| \leq \varepsilon^{1/q} \|T\|, \quad 1/p + 1/q = 1.$$

Таким образом, $\overline{I}_p \subset L_{p,1}$ при $p > 1$.

Теорема 3. *Пусть* $1 < p < \infty$ *и мера* μ *не имеет атомов. Тогда* $L_{p,1}$ — *банахова алгебра с единицей, не совпадающая с алгеброй* $B(L_p)$.

Доказательство. Нетрудно проверить, что $L_{p,1}$ — алгебра. Покажем ее замкнутость. Будем предполагать, что L_p — комплексное пространство (случай вещественного L_p рассматривается аналогично). Пусть $\tau \in L_{p,1}$. Тогда $\tau = A + Q$, где $Af = af$, $f \in L_p$, $a \in L_\infty$, $Q - \langle p, 1\rangle$ — компактный оператор в L_p. Пусть α — какое-нибудь существенное значение функции $a(s)$, т. е. $\mu\{s \mid s \in X, |a(s)-\alpha| < \varepsilon\} > 0$ для каждого $\varepsilon > 0$. Покажем, что для любой сходящейся к 0 последовательности $\{\varepsilon_n\}$ положительных чисел найдется последовательность функций f_n с попарно не пересекающимися носителями такая, что

$$\|f_n\|_q = 1, \quad \|(\overline{a(s)} - \bar{\alpha})f_n\|_q \le \varepsilon_n, \quad \|Q^* f_n\|_q \le \varepsilon_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \tag{2}$$

где $1/q + 1/p = 1$ и Q^* — сопряженный к Q оператор. Выберем последовательность попарно не пересекающихся множеств $\{e_n\}$ с положительными мерами так, что $|a(s) - \alpha| \le \varepsilon_n$ для всех $s \in e_n$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Зафиксируем индекс n и рассмотрим ортонормированную последовательность $\{r_{m,e_n}\}_{m=1}^{\infty}$ обобщенных функций Радемахера с носителями в e_n (см., например, [10, с. 11, 12]). Эти функции обладают свойством $|r_{m,e_n}| = \frac{1}{\sqrt{\mu e_n}}\chi_{e_n}$, $m = 1, 2, 3, \dots$. Положим $g_{n,m} = (\mu e_n)^{1/2-1/q} r_{m,e_n}$. Тогда $\|g_{n,m}\|_q = 1$, $m = 1, 2, 3, \dots$. Так как Q — $\langle p, 1\rangle$-компактный оператор, то Q^* компактен как оператор, действующий из L_∞ в L_q, поэтому последовательность $\{Q^* g_{n,m}\}_{m=1}^{\infty}$ компактна в L_q. Кроме того, для любой функции $h \in L_p$ по теореме Римана — Лебега

$$\lim_{m\to\infty} \int\limits_X h\overline{Q^* g_{n,m}}\, d\mu = \lim_{m\to\infty} \int\limits_X Qh g_{n,m}\, d\mu = 0.$$

Следовательно, $\lim\limits_{m\to\infty} \|Q^* g_{n,m}\|_q = 0$. Выберем номер m_n так, что $\|Q^* g_{n,m_n}\|_q \le \varepsilon_n$. Тогда последовательность $f_n = g_{n,m_n}$, $n = 1, 2, 3, \dots$, искомая. При этом носитель каждой функции f_n содержится в e_n. Из (2) получим

$$\begin{aligned}|\alpha| = \|\alpha f_n\|_q &\le \|(\tau^* - \bar{\alpha}1)f_n\|_q + \|\tau^* f_n\|_q \\ &\le \|(\overline{a(s)} - \bar{\alpha})f_n\|_q + \|Q^* f_n\|_q + \|\tau^*\| \le 2\varepsilon_n + \|\tau^*\|.\end{aligned}$$

Отсюда $|\alpha| \le \|\tau^*\|$ для любого существенного значения α функции $a(s)$. Значит, $\|a\|_\infty \le \|\tau^*\|$ и

$$\|a\|_\infty \le \|\tau\|. \tag{3}$$

Пусть $T_n = A_n + Q_n$, где $A_n f = a_n f$, $f \in L_p$, $a_n \in L_\infty$, Q_n — $\langle p, 1\rangle$-компактный оператор в L_p, $n = 1, 2, 3, \dots$, и пусть $\lim\limits_{n\to\infty} \|T_n - T\| = 0$. Покажем, что $T \in L_{p,1}$. В силу (3) имеем $\|a_n - a_m\|_\infty \le \|T_n - T_m\|$. Поэтому найдется функция $a \in L_\infty$ такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} \|a_n - a\|_\infty = 0$. Так как $\|Q_n - Q_m\| \le \|a_n - a_m\|_\infty + \|T_n - T_m\|$, существует оператор R в L_p такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} \|R - Q_n\| = 0$. Тогда $T = A + R$, где A — оператор умножения на a, при этом

$$\sup_{\|f\|_p \le 1} \|(R - Q_n)f\|_1 \le (\mu X)^{1/q} \|R - Q_n\| \to 0 \quad \text{при } n \to \infty.$$

Следовательно, в силу $\langle p, 1\rangle$-компактности операторов Q_n оператор R $\langle p, 1\rangle$-компактен. Таким образом, $L_{p,1}$ — банахова алгебра.

Докажем, что $L_{p,1}$ не совпадает с $B(L_p)$. Так как мера μ по условию теоремы не имеет атомов, можно считать, не ограничивая общности, что $L_p = L_p(0,1)$, μ — мера Лебега. Рассмотрим при $p \geq 2$ оператор

$$Pf = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^1 f r_n \, dt \right) r_n, \quad f \in L_p,$$

где $\{r_n\}$ — ортонормированная система Радемахера. В силу неравенства Хинчина [11, с. 158] $P \in B(L_p)$. Кроме того, $P = P^2$. Покажем, что $P \notin L_{p,1}$. Предположим противное, тогда $P = A + C$, где $Af = af$, $f \in L_p$, $a \in L_\infty$, C — $\langle p,1\rangle$-компактный оператор в L_p. Следовательно, $Pf = P^2 f = a^2 f + C_1 f$, $f \in L_p$, где C_1 — $\langle p,1\rangle$-компактный оператор в L_p. Отсюда $A + C = A^2 + C_1$, $A - A^2 + C - C_1 = 0$ и в силу (3) получим $\|a^2 - a\|_\infty \leq \|0\| = 0$ и $a(a-1) = 0$. Тогда $a = \chi_{e_0} + \chi_{e_1}$, где e_0 — множество, на котором функция a обращается в 0, e_1 — множество, на котором a равна 1. Имеем

$$\chi_{e_0} r_n = \chi_{e_0} P r_n = \chi_{e_0} a r_n + \chi_{e_0} C r_n = \chi_{e_0} C r_n \to 0$$

при $n \to \infty$ по норме L_1. Значит, $\mu e_0 = 0$. Поэтому $a(s) = 1$ п. в. и $P = 1 + C$. Пусть $\{v_n\} = \{w_n\} \backslash \{r_n\}$, где $\{w_n\}$ — ортонормированная система Уолша. Тогда $0 = Pv_n = v_n + Cv_n$ для всех n. Следовательно, $1 = \|v_n\|_1 = \|Cv_n\|_1 \to 0$ при $n \to \infty$. Полученное противоречие показывает, что $P \notin L_{p,1}$. Пусть теперь $1 < q < 2$. Рассмотрим операторы $P \in B(L_p)$ и $P^* \in B(L_q)$, $1/p + 1/q = 1$. Так как $P = P^2$, то $P^* = (P^*)^2$. Предположив, что $P^* \in L_{q,1}$, подобно предыдущему будем иметь $P^* = 1 + D$, где D — $\langle q,1\rangle$-компактный оператор в L_q. Поскольку для любой функции $h \in L_p$

$$\int_0^1 h \overline{P^* v_n} \, dt = \int_0^1 P h v_n \, dt = 0,$$

то $P^* v_n = 0$ для всех n. Отсюда $1 = \|v_n\|_1 = \|Dv_n\|_1 \to 0$ при $n \to 0$. Таким образом, $P^* \notin L_{q,1}$ при $1 < q < 2$.

Следствие 1. *Пусть $1 < p < \infty$ и $\tau = A + Q$, где $Af = af$, $f \in L_p$, $a \in L_\infty$, Q — $\langle p,1\rangle$-компактный оператор в L_p. Тогда каждое существенное значение функции $\overline{a(s)}$ (или функции $a(s)$, если L_p — вещественное пространство), является точкой существенного спектра оператора τ^*.*

Справедливость следствия вытекает из (2).

Следствие 2. *Для оператора τ из следствия* 1 *выполняется неравенство $\|a\|_\infty \leq \|\tau\|$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Халмош П., Сандер В.* Ограниченные интегральные операторы в пространствах L^2. М.: Наука, 1985.
2. *Коротков В. Б.* Об интегральных операторах третьего рода // Сиб. мат. журн. 2003. Т. 44, № 5. С. 1063–1066.
3. *Бухвалов А. В.* Приложения методов теории порядково ограниченных операторов к теории операторов в пространствах L^p // Успехи мат. наук. 1983. Т. 38, № 6. С. 37–83.
4. *Коротков В. Б.* Введение в алгебраическую теорию интегральных операторов. Владивосток: Колорит, 2000.

5. *Schachermayer W., Weis L.* Almost compactness and decomposability of integral operators // Proc. Amer. Math. Soc. 1981. V. 81, N 4. P. 595–599.
6. *Коротков В. Б.* О регулярной и компактной факторизации интегральных операторов в L_p // Мат. заметки. 1982. Т. 32, № 5. С. 601–606.
7. *Weis L.* Integral operators and changes of density // Indiana Univ. Math. J. 1982. V. 31, N 1. P. 83–96.
8. *Shep A. R.* Integral operators // Math. Centre Tracts. 1982. V. 149. P. 81–91.
9. *Коротков В. Б.* Некоторые вопросы теории интегральных операторов. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1988.
10. *Коротков В. Б.* Интегральные операторы. Новосибирск: Наука, 1983.
11. *Бухвалов А. В., Коротков В. Б., Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С., Макаров Б. М.* Векторные решетки и интегральные операторы. Новосибирск: Наука, 1992.

Статья поступила 16 апреля 2010 г.

Коротков Виталий Борисович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090