Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2011. Том 52, № 2

УДК 514.177+515.124.4

ПТОЛЕМЕЕВЫ ПРОСТРАНСТВА

А. А. Довгошей, Е. А. Петров

Аннотация. Показано, что равносторонние псевдолинейные четырехполюсники являются в определенном смысле экстремально не птолемеевыми метрическими пространствами. Найдены четырехточечные псевдометрические пространства, являющиеся максимально птолемеевыми.

Ключевые слова: птолемеево пространство, экстремальная задача на конечном метрическом пространстве, псевдометрическое пространство, псевдолинейный четырехполюсник, изопериметрическое неравенство.

1. Введение

Следуя Шонбергу [1, 2], будем называть метрическое пространство (X, d) *птолемеевым*, если для любых четырех точек $x, y, z, t \in X$ выполняется неравенство

$$d(x,z)d(y,t) + d(x,t)d(y,z) - d(x,y)d(z,t) \geq 0. \tag{1}$$

Любое предгильбертово пространство является птолемеевым (см., например, [3, 9.7.3.8, 10.9.2]), а любое линейное квазинормированное птолемеево пространство будет предгильбертовым [2]. Известная со времен античности теорема Птолемея утверждает, что неравенство (1) обращается в равенство, если x, y, z, t — вершины выпуклого четырехугольника, вписанного в окружность. Положив

$$d(x,y) = 2 \quad \text{и} \quad d(z,t) = d(x,z) = d(y,t) = d(x,t) = d(y,z) = 1,$$

получаем пример птолемеева метрического пространства, не вложимого в гильбертово. Легко привести примеры не птолемеевых метрических пространств. Из результатов Шонберга следует, что любое линейное нормированное пространство с нормой, которая не порождается никаким скалярным произведением, является не птолемеевым. Замкнутая спрямляемая кривая Жордана, расстояние между точками которой измеряется длиной наименьшей из двух дуг, соединяющих эти точки, — не птолемеево метрическое пространство. Сфера $\mathbb{S}^n$, $n \geq 1$, наделенная угловой метрикой, как можно показать, тоже не птолемеево пространство. Важный для дальнейшего пример не птолемеева пространства дают так называемые псевдолинейные четырехполюсники. Напомним (см., например, [4]), что четырехточечное метрическое пространство с метрикой d называется *псевдолинейным четырехполюсником*, если при подходящей нумерации точек имеют место равенства

$$d(x_1,x_2) = d(x_3,x_4) = s, \quad d(x_2,x_3) = d(x_4,x_1) = t, \quad d(x_2,x_4) = d(x_3,x_1) = s+t,$$

где s и t — положительные действительные числа. Так как $(s+t)^2 > s^2 + t^2$, псевдолинейные четырехполюсники не птолемеевы. Псевдолинейные четырехполюсники и их многомерные модификации появились впервые в знаменитых работах Менгера [5], дающих, в частности, критерий вложимости метрических пространств в $\mathbb{R}^n$. Согласно Менгеру псевдолинейные четырехполюсники характеризуются как метрические пространства, не изометричные никакому подмножеству $\mathbb{R}$, любые три точки которых изометрично вкладываются в $\mathbb{R}$. Элементарное доказательство этого факта можно найти в [6].

Целью настоящей заметки является построение точных изопериметрических неравенств для величины, стоящей в левой части неравенства (1). В разд. 2 доказано, что для «равносторонних» псевдолинейных четырехполюсников мера «нептолемеевости» является максимально возможной. В разд. 3 обсуждаются экстремальные задачи на классе конечных псевдометрических пространств. Отмечается, в частности, что этот класс образует естественное «минимальное расширение» класса конечных метрических пространств, гарантирующее существование экстремали для задач с непрерывной целевой функцией. Максимально птолемеевы псевдометрические пространства описаны в разд. 4.

2. Максимально не птолемеевы метрические пространства

Упорядоченную четверку не обязательно различных точек x_1, x_2, x_3, x_4 метрического пространства (X, d) будем называть *четырехсторонником с периметром*

$$p = p(x_1, x_2, x_3, x_4) = d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + d(x_3, x_4) + d(x_4, x_1),$$

а вектор $(d(x_1, x_2), d(x_2, x_3), d(x_3, x_4), d(x_4, x_1))$ — *вектором длин четырехсторонника* x_1, x_2, x_3, x_4.

Следующая теорема является основным результатом настоящего раздела.

Теорема 1. *Пусть (X, d) — метрическое пространство, x_1, x_2, x_3, x_4 — четырехсторонник в X с периметром p. Тогда выполняется неравенство*

$$\frac{1}{p^2}(d(x_1, x_3)d(x_2, x_4) - d(x_1, x_2)d(x_3, x_4) - d(x_4, x_1)d(x_2, x_3)) \leq \frac{1}{8}, \tag{2}$$

где левая часть считается равной 0 при $p = 0$. Равенство в неравенстве (2) достигается тогда и только тогда, когда

$$\frac{1}{2}d(x_1, x_3) = \frac{1}{2}d(x_2, x_4) = d(x_1, x_2) = d(x_2, x_3) = d(x_3, x_4) = d(x_4, x_1) > 0, \tag{3}$$

т. е. если подпространство $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ есть равносторонний псевдолинейный четырехполюсник.

Для доказательства понадобится

Лемма 2. *Следующие утверждения эквивалентны при любых $a, b, c, k \geq 0$.*

(i) *В некотором метрическом пространстве X найдется четырехсторонник x_1, x_2, x_3, x_4 такой, что (a, b, c, k) является вектором длин x_1, x_2, x_3, x_4, т. е.*

$$a = d(x_1, x_2), \quad b = d(x_2, x_3), \quad c = d(x_3, x_4), \quad k = d(x_4, x_1). \tag{4}$$

(ii) *Имеет место неравенство*

$$2\max\{a, b, c, k\} \leq a + b + c + k. \tag{5}$$

Доказательство. Неравенство треугольника влечет импликацию (i)⇒(ii). Докажем, что (ii)⇒(i). Будем считать $\min\{a,b,c,k\} > 0$, потому что в противном случае (5) эквивалентно неравенству треугольника в пространстве, содержащем не более трех точек.

Пусть $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ — произвольное четырехточечное множество. Определим числа $d(x_i, x_j)$ равенствами (4) и положим

$$d(x_2, x_4) = \min\{b+c, a+k\}, \quad d(x_1, x_3) = \min\{a+b, c+k\}. \tag{6}$$

Соотношения (4) и (6) порождают единственную симметричную неотрицательную функцию $d : X \times X \to [0, \infty)$, для которой $d(x_i, x_j) = 0$ при $i = j$. Осталось проверить, что для так заданной функции d выполнено неравенство треугольника.

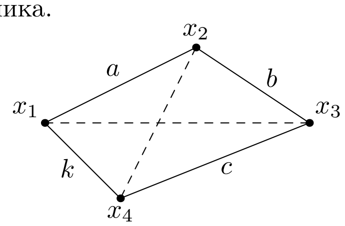

Рис. 1. От четырехсторонника к четырехточечному метрическому подпространству.

Сделаем это для треугольника $\{x_1, x_2, x_3\}$ (рис. 1). Если $\min\{a+b, c+k\} = a+b$, то точка x_2 «лежит между» точек x_1 и x_3, что, очевидно, влечет все три неравенства треугольника. Поэтому считаем $\min\{a+b, c+k\} = c+k$. Тогда

$$d(x_1, x_3) = c+k \leq a+b \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3). \tag{7}$$

Используя условие (5), получаем

$$2d(x_1, x_2) = 2a \leq 2\max\{a,b,c,k\} \leq a+b+c+k,$$

что эквивалентно

$$d(x_1, x_2) \leq b+c+k = d(x_2, x_3) + d(x_3, x_1). \tag{8}$$

Точно так же имеем

$$d(x_2, x_3) \leq d(x_2, x_1) + d(x_1, x_3). \tag{9}$$

Неравенства (7)–(9) доказывают, что функция d действительно порождает метрику на $\{x_1, x_2, x_3\}$.

Проверка этого утверждения для $\{x_2, x_3, x_4\}$, $\{x_3, x_4, x_1\}$ и $\{x_4, x_1, x_2\}$ делается аналогично. □

Замечание. С соответствующими модификациями лемма 2 может быть продолжена до критерия «изометричной вложимости» взвешенного графа в метрическое пространство.

Пусть $(y_1, \ldots, y_n)$ и $(y_1^*, \ldots, y_n^*)$ — два вектора с неотрицательными координатами. Будем говорить, что вектор $(y_1^*, \ldots, y_n^*)$ получен из $(y_1, \ldots, y_n)$ перераспределением в смысле Дальтона [7, с. 15], если существуют индексы $i_1, i_2 \in \{1, \ldots, n\}$ такие, что

$$y_i = y_i^* \text{ при } i \notin \{i_1, i_2\}, \quad y_{i_1} + y_{i_2} = y_{i_1}^* + y_{i_2}^* \quad \text{и} \quad |y_{i_1}^* - y_{i_2}^*| \leq |y_{i_1} - y_{i_2}|.$$

Лемма 2 влечет следующее

Следствие 3. *Пусть x_1, x_2, x_3, x_4 — четырехсторонник в метрическом пространстве X, (a,b,c,k) — вектор длин x_1, x_2, x_3, x_4, а вектор (a^*, b^*, c^*, k^*) получен перераспределением из (a,b,c,k). Тогда найдется четырехсторонник $x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*$ из некоторого метрического пространства (X^*, d^*) такой, что (a^*, b^*, c^*, k^*) — вектор длин четырехсторонника $x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*$.*

Доказательство. При перераспределении $(a,b,c,k) \longmapsto (a^*, b^*, c^*, k^*)$ левая часть в (5) не увеличивается, а правая остается неизменной. Существование четырехсторонника $x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*$ следует из леммы 2. □

Идея следующего доказательства проста: если x_1, x_2, x_3, x_4 не является равносторонним четырехсторонником, то можно найти перераспределение такое, что для четырехсторонника $x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*$ левая часть неравенства (2) станет строго меньше.

Доказательство теоремы 1. Пусть x_1, x_2, x_3, x_4 — произвольный четырехсторонник с периметром p, лежащий в метрическом пространстве (X, d). Не уменьшая общности, можно считать, что $\operatorname{card} X \le 4$. Докажем, что (2) выполнено.

При $\operatorname{card} X \le 3$ левая часть в (2) или тривиальным образом неположительна, случаи $x_1 = x_3$ и $x_2 = x_4$, или равна нулю по теореме Птолемея. Значит, можно предположить $\operatorname{card} X = 4$, $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $p = p(x_1, x_2, x_3, x_4) > 0$. Используя формулы (6), переопределяем расстояния $d(x_2, x_4)$ и $d(z_1, x_3)$. В ходе доказательства леммы 2 установлено, что при таком переопределении получаем метрику на X. Кроме того, при этом произведение $d(x_1, x_3)d(x_2, x_4)$ становится максимально возможным на множестве всех метрических пространств $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ с заданным вектором длин четырехсторонника x_1, x_2, x_3, x_4.

Проанализируем возможные случаи достижения минимумов в правых частях формул (6). Будем использовать (4) для обозначения длин сторон четырехсторонника x_1, x_2, x_3, x_4. Из пар (b, c) и (a, k) выберем ту, на которой достигается минимум в первой из формул (6), и аналогично из (a, b), (c, k) выберем минимизирующую пару для второй формулы. Хотя такой выбор может быть не единственным, но после того, как он сделан, две выбранные пары содержат единственный общий элемент из множества «меток» $\{a, b, c, k\}$. Например, если выбраны пары (b, c) и (c, k), то это c. Предположим, что этот единственный общий элемент помечает расстояние $d(x_{i_0}, x_{i_{0+1}})$, $i_0 \in \{1, 2, 3, 4\}$, где полагаем $x_5 = x_1$, если $i_0 = 4$. Тогда после выполнения не более чем трех перестановок

$$\tau = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_2 & x_3 & x_4 & x_1 \end{pmatrix}$$

можно добиться того, что пара (x_{i_0}, x_{i_0+1}) переходит в (x_2, x_3). Кроме того, заметим, что при выполнении перестановки τ выражения

$$\min\{d(x_2, x_3) + d(x_3, x_4), d(x_4, x_1) + d(x_1, x_2)\}$$

и

$$\min\{d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3), d(x_3, x_4) + d(x_4, x_1)\}$$

переходят соответственно в

$$\min\{d(x_3, x_4) + d(x_4, x_1), d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3)\}$$

и

$$\min\{d(x_2, x_3) + d(x_3, x_4), d(x_4, x_1) + d(x_1, x_2)\},$$

а значения величин

$$d(x_1, x_2)d(x_3, x_4) + d(x_1, x_4)d(x_2, x_3), \quad d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + d(x_3, x_4) + d(x_4, x_1)$$

остаются неизменными. Таким образом, выполнив τ не более трех раз и переименовав переменные соответствующим образом, считаем, что

$$d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) \le d(x_3, x_4) + d(x_4, x_1),$$

$$d(x_2, x_3) + d(x_3, x_4) \le d(x_4, x_1) + d(x_1, x_2),$$

т. е.

$$a+b \le c+k \quad \text{и} \quad b+c \le k+a. \tag{10}$$

Используя (10), запишем неравенство (2) в виде

$$\frac{1}{p^2}((a+b)(b+c)-ac-bk) \le \frac{1}{8}.$$

Кроме того, отметим, что ограничения (10) эквивалентны неравенству

$$k-b \ge |a-c|. \tag{11}$$

Для доказательства того, что (2) выполнено для всех четырехточечных метрических пространств, необходимо и достаточно установить соотношение

$$\max\{ab+b^2+bc-bk : a+b+c+k=p,\ a,b,c,k \ge 0,\ k-b \ge |a-c|\} \le \frac{1}{8}p^2. \tag{12}$$

Используя (11), определим $\Delta \ge 0$ из условия $2\Delta + |a-c| = k-b$ и зададим перераспределение $(a,b,c,k) \longmapsto (a^*,b^*,c^*,k^*)$ как

$$a^* = a, \quad b^* = b+\Delta, \quad c^* = c, \quad k^* = k-\Delta.$$

Тогда

$$b^*(a^*+b^*+c^*-k^*) \ge b(a+b+c-k) = ab+b^2+bc-bk,$$

причем равенство в неравенстве может достигаться только при

$$|a-c| = k-b. \tag{13}$$

Таким образом, максимум в (12) совпадает с максимумом

$$\max(b^*(a^*+b^*+c^*-k^*)) = \max(b^*(a^*+c^*-|a^*-c^*|)), \tag{14}$$

найденном при условии

$$a^*,b^*,c^*,k^* \ge 0, \quad a^*+b^*+c^*+k^* = p, \quad k^*-b^* = |a^*-c^*|. \tag{15}$$

Определим перераспределение $a^*,b^*,c^*,k^* \longmapsto a^{**},b^{**},c^{**},k^{**}$ как

$$b^{**} = \frac{k^*+b^*}{2} = k^{**}, \quad a^{**} = \frac{a^*+c^*}{2} = c^{**}.$$

Снова получаем

$$b^{**}(a^{**}+c^{**}-|a^{**}-c^{**}|) \ge b^*(a^*+c^*-|a^*-c^*|) \tag{16}$$

с равенством только при

$$a^* = c^* \quad \text{и} \quad b^* = k^*. \tag{17}$$

Таким образом, поиск максимума в (14) при условии (15) сводится к определению

$$\max\{2b^{**}a^{**} : a^{**},b^{**} \ge 0,\ 2(a^{**}+b^{**}) = p\}.$$

Воспользовавшись неравенством между арифметическим и геометрическим средними, находим

$$2a^{**}b^{**} \le \frac{p^2}{8} \tag{18}$$

с равенством только при $a^{**} = b^{**}$. Отсюда, возвращаясь к переменным a,b,c,k, получаем (12).

Предположим теперь, что неравенство (2) обращается в равенство. Убедимся в том, что пространство $X = \{x_1,x_2,x_3,x_4\}$ есть равносторонний псевдолинейный четырехполюсник. Фактически это установлено выше. Действительно, для X должны выполняться соотношения (6) и равенства (13), (17), иначе левую часть в (2) можно увеличить. Осталось заметить, что если (2) обращается в равенство, то имеем равенство и в (18). Последнее вместе с (13) и (17) влечет $a=b=c=k$, что с учетом (6) дает (3). $\square$

3. Замечания о решении экстремальных задач на множестве метрических пространств

Решая экстремальную задачу на множестве $\mathscr{A}^M$ метрических пространств X, имеющих фиксированное конечное число элементов $x_1, \dots, x_n$, $n \in \mathbb{N}$, нельзя автоматически гарантировать существование экстремального $X \in \mathscr{A}^M$, даже если речь идет об экстремуме непрерывной функции Φ от расстояний $d(x_i, x_j)$, заданной на непустом компактном подмножестве из $\mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}}$. Причина в том, что пределом поточечно сходящейся последовательности метрик $d_i : X \times X \to \mathbb{R}$ является, вообще говоря, псевдометрика на X. Напомним, что псевдометрика — это неотрицательная симметричная функция ρ на $X \times X$, удовлетворяющая неравенству треугольника и условию $\rho(x, x) = 0$ при всех $x \in X$.

Множество $\mathscr{A}^\Pi$ псевдометрических пространств с носителем $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ является наименьшим «естественным» расширением множеств $\mathscr{A}^M$ таким, что экстремум достигается при любой Φ, непрерывной на компакте из $\mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}}$. Действительно, поточечный предел псевдометрик — псевдометрика, а если ρ — произвольная псевдометрика на $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, то достаточно рассмотреть экстремальную задачу

$$\sum_{1 \le i < j \le n} (\rho(x_i, x_j) - d(x_i, x_j))^2 \to \min$$

на множестве

$$\{(X, d) \in \mathscr{A}^M : \max_{x_i, x_j \in X} d(x_i, x_j) \le 1 + \max_{x_i, x_j \in X} \rho(x_i, x_j)\}.$$

Приведем более конструктивную формулировку леммы 2 для случая псевдометрических пространств.

Чтобы ее получить, вернемся к формулам (6). Заменим их на

$$\begin{aligned} d(x_2, x_4) &= \max\{|b - c|, |a - k|\} \\ &= \max\{|d(x_2, x_3) - d(x_3, x_4)|, |d(x_4, x_1) - d(x_1, x_2)|\}, \\ d(x_1, x_3) &= \max\{|a - b|, |c - k|\} \\ &= \max\{|d(x_1, x_2) - d(x_2, x_3)|, |d(x_3, x_4) - d(x_4, x_1)|\}. \end{aligned} \tag{19}$$

Убедимся в том, что так определенные расстояния порождают псевдометрику на $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Прежде всего имеем неравенство

$$\min\{a + b, c + k\} \ge \max\{|a - b|, |c - k|\}, \tag{20}$$

так как иначе

$$c + k < |a - b| \quad \text{или} \quad a + b < |c - k|.$$

В первом случае $c + k + \min\{a, b\} < \max\{a, b\}$, а значит,

$$c + k + a + b = c + k + \min\{a, b\} + \max\{a, b\} < 2 \max\{a, b\},$$

что противоречит (5). Аналогичное противоречие получаем и при $a+b < |c-k|$. Используя (19) и (20), находим

$$d(x_1, x_3) \le \min\{a + b, c + k\} \le a + b = d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3).$$

Кроме того,

$$d(x_1, x_2) = a \le |a - b| + b \le b + \max\{|a - b|, |c - k|\} = d(x_2, x_3) + d(x_3, x_1),$$

и аналогично $d(x_2, x_3) \le d(x_2, x_1) + d(x_1, x_3)$. Рассуждая, как при доказательстве леммы 2, видим, что (19) порождают псевдометрику на $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$.

Таким образом, доказана

Теорема 4. *Пусть a, b, c, k — неотрицательные действительные числа. Для того чтобы существовало псевдометрическое пространство $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ такое, что выполнены равенства (4), необходимо и достаточно, чтобы было выполнено неравенство (5). При этом если выполнено (5), то*

$$\max\{|b-c|, |a-k|\} \le d(x_2, x_4) \le \min\{b+c, a+k\}, \tag{21}$$

$$\max\{|a-b|, |c-k|\} \le d(x_1, x_3) \le \min\{a+b, c+k\}. \tag{22}$$

Обратно, если p, q — числа такие, что

$$\max\{|b-c|, |a-k|\} \le p \le \min\{b+c, a+k\}, \tag{23}$$

$$\max\{|a-b|, |c-k|\} \le q \le \min\{a+b, c+k\}, \tag{24}$$

и справедливо (5), то существует псевдометрика d на $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ такая, что выполнено (4) и $d(x_2, x_4) = p$, $d(x_1, x_3) = q$.

Отметим, что в приведенной теореме параметры p и q выбираются независимо друга от друга, т. е. двойные неравенства (23) и (24) дают параметрическое описание всех возможных псевдометрик на $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, удовлетворяющих условию (4).

4. Максимально птолемеевы пространства

Следующая теорема дает описание максимально птолемеевых псевдометрических пространств.

Теорема 5. *Пусть (X, d) — псевдометрическое пространство, x_1, x_2, x_3, x_4 — четырехсторонник в X с ненулевым периметром p. Тогда выполняется неравенство*

$$-\frac{1}{8} \le \frac{1}{p^2}(d(x_1, x_3)d(x_2, x_4) - d(x_1, x_2)d(x_3, x_4) - d(x_1, x_4)d(x_2, x_3)). \tag{25}$$

Равенство в (25) достигается тогда и только тогда, когда

$$d(x_1, x_2) = d(x_2, x_3) = d(x_3, x_4) = d(x_4, x_1) = \frac{p}{4} \text{ и } d(x_1, x_3)d(x_2, x_4) = 0. \tag{26}$$

Доказательство. Докажем (25). Положим $a = d(x_1, x_2)$, $b = d(x_2, x_3)$, $c = d(x_3, x_4)$, $k = d(x_1, x_4)$. Заметим, что неравенство (25) равносильно неравенству

$$d(x_1, x_2)d(x_3, x_4) + d(x_1, x_4)d(x_2, x_3) - d(x_1, x_3)d(x_2, x_4) \le \frac{p^2}{8}. \tag{27}$$

Неравенства (21), (22) дают

$$\begin{aligned} &d(x_1, x_2)d(x_3, x_4) + d(x_1, x_4)d(x_2, x_3) - d(x_1, x_3)d(x_2, x_4) \\ &\qquad\le ac + kb - \max(|a-b|, |c-k|)\max(|a-k|, |b-c|). \end{aligned}$$

Следовательно, для доказательства (27) достаточно проверить, что

$$ac + kb - \max(|a-b|, |c-k|)\max(|a-k|, |b-c|) \le \frac{p^2}{8}. \tag{28}$$

Положим

$$b^* = \frac{b+k}{2} = k^*, \quad a^* = \frac{a+c}{2} = c^*. \tag{29}$$

Легко видеть, что $a^*c^* \geq ac$ (неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим), причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $a = c$. Аналогично $b^*k^* \geq bk$. Таким образом,

$$ac + bk \leq a^*c^* + b^*k^* \tag{30}$$

с равенством тогда и только тогда, когда

$$a = c, \quad b = k. \tag{31}$$

Покажем, что

$$\max(|a - b|, |c - k|) \geq \max(|a^* - b^*|, |c^* - k^*|) = |a^* - b^*| \tag{32}$$

или, что равносильно,

$$\max(|a - b|, |c - k|) \geq \frac{1}{2}|a - b + c - k|. \tag{33}$$

Обозначим $a - b = x$, $c - k = y$, тогда данное неравенство эквивалентно неравенству

$$\max(|x|, |y|) \geq \frac{1}{2}|x + y|, \tag{34}$$

которое, как нетрудно видеть, верно для любых $x, y \in \mathbb{R}$. Равенство достигается тогда и только тогда, когда $x = y$.

Аналогично доказывается, что

$$\max(|a - k|, |b - c|) \geq \max(|a^* - k^*|, |b^* - c^*|) = |a^* - k^*| = |a^* - b^*|. \tag{35}$$

Из (30), (32) и (35) имеем

$$ac+kb-\max(|a-b|, |c-k|)\max(|a-k|, |b-c|) \leq (a^*)^2+(b^*)^2-|a^*-b^*||a^*-b^*|. \tag{36}$$

Простое вычисление показывает, что правая часть в (36) равна $2a^*b^*$. Таким образом, неравенство (25) следует из (36) и

$$2a^*b^* \leq \frac{(a^* + b^*)^2}{2} = \frac{p^2}{8}.$$

Очевидно, что (26) влечет равенство в (25). Предположим теперь, что неравенство (25) обращается в равенство

$$-\frac{1}{8} = \frac{1}{p^2}\left(d(x_1, x_3)d(x_2, x_4) - d(x_1, x_2)d(x_3, x_4) - d(x_1, x_4)d(x_2, x_3)\right). \tag{37}$$

Убедимся в том, что $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ есть равносторонний четырехсторонник с нулевой диагональю. Условие равенства между арифметическим и геометрическим средними показывает, что для X должны выполняться равенства (31) и

$$a^* = b^* = p/4, \tag{38}$$

иначе левую часть в (27) можно увеличить. Таким образом,

$$d(x_1, x_2) = d(x_2, x_3) = d(x_3, x_4) = d(x_4, x_1) = \frac{p}{4}.$$

Подставляя эти равенства в (37), получаем $d(x_1, x_3)d(x_2, x_4) = 0$. $\square$

Следствие 6. *Для четырехугольников x_1, x_2, x_3, x_4 с периметром p на евклидовой плоскости выполнено точное двойное неравенство*

$$-\frac{1}{8} < \frac{1}{p^2}\left(d(x_1,x_3)d(x_2,x_4) - d(x_1,x_2)d(x_3,x_4) - d(x_1,x_4)d(x_2,x_3)\right) \leq 0, \qquad (39)$$

где $p = d(x_1,x_2) + d(x_2,x_3) + d(x_3,x_4) + d(x_1,x_4)$.

Доказательство. Из элементарной планиметрии [8] известно, что для любых четырех точек x_1, x_2, x_3, x_4 плоскости выполнено неравенство Птолемея

$$d(x_1,x_3)d(x_2,x_4) - d(x_1,x_2)d(x_3,x_4) - d(x_1,x_4)d(x_2,x_3) \leq 0,$$

превращающееся в равенство для выпуклых четырехугольников, вписанных в окружность. Это доказывает точность правой части неравенства (39).

Согласно теореме 5 левое неравенство в (39) всегда выполнено при условии $d(x_1,x_3)d(x_2,x_4) \neq 0$. Покажем, что нижнюю границу $-\frac{1}{8}$ нельзя увеличить. Для этого рассмотрим ромб, у которого

$$d(x_1,x_2) = d(x_2,x_3) = d(x_3,x_4) = d(x_4,x_1) = p/4,$$

меньшая диагональ $d(x_1,x_3) = 2\varepsilon$, а большая — $d(x_2,x_4) = 2\sqrt{\left(\frac{p}{4}\right)^2 - \varepsilon^2}$, и устремим ε к нулю. $\square$

Замечание. Условие (26) показывает, что метрические пространства, соответствующие максимально птолемеевым псевдометрическим пространствам, устроены очень просто. Отождествляя точки, находящиеся на нулевом расстоянии, получаем или произвольный равнобедренный треугольник, или отрезок.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Schoenberg I. J.* On metric arcs of vanishing Menger curvature // Ann. of Math. (2). 1940. V. 41, N 4. P. 715–726.
2. *Schoenberg I. J.* A remark on M. M. Day's characterization of inner-product spaces and a conjecture of L. M. Blumenthal // Proc. Amer. Soc. 1962. V. 3, N 6. P. 961–964.
3. *Берже М.* Геометрия. М.: Мир, 1984. Т. 1.
4. *Blumenthal L. M.* Theory and applications of distance geometry. Oxford: Clarendon Press, 1953.
5. *Menger K.* Untersuchunger über allgemeine Metrik. I–III // Math. Ann. 1928. Bd 100. S. 75–163.
6. *Довгошей А. А., Дордовский Д. В.* Отношение лежать между и изометрические вложения метрических пространств // Укр. мат. журн. 2009. Т. 61, № 10. С. 1319–1328.
7. *Маршал А., Олкин И.* Неравенства: Теория мажоризации и ее приложения. М.: Мир, 1983.
8. *Прасолов В. В.* Задачи по планиметрии. М.: МЦНМО, 2006. Ч. 1.

Статья поступила 30 августа 2010 г.

Довгошей Алексей Альфредович, Петров Евгений Александрович
Институт прикладной математики и механики НАН Украины,
ул. Р. Люксембург, 74, Донецк 83114, Украина
aleksdov@mail.ru, dovgoshey@iamm.ac.donetsk.ua; eugeniy.petrov@gmail.com