*Сибирский математический журнал*
*Март—апрель, 2011. Том 52, № 2*

*УДК 517.9+537.8*

# ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ ПО ВРЕМЕНИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

**В. В. Денисенко**

**Аннотация.** Предложен принцип минимума функционала энергии для эллиптической краевой задачи, возникающей при построении решений уравнений Максвелла, зависящих от времени по гармоническому закону.

Предложено использовать потенциалы, отличные от векторного и скалярного потенциалов, используемых при математическом моделировании электромагнитных полей, поскольку операторы традиционных задач не являются знакоопределенными, что затрудняет построение итерационных методов решения.

Рассмотрена задача в параллелепипеде с идеально проводящей границей. Для частот, отличных от резонансных, доказана положительная определенность оператора краевой задачи, предложен принцип минимума квадратичного функционала энергии, доказаны существование и единственность обобщенного решения.

**Ключевые слова:** функционал энергии, эллиптическое уравнение, электродинамика.

## 1. Введение

С точки зрения приложений важным классом решений уравнений Максвелла являются решения, зависящие от времени по гармоническому закону, когда все заданные и искомые величины зависят от времени $t$ как $\cos(\omega t)$ или $\sin(\omega t)$, где $\omega$ — заданная угловая частота. Тогда для функций, зависящих только от пространственных координат, получаются эллиптические уравнения.

Эффективным инструментом исследования и решения эллиптических краевых задач является энергетический метод, изложенный в монографии С. Г. Михлина [1]. Однако он применим только для задач с симметричными положительно определенными операторами.

Задачи для векторного и скалярного потенциалов, обычно используемых при математическом моделировании электромагнитных полей [2], имеют неопределенные операторы.

В настоящей работе предложено использовать иные потенциалы. Для частот, отличных от резонансных, доказана положительная определенность оператора краевой задачи, обоснован принцип минимума квадратичного функционала энергии. Рассмотрена задача в параллелепипеде с идеально проводящей границей.

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 09–06–91000), а также Интеграционного проекта № 89 СО РАН.

## 2. Формулировка краевой задачи

В занятой проводником трехмерной области напряженность электрического поля $\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)$ и магнитная индукция удовлетворяют уравнениям Максвелла. Запишем их для пустого пространства в виде уравнений с единичными коэффициентами за счет перехода к параметру $t$, равному времени в секундах, умноженному на скорость света $c$, и к векторной функции $\mathbf{B}$, равной магнитной индукции, умноженной на скорость света $c$:

$$-\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \operatorname{rot} \mathbf{B} = \mathbf{j}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0. \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{j}$ — заданная плотность тока, умноженная на $\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$, где $\mu_0$, $\varepsilon_0$ — электрическая и магнитная проницаемости вакуума, $c = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$, $x, y, z$ — декартовы координаты в метрах. Рассматриваем задачу в области $\Omega$ с границей $\Gamma$. Нормальную и касательные к границе компоненты векторов отмечаем индексами $\nu$ и $\tau$.

Функции, гармонически зависящие от времени, можно представить в виде

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_c \cos(\omega t) + \mathbf{j}_s \sin(\omega t). \tag{2}$$

Векторные функции $\mathbf{j}_c$ и $\mathbf{j}_s$ зависят только от координат $x, y, z$. Используем аналогичные представления и для искомых $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$.

Для новых неизвестных уравнения (1) расщепляются на две независимые системы:

$$\omega \mathbf{E}_s - \operatorname{rot} \mathbf{B}_c = -\mathbf{j}_c, \quad \omega \mathbf{B}_c - \operatorname{rot} \mathbf{E}_s = 0, \tag{3}$$

$$\omega \mathbf{E}_c + \operatorname{rot} \mathbf{B}_s = \mathbf{j}_s, \quad \omega \mathbf{B}_s + \operatorname{rot} \mathbf{E}_c = 0. \tag{4}$$

Система уравнений (3) может быть приведена к виду (4) переходом к неизвестной векторной функции $-\mathbf{E}_s$ и сменой общего знака в первом уравнении. Поэтому рассматриваем только систему (4) и далее опускаем индексы $c, s$.

Рассматриваем только случай $\omega \neq 0$. Иначе задача была бы стационарной и пришлось бы в качестве независимых добавить уравнения

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = Q, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \tag{5}$$

где $Q$ — заданная функция, равная плотности заряда, умноженной на $\varepsilon_0$. Для разрешимости уравнений (1) пришлось бы налагать условие

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0. \tag{6}$$

Для нестационарного случая равенства (5) являются условиями, которым должны удовлетворять начальные пространственные распределения полей. Вычислив дивергенции всех членов уравнений (1), с учетом равенства нулю дивергенции ротора имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{E} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0.$$

Используя закон сохранения заряда $\frac{\partial Q}{\partial t} = -\operatorname{div} \mathbf{j}$, получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \mathbf{E} - Q) = 0.$$

Поэтому из выполнения равенств (5) в начальный момент времени следует их справедливость в дальнейшем.

Для рассматриваемых полей, гармонических по времени, равенства (5) являются следствиями (4), так как достаточно вычислить дивергенции левых и правых частей (4), чтобы получить (5) с функцией $Q = \operatorname{div} \mathbf{j}/\omega$.

Если рассматриваемая область граничит с идеальным проводником, то на границе обращаются в нуль касательные компоненты $\mathbf{E}$:

$$\mathbf{E}_\tau|_\Gamma = 0. \tag{7}$$

В точках гладкости границы следствием (7) и нормальной компоненты второго уравнения (4) является равенство

$$B_\nu|_\Gamma = 0. \tag{8}$$

Удобно сначала решить вспомогательную задачу Дирихле для уравнения Пуассона

$$-\Delta\varphi = \operatorname{div} \mathbf{j}/\omega, \quad \varphi|_\Gamma = 0$$

и перейти к новой неизвестной функции $\widetilde{\mathbf{E}} = \mathbf{E} + \operatorname{grad}\varphi$ и новой заданной плотности тока $\tilde{\mathbf{j}} = \mathbf{j} + \omega \operatorname{grad}\varphi$. Система уравнений (4) и граничное условие (7) сохраняют свой вид, только $\tilde{\mathbf{j}}$ имеет нулевую дивергенцию. Полагаем, что это сделано заранее, поэтому правая часть (4) изначально удовлетворяет условию

$$\operatorname{div} \mathbf{j}/\omega = Q = 0. \tag{9}$$

С учетом этого условия решения (4) автоматически имеют нулевые дивергенции:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \tag{10}$$

### 3. Единственность решения

Условия (7), (8) для параллелепипеда $0 < x < a$, $0 < y < b$, $0 < z < c$ принимают вид

$$\begin{gathered}
B_x|_{x=0} = B_x|_{x=a} = 0, \quad B_y|_{y=0} = B_y|_{y=b} = 0, \quad B_z|_{z=0} = B_z|_{z=c} = 0,\\
E_x|_{y=0} = E_x|_{y=b} = 0, \quad E_x|_{z=0} = E_x|_{z=c} = 0,\\
E_y|_{x=0} = E_y|_{x=a} = 0, \quad E_y|_{z=0} = E_y|_{z=c} = 0,\\
E_z|_{x=0} = E_z|_{x=a} = 0, \quad E_z\ |_{y=0} = E_z|_{y=b} = 0.
\end{gathered} \tag{11}$$

Функции одной переменной, равные нулю на концах интервала $0 < x < a$, могут быть представлены в виде ряда Фурье с базисными функциями

$$s_n(x) = \sqrt{2/a}\ \sin(n\pi x/a), \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{12}$$

поскольку такие функции можно продолжить антисимметрично на интервал $a < x < 2a$ и далее периодически с периодом $2a$. Членов с $\cos(n\pi x/a)$ нет из-за антисимметрии относительно $x = a$.

Функции одной переменной, принимающие произвольные значения на концах интервала $0 < x < a$, продолжим симметрично на интервал $a < x < 2a$ и далее периодически с периодом $2a$. Такие функции могут быть представлены в виде ряда Фурье с базисными функциями:

$$c_n(x) = \begin{cases} \sqrt{1/a}, & n = 0,\\ \sqrt{2/a}\cos(n\pi x/a), & n = 1, 2, \ldots. \end{cases} \tag{13}$$

На интервале $0 < x < a$ функции (12) ортогональны между собой как функции из $L_2$ и их нормы равны единице. Таким же свойством обладает семейство функций (13). Скалярные произведения функций разных семейств отличны от нуля, но они не будут использоваться. В аналогичных (12), (13) функциях от $y, z$ будут длины интервалов $b, c$ вместо $a$. Для сокращения записи обозначим $\tilde{n} = n\pi/a$, $\widetilde{m} = m\pi/b$, $\tilde{l} = l\pi/c$.

Любой из базисов (12), (13) может быть использован для разложения функций на интервале $0 < x < a$. Однако для функций, равных нулю на концах интервала, предпочтителен первый, поскольку он соответствует периодическому продолжению функций без скачков самих функций и их первых производных, а ряды Фурье непрерывно дифференцируемых функций лучше сходятся. Если функция не равна нулю на концах интервала, то при таком продолжении нарушается ее непрерывность, поэтому предпочтительным становится базис (13), использование которого подразумевает четное продолжение, не нарушающее непрерывности функции. Поэтому при представлении декартовых компонент векторных функций $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ для координат, фигурирующих в условиях (11), используем базис (12), а для оставшихся — (13). Получаем следующее представление всех декартовых компонент искомых векторных функций:

$$\begin{gathered} E_x = \sum E^x_{nml} c_n(x) s_m(y) s_l(z), \quad E_y = \sum E^y_{nml} s_n(x) c_m(y) s_l(z), \\ E_z = \sum E^z_{nml} s_n(x) s_m(y) c_l(z), \end{gathered} \tag{14}$$

$$\begin{gathered} B_x = \sum B^x_{nml} s_n(x) c_m(y) c_l(z), \quad B_y = \sum B^y_{nml} c_n(x) s_m(y) c_l(z), \\ B_z = \sum B^z_{nml} c_n(x) c_m(y) s_l(z), \end{gathered} \tag{15}$$

где суммирование начинается с единицы, если в качестве базисной берется функция (12), или с нуля, если — (13). Для единообразия записи будем начинать все суммирования с нуля, полагая соответствующие коэффициенты нулевыми. Как видно из первого уравнения (4), для векторной функции $\mathbf{j}$ естественно использовать то же представление (13), что и для $\mathbf{E}$.

В предположении сходимости как самих рядов, так и их производных подставим эти выражения в систему уравнений (4). В силу ортогональности базисных функций получаем бесконечное число систем линейных алгебраических уравнений, каждая из которых содержит только параметры с одним набором индексов $n, m, l$.

Матрицы этих систем имеют специальный вид при обращении одного или двух индексов в нуль, поскольку часть параметров теряет смысл из-за равенства нулю функции вида (12). При $n \neq 0$, $m \neq 0$, $l \neq 0$ получается система уравнений для всех шести параметров $\left(E^x_{nml}, E^y_{nml}, E^z_{nml}, B^x_{nml}, B^y_{nml}, B^z_{nml}\right)$:

$$\begin{pmatrix} \omega & 0 & 0 & 0 & \tilde{l} & -\widetilde{m} \\ 0 & \omega & 0 & -\tilde{l} & 0 & \tilde{n} \\ 0 & 0 & \omega & \widetilde{m} & -\tilde{n} & 0 \\ 0 & -\tilde{l} & \widetilde{m} & \omega & 0 & 0 \\ \tilde{l} & 0 & -\tilde{n} & 0 & \omega & 0 \\ -\widetilde{m} & \tilde{n} & 0 & 0 & 0 & \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E^x_{nml} \\ E^y_{nml} \\ E^z_{nml} \\ B^x_{nml} \\ B^y_{nml} \\ B^z_{nml} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j^x_{nml} \\ j^y_{nml} \\ j^z_{nml} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Собственные числа этой симметричной матрицы таковы:

$$\lambda_{1,2} = \omega, \quad \lambda_{3,4} = \omega + k_{nml}, \quad \lambda_{5,6} = \omega - k_{nml}, \tag{17}$$

где $k_{nml}$ — волновое число, равное модулю волнового вектора $\mathbf{k}_{nml} = (\tilde{n}, \widetilde{m}, \tilde{l})$.

При $n = 0$, $m \neq 0$, $l \neq 0$ из шести параметров смысл сохраняют только $\left(E^x_{0ml}, B^y_{0ml}, B^z_{0ml}\right)$, поскольку равны нулю функции вида (12). Соответствующий блок матрицы (16) имеет вид

$$\begin{pmatrix} \omega & \tilde{l} & -\widetilde{m} \\ \tilde{l} & \omega & 0 \\ -\widetilde{m} & 0 & \omega \end{pmatrix}.$$

Собственные числа этой матрицы имеют вид (17), только они однократны. При $n \neq 0$, $m = 0$, $l = 0$ из шести параметров смысл сохраняет только $B^x_{n00}$, и получаем уравнение с коэффициентом $\omega$. Поэтому при любых значениях индексов $n, m, l$ собственные числа матрицы могут быть записаны в виде (17).

Собственные числа $\lambda_{5,6}$ равны 0, если $\omega = k_{nml}$. Тогда в базисе, состоящем из собственных векторов, матрица (16) имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} k_{nml} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{nml} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2k_{nml} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2k_{nml} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Волновое число $k_{nml}$ положительно, поскольку хотя бы одно из целых чисел $n, m, l$ не меньше единицы:

$$k_{nml} = \sqrt{\tilde{n}^2 + \widetilde{m}^2 + \tilde{l}^2} \geq k_{\min} = \pi / \max(a, b, c). \tag{19}$$

Поэтому в подпространстве, натянутом на первые четыре собственных вектора, матрица (18) положительно определена. Следовательно, матрица (16) тоже положительно определена, и система (16) в этом подпространстве однозначно разрешима. Подпространство, натянутое на оставшиеся два собственных вектора, является ядром линейного преобразования, которое в разных базисах соответствует матрицам (16) или (18). Чтобы задача была разрешима, правая часть должна быть ортогональна этим двум векторам. К единственному решению из первого подпространства можно добавить последние два вектора с произвольными коэффициентами.

Каждый из этих двух векторов по формулам (15), (14) дает векторные функции $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$, принадлежащие ядру оператора задачи (4), (7). Эти решения однородной задачи — собственные колебания в резонаторе, и их частоты называются *резонансными.* Поскольку для каждого набора индексов $n, m, l$ определена одна резонансная частота, их количество счетно.

На практике задача (4), (7) получается для построения решений уравнений (1) с правой частью вида (2). Когда $\omega$ не совпадает ни с одним из $k_{nml}$, имеем единственное решение задачи (4), (7). При возвращении к уравнению (1) к этому решению следует добавить с произвольными коэффициентами счетное множество решений с другими частотами $\omega = k_{nml}$. Эти собственные колебания можно не добавлять, если учесть наличие хотя бы малых потерь энергии в реальных резонаторах, приводящих к затуханию всех начальных электромагнитных полей, не поддерживаемых токами $\mathbf{j}$.

Приведенные свойства решения задачи о поле в прямоугольном резонаторе понадобятся нам в дальнейшем. В более детальном виде их можно найти в учебниках по электродинамике [3].

### 4. Задача для потенциалов

Рассмотрим множество пар гладких векторных функций $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$, удовлетворяющих условиям (7), (8). Определим скалярное произведение таких пар, полагая

$$\left(\begin{pmatrix}\mathbf{u}\\ \mathbf{v}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\mathbf{E}\\ \mathbf{B}\end{pmatrix}\right)_E = \int (\mathbf{u}\cdot\mathbf{E} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{B})\, d\Omega, \tag{20}$$

где точкой обозначено скалярное произведение векторов.

Обозначим через $L$ оператор краевой задачи (4), (7):

$$L\begin{pmatrix}\mathbf{E}\\ \mathbf{B}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\omega & \mathrm{rot}\\ \mathrm{rot} & \omega\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{E}\\ \mathbf{B}\end{pmatrix}.$$

Он действует из пространства, элементами которого являются функции $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$, в пространство, элементами которого являются пары функций $\mathbf{j}, \mathbf{q}$:

$$L\begin{pmatrix}\mathbf{E}\\ \mathbf{B}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{j}\\ \mathbf{q}\end{pmatrix}. \tag{21}$$

Определим скалярное произведение на множестве пар $\mathbf{j}$, $\mathbf{q}$ по той же формуле (20):

$$\left(\begin{pmatrix}\mathbf{F}\\ \mathbf{P}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\mathbf{j}\\ \mathbf{q}\end{pmatrix}\right)_j = \int (\mathbf{F}\cdot\mathbf{j} + \mathbf{P}\cdot\mathbf{q})\, d\Omega.$$

Тогда оператор $L^*$, сопряженный к $L$, определяется тождеством

$$\left(\begin{pmatrix}\mathbf{F}\\ \mathbf{P}\end{pmatrix}, L\begin{pmatrix}\mathbf{E}\\ \mathbf{B}\end{pmatrix}\right)_j = \left(L^*\begin{pmatrix}\mathbf{F}\\ \mathbf{P}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\mathbf{E}\\ \mathbf{B}\end{pmatrix}\right)_E. \tag{22}$$

Подставив явные выражения и проинтегрировав по частям, получаем для левой части (22) выражение

$$\int (\mathbf{E}\cdot(\omega\mathbf{F} + \mathrm{rot}\,\mathbf{P}) + \mathbf{B}\cdot(\omega\mathbf{P} + \mathrm{rot}\,\mathbf{F}))\, d\Omega + \oint ([\mathbf{E}_\tau \times \mathbf{P}_\tau]_\nu + [\mathbf{B}_\tau \times \mathbf{F}_\tau]_\nu)\, d\Gamma, \tag{23}$$

где по границе интегрируются нормальные компоненты векторных произведений.

Будем рассматривать множество пар гладких функций $\mathbf{F}$, $\mathbf{P}$, удовлетворяющих условиям

$$\mathbf{F}_\tau|_\Gamma = 0, \quad \mathbf{P}_\nu|_\Gamma = 0. \tag{24}$$

Поскольку в силу (7) первое слагаемое в интеграле по границе в (23) равно нулю, первое условие (24) обеспечивает тождественное равенство нулю всего интеграла по границе. Поэтому на выделенном множестве функций выражение (23) левой части (22) принимает вид

$$\int (\mathbf{E}\cdot(\omega\mathbf{F} + \mathrm{rot}\,\mathbf{P}) + \mathbf{B}\cdot(\omega\mathbf{P} + \mathrm{rot}\,\mathbf{F}))\, d\Omega.$$

Этот интеграл будет равен правой части тождества (22), если положить

$$L^* = L. \tag{25}$$

Равенство (25) означает, что оператора $L$ симметричный.

Можно сформулировать задачу с симметричным оператором второго порядка:

$$LL^*\begin{pmatrix}\mathbf{F}\\ \mathbf{P}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{j}\\ 0\end{pmatrix}, \tag{26}$$

где $\mathbf{F}$ и $\mathbf{P}$ — новые неизвестные функции. Такие операторы называются *сопряженно-факторизованными* [4]. Условия (24) для $\mathbf{F}$, $\mathbf{P}$ должны быть выполнены, так как сопряженный оператор $L^*$ построен только для таких функций. Решение уравнения (26) позволит построить решение уравнения (21), которое при $\mathbf{q} = 0$ лишь формой записи отличается от исходных уравнений (4). Достаточно положить

$$\mathbf{E} = \omega\mathbf{F} + \operatorname{rot}\mathbf{P}, \quad \mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{F} + \omega\mathbf{P}. \tag{27}$$

Чтобы эти векторные функции $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ являлись решением исходной краевой задачи, необходимо выполнение граничного условия (7). Первое выражение (27) позволяет переформулировать (7) для функций $\mathbf{F}$, $\mathbf{P}$, которое с учетом первого условия (24) принимает вид

$$\operatorname{rot}_\tau \mathbf{P}|_\Gamma = 0. \tag{28}$$

В силу (24) и второго выражения (27) условие (8) выполняется автоматически.

Отметим, что в (26) умножаем на $L^*$ справа, чтобы избежать дифференцирования $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{j}$, которое потребовало бы повышения требований к гладкости этих функций. В формулировку задачи может быть дополнительно введен произвольный симметричный оператор $S$, чтобы улучшить свойства оператора $LSL^*$, важные при численном и приближенном решении.

Приведем подробную запись уравнения (26):

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{F} + \omega^2\mathbf{F} + 2\omega\operatorname{rot}\mathbf{P} = \mathbf{j}, \quad 2\omega\operatorname{rot}\mathbf{F} + \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{P} + \omega^2\mathbf{P} = 0. \tag{29}$$

Решение задачи (29), (28), (24) позволяет построить по формуле (27) решение исходной задачи (4), (7). Исследование сформулированной задачи проведем ниже в рамках энергетического метода [1].

Заметим, что следствием (29) при выполнении условия (9) являются равенства

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{P} = 0, \tag{30}$$

поскольку $\omega \neq 0$, и дивергенции остальных слагаемых в уравнениях (29) равны нулю. Поэтому можно, добавив градиенты функций (30), придать уравнениям (29) вид

$$-\Delta\mathbf{F} + \omega^2\mathbf{F} + 2\omega\operatorname{rot}\mathbf{P} = \mathbf{j}, \quad 2\omega\operatorname{rot}\mathbf{F} - \Delta\mathbf{P} + \omega^2\mathbf{P} = 0, \tag{31}$$

удобный при использовании декартовых координат, когда каждой из трех компонент вектора $\Delta\mathbf{F}$ является лапласиан соответствующей компоненты $\mathbf{F}$.

## 5. Энергетическое скалярное произведение

Будем обозначать квадратными скобками симметричную билинейную форму:

$$\left[\begin{pmatrix}\mathbf{u}\\ \mathbf{v}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\mathbf{F}\\ \mathbf{P}\end{pmatrix}\right] = \int ((\operatorname{div}\mathbf{u})\operatorname{div}\mathbf{F} + (\operatorname{div}\mathbf{v})\operatorname{div}\mathbf{P})\, d\Omega$$
$$+ \int ((\omega\mathbf{u} + \operatorname{rot}\mathbf{v}) \cdot (\omega\mathbf{F} + \operatorname{rot}\mathbf{P}) + (\omega\mathbf{v} + \operatorname{rot}\mathbf{u}) \cdot (\omega\mathbf{P} + \operatorname{rot}\mathbf{F}))\, d\Omega, \tag{32}$$

где $\mathbf{F}$, $\mathbf{P}$ — пара гладких векторных функций, удовлетворяющих условиям (24), и пара $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ из того же множества, что и $\mathbf{F}$, $\mathbf{P}$.

Рассмотрим соответствующую (32) квадратичную форму

$$\left[\begin{pmatrix}\mathbf{F}\\ \mathbf{P}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\mathbf{F}\\ \mathbf{P}\end{pmatrix}\right] = \int ((\omega\mathbf{F} + \operatorname{rot}\mathbf{P})^2 + (\omega\mathbf{P} + \operatorname{rot}\mathbf{F})^2 + (\operatorname{div}\mathbf{F})^2 + (\operatorname{div}\mathbf{P})^2)\, d\Omega. \tag{33}$$

**Лемма 1.** *Если область* $\Omega$ *— параллелепипед и параметр* $\omega$ *не совпадает ни с одним из счетного множества чисел* $k_{nml}$ *вида* (19), *то на множестве гладких функций* $\mathbf{F}$, $\mathbf{P}$, *удовлетворяющих условиям* (24), *квадратичная форма* (33) *положительно определена.*

Условия (24) для векторных функций $\mathbf{F}$, $\mathbf{P}$ совпадают с условиями (7), (8) для $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$, тем самым в параллелепипеде они принимают вид, аналогичный (11). Поэтому декартовы компоненты $\mathbf{F}$ представляем рядом Фурье с базисными функциями (14), $\mathbf{P}$ — с базисными функциями (15).

В предположении сходимости как самих рядов, так и их производных подставим эти выражения в квадратичную форму (33). В силу ортогональности базисных функций после интегрирования получаем сумму квадратичных форм, каждая из которых содержит только параметры с одним набором индексов $n, m, l$:

$$\left[\begin{pmatrix}\mathbf{F}\\ \mathbf{P}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\mathbf{F}\\ \mathbf{P}\end{pmatrix}\right] = \sum (\mathbf{F}^*_{nml}, \mathbf{P}^*_{nml}) L_{nml} \begin{pmatrix}\mathbf{F}_{nml}\\ \mathbf{P}_{nml}\end{pmatrix}. \tag{34}$$

Звездочкой обозначаем транспонирование вектора или матрицы.

Матрицы $L_{nml}$ имеют специальный вид при обращении одного или двух индексов в нуль, поскольку часть параметров теряет смысл из-за равенства нулю функции вида (12). При $n \neq 0$, $m \neq 0$, $l \neq 0$ получается квадратичная форма всех шести параметров $\left(F^x_{nml}, F^y_{nml}, F^z_{nml}, P^x_{nml}, P^y_{nml}, P^z_{nml}\right)$ с матрицей

$$L_{nml} = \begin{pmatrix} k^2_{nml}+\omega^2 & 0 & 0 & 0 & -2\omega\tilde{l} & 2\omega\widetilde{m} \\ 0 & k^2_{nml}+\omega^2 & 0 & 2\omega\tilde{l} & 0 & -2\omega\tilde{n} \\ 0 & 0 & k^2_{nml}+\omega^2 & -2\omega\widetilde{m} & 2\omega\tilde{n} & 0 \\ 0 & 2\omega\tilde{l} & -2\omega\widetilde{m} & k^2_{nml}+\omega^2 & 0 & 0 \\ -2\omega\tilde{l} & 0 & 2\omega\tilde{n} & 0 & k^2_{nml}+\omega^2 & 0 \\ 2\omega\widetilde{m} & -2\omega\tilde{n} & 0 & 0 & 0 & k^2_{nml}+\omega^2 \end{pmatrix}. \tag{35}$$

Собственные числа этой симметричной матрицы имеют вид

$$\lambda_{1,2} = k^2_{nml} + \omega^2, \quad \lambda_{3,4} = (k_{nml} + \omega)^2, \quad \lambda_{5,6} = (k_{nml} - \omega)^2. \tag{36}$$

Несложно построить шесть собственных векторов матрицы $L_{nml}$, соответствующих этим собственным числам, и удостовериться, что они взаимно ортогональны.

При $n = 0$, $m \neq 0$, $l \neq 0$ из шести параметров смысл сохраняют только $\left(F^y_{0ml}, F^z_{0ml}, P^x_{0ml}\right)$, поскольку равны нулю функции вида (12). Соответствующий блок матрицы $L_{nml}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} k^2_{nml} + \omega^2 & 0 & 2\omega\tilde{l} \\ 0 & k^2_{nml} + \omega^2 & -2\omega\widetilde{m} \\ 2\omega\tilde{l} & -2\omega\widetilde{m} & k^2_{nml} + \omega^2 \end{pmatrix}. \tag{37}$$

Собственные числа этой матрицы представлены в виде (36), только они однократны.

При $n \neq 0$, $m = 0$, $l = 0$ из шести параметров смысл сохраняет только $F^x_{n00}$, тем самым получаем квадратичную форму

$$(\tilde{n}^2 + \omega^2)\left(F^x_{n00}\right)^2. \tag{38}$$

Ее коэффициент имеет вид $\lambda_1$ из (36), так как $k^2_{n00} = \tilde{n}^2$.

Аналогичные (37), (38) квадратичные формы получаются при обращении в нуль других индексов. При $n = m = l = 0$ все шесть параметров теряют смысл. Их можно считать нулевыми или полагать, что соответствующие члены в разложении отсутствуют.

Таким образом, при произвольном наборе индексов $n, m, l$ со сделанными оговорками относительно нулевых значений, используя выражения (36), получаем оценку всех собственных чисел матрицы $L_{nml}$:

$$(k_{nml} - \omega)^2 \le \lambda_{nml} \le (k_{nml} + \omega)^2, \tag{39}$$

где внесен индекс $nml$, чтобы перейти к рассмотрению всего множества матриц $L_{nml}$.

Возможно обращение в нуль коэффициента $(\omega - k_{nml})^2$, если $\omega$ совпадает с некоторым $k_{nml}$. Если $\omega$ не совпадает ни с одним из чисел этого счетного множества, то все матрицы вида (35), (37), (38) положительно определены и минимальное собственное значение определяется отличием $\omega$ от ближайшего числа из этого множества. Обозначим через $\varepsilon$ минимальное из чисел $(1 - \omega/k_{nml})^2$. Этот минимум достигается на одном из двух ближайших к $\omega$ чисел $k_{nml}$. Тогда $(k_{nml} - \omega)^2 \ge \varepsilon k_{nml}^2$. В силу (19) имеем неравенства

$$(\omega + k_{nml})^2 = k_{nml}^2 (1 + \omega/k_{nml})^2 \le k_{nml}^2 (1 + \omega/k_{\min})^2.$$

Поэтому из (39) следуют оценки $\varepsilon k_{nml}^2 \le \lambda_{nml} \le (1 + \omega/k_{\min})^2 k_{nml}^2$. Переходя к суммам (34), получаем оценки значений всей квадратичной формы:

$$\begin{gathered} \left[ \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{P} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{P} \end{pmatrix} \right] \ge \varepsilon \sum k_{nml}^2 (\mathbf{F}_{nml}^2 + \mathbf{P}_{nml}^2), \\ \left[ \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{P} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{P} \end{pmatrix} \right] \le \left( 1 + \frac{\omega}{k_{\min}} \right)^2 \sum k_{nml}^2 (\mathbf{F}_{nml}^2 + \mathbf{P}_{nml}^2). \end{gathered} \tag{40}$$

В силу ортонормированности базисных функций в (14), (15), которые используются и для представления $\mathbf{F}$, $\mathbf{P}$, нормы этих векторных функций в пространстве $L_2(\Omega)$ вычисляются суммированием квадратов коэффициентов:

$$\|\mathbf{F}\|^2 = \sum \mathbf{F}_{nml}^2, \quad \|\mathbf{P}\|^2 = \sum \mathbf{P}_{nml}^2. \tag{41}$$

Так же можно вычислить нормы производных:

$$\begin{aligned} \|\operatorname{grad} \mathbf{F}\|^2 &= \sum_{i,j=1,3} \left\| \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right\|^2 = \sum k_{nml}^2 \mathbf{F}_{nml}^2, \\ \|\operatorname{grad} \mathbf{P}\|^2 &= \sum_{i,j=1,3} \left\| \frac{\partial P_i}{\partial x_j} \right\|^2 = \sum k_{nml}^2 \mathbf{P}_{nml}^2. \end{aligned} \tag{42}$$

Используя (19), из выражений (41), (42) получаем оценки для норм

$$k_{\min}^2 \|\mathbf{F}\|^2 \le \|\operatorname{grad} \mathbf{F}\|^2, \quad k_{\min}^2 \|\mathbf{P}\|^2 \le \|\operatorname{grad} \mathbf{P}\|^2. \tag{43}$$

Эти неравенства позволяют в качестве нормы $W_2^{(1)}(\Omega)$ в подпространстве функций, удовлетворяющих условиям (24), использовать корень из суммы квадратов $L_2$-норм градиентов всех декартовых компонент векторной функции:

$$\|\mathbf{F}\|_{W_2^{(1)}(\Omega)} = \|\operatorname{grad} \mathbf{F}\|, \quad \|\mathbf{P}\|_{W_2^{(1)}(\Omega)} = \|\operatorname{grad} \mathbf{P}\|.$$

С учетом (41)–(43) из первого неравенства (40) получаем неравенство, при $\varepsilon > 0$ означающее положительную определенность рассматриваемой квадратичной формы (33) в подпространстве $W_2^{(1)}(\Omega)$, выделенном условиями (24):

$$\left[\begin{pmatrix}\mathbf{F}\\ \mathbf{P}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\mathbf{F}\\ \mathbf{P}\end{pmatrix}\right] \geq \varepsilon\bigl(\|\mathbf{F}\|^2_{W_2^{(1)}(\Omega)} + \|\mathbf{P}\|^2_{W_2^{(1)}(\Omega)}\bigr). \tag{44}$$

Напомним, что $\varepsilon > 0$, если $\omega$ не принадлежит счетному множеству чисел $k_{nml}$.

Тем самым лемма 1 доказана.

Из второго неравенства (40) следует оценка сверху

$$\left[\begin{pmatrix}\mathbf{F}\\ \mathbf{P}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\mathbf{F}\\ \mathbf{P}\end{pmatrix}\right] \leq (1+\omega/k_{\min})^2\bigl(\|\mathbf{F}\|^2_{W_2^{(1)}(\Omega)} + \|\mathbf{P}\|^2_{W_2^{(1)}(\Omega)}\bigr). \tag{45}$$

Доказанная положительная определенность позволяет использовать симметричную билинейную форму (32) как скалярное произведение на множестве гладких функций, удовлетворяющих условиям (24). Это скалярное произведение называется *энергетическим*. В силу (44), (45) соответствующая норма эквивалентна сумме норм векторных функций $\mathbf{F}$, $\mathbf{P}$ как элементов выделенного условиями (24) подпространства $W_2^{(1)}(\Omega)$. Введя скалярное произведение, мы построили гильбертово пространство. Дополним его, введя предельные элементы. Получившееся пространство называется *энергетическим*.

## 6. Функционал энергии

Рассмотрим случай, когда $\omega$ не принадлежит счетному множеству чисел $k_{nml}$. В соответствии с энергетическим методом [1] определим для задачи (29), (28), (24) функционал энергии:

$$W(\mathbf{F},\mathbf{P}) = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}\mathbf{F}\\ \mathbf{P}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\mathbf{F}\\ \mathbf{P}\end{pmatrix}\right] - \int \mathbf{j}\cdot\mathbf{F}\,d\Omega. \tag{46}$$

**Лемма 2.** *Пусть выполнены условия леммы* 1 *и заданная векторная функция* $\mathbf{j}$ *ограничена в норме* $L_2(\Omega)$ *и имеет нулевую дивергенцию. Тогда в энергетическом пространстве существует, причем единственный, элемент, доставляющий функционалу энергии минимальное значение.*

Используем неравенство Коши — Буняковского для оценки линейного функционала в (46):

$$\left|\int \mathbf{j}\cdot\mathbf{F}\,d\Omega\right| \leq \left(\int \mathbf{j}^2\,d\Omega\int \mathbf{F}^2\,d\Omega\right)^{1/2}.$$

В силу неравенств (43) и (44) правая часть оценивается сверху энергетической нормой с некоторым множителем, не зависящим от $\mathbf{F}$, $\mathbf{P}$. Поэтому достаточно потребовать ограниченности $\mathbf{j}$ в норме $L_2(\Omega)$, чтобы линейный функционал являлся ограниченным. По теореме Ф. Рисса всякий ограниченный линейный функционал может быть представлен в виде скалярного произведения на некоторый единственным образом определенный элемент гильбертова пространства $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$. Поэтому функционал энергии (46) можно записать в виде

$$W(\mathbf{F},\mathbf{P}) = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}\mathbf{F}\\ \mathbf{P}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\mathbf{F}\\ \mathbf{P}\end{pmatrix}\right] - \left[\begin{pmatrix}\mathbf{u}\\ \mathbf{v}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\mathbf{F}\\ \mathbf{P}\end{pmatrix}\right].$$

Это выражение можно преобразовать, выделив квадрат разности:

$$W(\mathbf{F},\mathbf{P}) = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}\mathbf{F}-\mathbf{u}\\ \mathbf{P}-\mathbf{v}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\mathbf{F}-\mathbf{u}\\ \mathbf{P}-\mathbf{v}\end{pmatrix}\right] - \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}\mathbf{u}\\ \mathbf{v}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\mathbf{u}\\ \mathbf{v}\end{pmatrix}\right].$$

Второй член не зависит от $\mathbf{F}$, $\mathbf{P}$, а первый положительно определен. Поэтому минимум $W(\mathbf{F},\mathbf{P})$ достигается при $\mathbf{F}=\mathbf{u}$, $\mathbf{P}=\mathbf{v}$.

Поскольку элемент $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ принадлежит энергетическому пространству и определен единственным образом, лемма 2 доказана.

### 7. Обобщенное решение

Обозначим через $\mathbf{F}$, $\mathbf{P}$ элемент энергетического пространства, на котором функционал энергии достигает своего минимального значения, и рассмотрим значения $W$ на функциях вида $\mathbf{F}+t\mathbf{u}$, $\mathbf{P}+t\mathbf{v}$, где $t$ — числовой параметр, а функции $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ удовлетворяют тем же условиям (24), что и $\mathbf{F}$, $\mathbf{P}$:

$$W(\mathbf{F}+t\mathbf{u},\mathbf{P}+t\mathbf{v}) = W(\mathbf{F},\mathbf{P}) + \frac{t^2}{2}\left[\begin{pmatrix}\mathbf{u}\\ \mathbf{v}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\mathbf{u}\\ \mathbf{v}\end{pmatrix}\right]$$
$$+\,t\int((\omega\mathbf{u}+\operatorname{rot}\mathbf{v})\cdot(\omega\mathbf{F}+\operatorname{rot}\mathbf{P}) + (\omega\mathbf{v}+\operatorname{rot}\mathbf{u})\cdot(\omega\mathbf{P}+\operatorname{rot}\mathbf{F})$$
$$+\,(\operatorname{div}\mathbf{u})\operatorname{div}\mathbf{F} + (\operatorname{div}\mathbf{v})\operatorname{div}\mathbf{P} - \mathbf{u}\cdot\mathbf{j})\,d\Omega. \quad (47)$$

Условием минимальности функционала энергии является равенство нулю коэффициента при $t$ в этой квадратичной форме как функции от $t$. Это условие может быть записано в виде тождества, справедливого для произвольных гладких функций $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, удовлетворяющих условиям (24):

$$\int((\omega\mathbf{u}+\operatorname{rot}\mathbf{v})\cdot(\omega\mathbf{F}+\operatorname{rot}\mathbf{P}) + (\omega\mathbf{v}+\operatorname{rot}\mathbf{u})\cdot(\omega\mathbf{P}+\operatorname{rot}\mathbf{F})$$
$$+\,(\operatorname{div}\mathbf{u})\operatorname{div}\mathbf{F} + (\operatorname{div}\mathbf{v})\operatorname{div}\mathbf{P} - \mathbf{u}\cdot\mathbf{j})\,d\Omega = 0. \quad (48)$$

Если дополнительно предположить гладкость всех функций, то это тождество интегрированием по частям с учетом граничных условий (24) можно привести к виду

$$\int(\mathbf{u}\cdot(\omega\mathbf{E}+\operatorname{rot}\mathbf{B}-\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{F}-\mathbf{j}) + \mathbf{v}\cdot(\operatorname{rot}\mathbf{E}+\omega\mathbf{B}-\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{P}))\,d\Omega$$
$$+\oint(u_\nu\operatorname{div}\mathbf{F} + [\mathbf{v}_\tau\times\mathbf{E}_\tau]_\nu)\,d\Gamma = 0, \quad (49)$$

где $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ использованы как сокращенные обозначения (27). Возьмем $\mathbf{v}=0$ и функцию $\mathbf{u}$ вида $\mathbf{u}=\operatorname{grad}U$, $U|_\Gamma=0$. Тогда тождество (48) принимает вид

$$\int(\omega\operatorname{grad}U\cdot\operatorname{rot}\mathbf{P} + \omega^2\mathbf{F}\cdot\operatorname{grad}U + (\Delta U)\operatorname{div}\mathbf{F} - \mathbf{j}\cdot\operatorname{grad}U)\,d\Omega = 0. \quad (50)$$

Первый интеграл по теореме Гаусса — Остроградского равен

$$\omega\oint U\operatorname{rot}_\nu\ \mathbf{P}\,d\Gamma - \int U\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{P}\,d\Omega.$$

Подынтегральные функции равны нулю, так как $U$ равно нулю на границе в силу (50) и $\operatorname{div}\operatorname{rot}$ тождественно равна нулю.

Аналогично преобразуя второй член, получаем $-\omega^2\int U\operatorname{div}\mathbf{F}\,d\Omega$. Тем же способом приходим к равенству нулю интеграла от последнего члена (50), дополнительно воспользовавшись условием (9).

После таких преобразований тождество (50) принимает вид

$$\int(-\Delta U+\omega^2 U)\operatorname{div}\mathbf{F}\,d\Omega = 0. \quad (51)$$

Это тождество позволяет обычным способом доказать, что

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = 0. \tag{52}$$

Предположив противное, возьмем точку в $\Omega$, где $\operatorname{div}\mathbf{F} \neq 0$, и ее окрестность, где рассматриваемая функция сохраняет знак. Построим $U$ как решение задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца

$$-\Delta U + \omega^2 U = \xi \tag{53}$$

с правой частью $\xi$, равной единице в выделенной окрестности и нулю в остальной части $\Omega$. Подставив такую функцию $U$ в (51), получаем ненулевое значение интеграла, что противоречит тождеству.

Теперь возьмем $\mathbf{u} = 0$ и функцию $\mathbf{v}$ вида $\mathbf{v} = \operatorname{grad} V$, $\frac{\partial V}{\partial \nu}\big|_\Gamma = 0$. Условия (24) выполнены, и тождество (48) принимает вид

$$\int (\omega \operatorname{grad} V \cdot \operatorname{rot}\mathbf{F} + \omega^2 \mathbf{P} \cdot \operatorname{grad} V + (\Delta V)\operatorname{div}\mathbf{P})\, d\Omega = 0. \tag{54}$$

Первое слагаемое равно $\omega \operatorname{div}[\mathbf{F} \times \operatorname{grad} V] + \omega \mathbf{F} \cdot \operatorname{rot}\operatorname{grad} V$, где второй член равен нулю, а интеграл первого члена равен интегралу $\omega \oint [\mathbf{F}_\tau \times \operatorname{grad}_\tau V]_\nu \, d\Gamma$ по границе и равен нулю в силу (24).

Второе слагаемое в подынтегральном выражении (54) равно $\omega^2 \operatorname{div}(V\mathbf{P}) - \omega^2 V \operatorname{div}\mathbf{P}$. Интеграл от первого члена, представляющий собой интеграл $\omega^2 \oint V P_\nu d\Gamma$ по границе, равен нулю в силу (24).

После таких преобразований тождество (54) принимает вид

$$\int (-\Delta V + \omega^2 V)\operatorname{div}\mathbf{P}\, d\Omega = 0,$$

позволяющий доказать, что

$$\operatorname{div}\mathbf{P} = 0, \tag{55}$$

с тем единственным отличием от доказательства равенства (52), что в качестве $V$ используем решение задачи Неймана для уравнения Гельмгольца (53).

С учетом доказанных равенств (52), (55) тождество (49) принимает вид

$$\int (\mathbf{u} \cdot (\omega \mathbf{E} + \operatorname{rot}\mathbf{B} - \mathbf{j}) + \mathbf{v} \cdot (\omega \mathbf{B} + \operatorname{rot}\mathbf{E}))\, d\Omega + \oint [\mathbf{v}_\tau \times \mathbf{E}_\tau]_\nu \, d\Gamma = 0.$$

С использованием произвольности функций $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ несложно доказать равенство нулю множителей при $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}_\tau$, и, значит, построенные $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ являются решением задачи (4), (7). Выражения (27) позволяют записать эти уравнения и граничное условие для $\mathbf{F}, \mathbf{P}$ в виде (29), (28). В задачу для $\mathbf{F}$, $\mathbf{P}$ входят еще уравнения (52), (55) и (24).

Однако непосредственным условием минимальности значения функционала энергии является система уравнений, соответствующих равенству нулю множителей при $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}_\tau$, $u_\nu$ в тождестве (49):

$$\begin{gathered}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{F} - \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{F} + \omega^2\mathbf{F} + 2\omega \operatorname{rot}\mathbf{P} = \mathbf{j},\\ 2\omega \operatorname{rot}\mathbf{F} + \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{P} - \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{P} + \omega^2 \mathbf{P} = 0,\end{gathered} \tag{56}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{F}|_\Gamma = 0, \quad \operatorname{rot}_\tau \mathbf{P}|_\Gamma = 0. \tag{57}$$

В силу (24) в точках гладкости границы $\operatorname{rot}_\nu \mathbf{F} = 0$. Аналогично из второго условия (57) следует $\operatorname{rot}_\nu \operatorname{rot}\mathbf{P} = \operatorname{rot}_\nu \operatorname{rot}_\tau \mathbf{P} = 0$. Кроме того, в силу (24) $P_\nu = 0$.

Поэтому нормальная к границе компонента второго уравнения (56) принимает вид
$$-\frac{\partial}{\partial\nu}\operatorname{div}\mathbf{P}\bigg|_\Gamma=0. \tag{58}$$

Применив оператор дивергенции ко второму уравнению (56), получаем уравнение Гельмгольца с положительным коэффициентом в младшем члене
$$-\Delta V+\omega^2 V=0 \tag{59}$$
для функции $V=\operatorname{div}\mathbf{P}$. Задача Неймана (59), (58) имеет единственное решение $V=0$. Таким образом, (55) является следствием (56), (57), (24).

Для функции $\mathbf{F}$ выполнение (52) как следствия (56), (57), (24) доказывается проще, так как граничное условие (57) означает равенство нулю интересующей нас функции $U=\operatorname{div}\mathbf{F}$. Уравнение Гельмгольца для $U$ получаем как дивергенцию первого уравнения (56).

Таким образом, элемент $\mathbf{F}$, $\mathbf{P}$, доставляющий функционалу энергии минимальное значение, при дополнительном предположении гладкости является решением задачи (56), (57), (24) и обладает свойствами (52), (55). Уравнения (56) внутри области можно переписать в виде (31), а в силу (52), (55) — в виде (29). Второе условие (57) совпадает с (28). Поскольку напряженность электрического поля $\mathbf{E}$ выражается через потенциалы $\mathbf{F}$, $\mathbf{P}$ по формуле (27) и потенциал $\mathbf{F}$ на границе имеет нулевые касательные компоненты, условие (28) эквивалентно краевому условию (7) исходной задачи. Следовательно, построенные векторные функции $\mathbf{F}$, $\mathbf{P}$ будут решением задачи (29), (28), (24), и векторные функции $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$, построенные по формулам (27), являются решением исходной задачи (4), (7), а также обладают свойствами (8), (10).

Тем самым доказана составляющая основной результат настоящей статьи

**Теорема.** *Пусть выполнены условия лемм* 1, 2 *и векторные функции* $\mathbf{F}$, $\mathbf{P}$, *доставляющие функционалу энергии минимальное значение, являются гладкими. Тогда решение исходной задачи* (4), (7) *может быть построено по формулам* (27).

При минимизации функционала энергии граничные условия (24) являются главными, т. е. им должны удовлетворять функции, на которых ищется минимум, а граничные условия (57) — естественными, т. е. они выполняются вследствие минимизации, как и все уравнения внутри области.

Отметим, что граничные условия (57) на плоских участках границы с учетом главных краевых условий (24) можно записать в виде условий Неймана, например, при $x=\mathrm{const}$
$$\frac{\partial F_x}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial P_y}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial P_z}{\partial x}=0,$$
т. е. в задаче для шести функций $F_x, F_y, F_z,\ P_x, P_y, P_z$ в параллелепипеде $\Omega$ каждая из этих неизвестных функций удовлетворяет на каждой из граней $\Omega$ или условию Дирихле (24), или условию Неймана. Хотя мы рассматриваем только ненулевые $\omega$, можно заметить, что уравнения в форме (31) при $\omega=0$ расщепляются на независимые уравнения Пуассона для каждой из этих шести неизвестных функций и при указанных граничных условиях решения задач существуют и единственны, очевидно, $P_x=P_y=P_z=0$.

Несложно доказывается и обратное утверждение: решение задачи (56), (57), (24) доставляет функционалу энергии минимальное в энергетическом пространстве значение. Действительно, пусть $\mathbf{F}$, $\mathbf{P}$ — решение этой краевой задачи.

Тогда при произвольных $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ верно тождество (49), которое означает равенство нулю множителя при $t$ в квадратном трехчлене (47). Коэффициент при $t^2$ положителен, так как доказана положительная определенность энергетической квадратичной формы, и нас интересуют $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, не равные тождественно нулю. Поэтому

$$W(\mathbf{F} + t\mathbf{u}, \mathbf{P} + t\mathbf{v}) \geq W(\mathbf{F}, \mathbf{P})$$

и равенство получается только при $t = 0$, т. е. минимум $W$ достигается на элементе $\mathbf{F}$, $\mathbf{P}$.

В начале раздела сделано дополнительное предположение о гладкости. Если это условие не выполнено, то тождество (48) не может быть преобразовано в (49). В этом случае пару функций $\mathbf{F}$, $\mathbf{P}$, доставляющую функционалу энергии минимальное значение, считаем обобщенным решением задачи (56), (57), (24), а построенные по ним $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ — обобщенным решением исходной задачи (4), (7).

Тем самым доказано существование обобщенного решения исходной краевой задачи и для нее обоснован принцип минимума функционала энергии. Следует напомнить, что это сделано в предположении, что $\omega$ не принадлежит счетному множеству чисел $k_{nml}$.

## 8. Ортогональное разложение энергетического пространства

Рассмотрим два множества гладких функций. Первое множество состоит из пар гладких функций $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{P}_1$, удовлетворяющих (24) и

$$\operatorname{div} \mathbf{F}_1 = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{P}_1 = 0. \tag{60}$$

Элементами второго множества являются пары $\mathbf{F}_2 = \operatorname{grad} U$, $\mathbf{P}_2 = \operatorname{grad} V$ с функциями $U, V$, удовлетворяющими граничным условиям, соответствующим (24):

$$U|_\Gamma = 0, \quad \left.\frac{\partial V}{\partial \nu}\right|_\Gamma = 0. \tag{61}$$

Всякая пара гладких функций $\mathbf{F}$, $\mathbf{P}$, удовлетворяющих (24), может быть однозначно представлена в виде суммы элементов этих двух множеств следующим образом. Функции $U, V$ строятся как решения задач Неймана и Дирихле (61) для уравнения Пуассона

$$\Delta U = \operatorname{div} \mathbf{F}, \quad \Delta V = \operatorname{div} \mathbf{P},$$

а функции $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{P}_1$ — как разности $\mathbf{F} - \operatorname{grad} U$, $\mathbf{P} - \operatorname{grad} V$. Вместе с тем сумма любых элементов этих двух множеств удовлетворяет (24).

При вычислении энергетического скалярного произведения (32) пар функций $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{P}_2$ (32) после преобразований, использованных в разд. 5, получаем

$$\left[ \begin{pmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{P}_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{F}_2 \\ \mathbf{P}_2 \end{pmatrix} \right] = \omega \int ((\omega \mathbf{F}_1 + \operatorname{rot} \mathbf{P}_1) \cdot \operatorname{grad} U + (\omega \mathbf{P}_1 + \operatorname{rot} \mathbf{F}_1) \cdot \operatorname{grad} V) \, d\Omega$$

$$= \omega \int (\operatorname{div}[\mathbf{F}_1 \times \operatorname{grad} V] + \operatorname{div}[\mathbf{P}_1 \times \operatorname{grad} U] + \omega \operatorname{div}(U\mathbf{F}_1) + \omega \operatorname{div}(V\mathbf{P}_1)) \, d\Omega$$

$$+ \omega \int (\mathbf{F}_1 \cdot \operatorname{rot} \operatorname{grad} V + \mathbf{P}_1 \cdot \operatorname{rot} \operatorname{grad} U - \omega U \operatorname{div} \mathbf{F}_1 - \omega V \operatorname{div} \mathbf{P}_1) \, d\Omega.$$

Последний интеграл равен нулю, так как два члена содержат тождественно нулевой оператор $\operatorname{rot}\operatorname{grad}$ и две дивергенции равны нулю в силу (60). Оставшийся интеграл преобразуем в интеграл по границе

$$\omega \oint \left( [\mathbf{F}_{1,\tau} \times \operatorname{grad}_\tau V]_\nu + [\mathbf{P}_{1,\tau} \times \operatorname{grad}_\tau U]_\nu + \omega U F_{1,\nu} + \omega V P_{1,\nu} \right) d\Gamma,$$

все подынтегральные члены которого равны нулю в силу граничных условий (24), (61), т. е. энергетическое скалярное произведение равно нулю.

При пополнении указанных двух множеств предельными элементами, к которым последовательности пар гладких функций сходятся в энергетической норме, получаем два ортогональных подпространства энергетического пространства.

В силу (27) и (4) с учетом условия (6) решением задачи являются такие функции $\mathbf{F}$, $\mathbf{P}$, что

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \operatorname{div}\mathbf{E}/\omega = \operatorname{div}\mathbf{j}/\omega^2 = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{P} = \operatorname{div}\mathbf{B}/\omega = 0,$$

т. е. второе подпространство, образованное из пар функций $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{P}_2$, в определенном смысле лишнее. Поэтому можно первое подпространство рассматривать в качестве всего энергетического пространства, незначительно изменив формулировки задач, что упрощает доказательства, но создает сложности при построении вычислительных алгоритмов, поэтому мы не стали пользоваться этой возможностью.

Отметим, что функционал энергии может быть переписан в виде суммы двух функционалов, соответствующих двум ортогональным подпространствам. При этом второму соответствует только $\frac{1}{2}\int\left((\operatorname{div}\mathbf{F}_2)^2 + (\operatorname{div}\mathbf{P}_2)^2\right) d\Omega$, поскольку линейная часть функционала энергии на функциях $\mathbf{F}_2, \mathbf{P}_2$ с учетом условия (6) равна

$$\begin{aligned} -\int \mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{j} d\Omega = -\int (\operatorname{grad} U) \cdot \mathbf{j}\, d\Omega = \int \left(-\operatorname{div}(U\mathbf{j}) + \mathbf{F}_2 \operatorname{div}\mathbf{j}\right) d\Omega \\ = \int \left(-\operatorname{div}(U\mathbf{j}) + \mathbf{F}_2 \operatorname{div}\mathbf{j}\right) d\Omega = \omega \oint U j_\nu \, d\Gamma = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, функционал энергии можно независимо минимизировать в построенных двух подпространствах, причем во втором подпространстве результатом будет нулевой элемент. Можно отметить, что в параллелепипеде второму подпространству соответствуют $\lambda_{1,2}$ из (36), а первому подпространству — остальные собственные числа. Поскольку $\lambda_{5,6} \le \lambda_{1,2} \le \lambda_{3,4}$, выигрыша в обусловленности матриц при исключении второго подпространства не получается.

С учетом обозначений (27) энергетическую квадратичную форму (33) можно записать в терминах исходной задачи (4), (7):

$$\left[ \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{P} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{P} \end{pmatrix} \right] = \int \left( \mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2 + (\operatorname{div}\mathbf{F})^2 + (\operatorname{div}\mathbf{P})^2 \right) d\Omega. \tag{62}$$

Ввиду того, что используемая векторная функция $\mathbf{B}$ отличается от магнитной индукции умножением на скорость света $c = 1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$, величины $\varepsilon_0\mathbf{E}^2/2$ и $\varepsilon_0\mathbf{B}^2/2$ суть плотности энергии электрического и магнитного полей, усредненные по времени.

Поскольку можно минимизировать функционал энергии только в первом подпространстве, т. е. при выполнении условия (60), в квадратичной форме (62) можно оставить только усредненную по времени полную энергию электромагнитного поля в области $\Omega$, что оправдывает ее название «энергетическая».

## 9. Сравнение с традиционной формулировкой задачи

При введении потенциалов $\mathbf{A}$, $\varphi$ [2] таких, что

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi,$$

принято использовать лоренцеву калибровку, т. е. сокращать неоднозначность выбора этих потенциалов релятивистски инвариантным условием

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{A} = 0. \tag{63}$$

Тогда второе уравнение Максвелла (1) выполняется автоматически, а первое преобразуется к виду

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} + \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \operatorname{grad} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \mathbf{j}$$

или с учетом (63) — к виду

$$-\Delta \mathbf{A} + \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = \mathbf{j}. \tag{64}$$

Для гармонических по времени функций вида (2) уравнение (64) принимает вид

$$-\Delta \mathbf{A} - \omega^2 \mathbf{A} = \mathbf{j} \tag{65}$$

с получающимся из (7) граничным условием

$$(-\operatorname{grad}_\tau \varphi - \omega \mathbf{A}_\tau)|_\Gamma = 0 \tag{66}$$

для функций $\mathbf{A}_s$, $\varphi_c$, $\mathbf{j}_s$ и аналогичными условиями для $\mathbf{A}_c$, $\varphi_s$, $\mathbf{j}_c$, но с иным знаком перед $\omega$. Рассмотрим только (66), соответствующее полям $\mathbf{E}_c$, $\mathbf{B}_s$, фигурирующим в основной системе уравнений (4).

Поскольку условие (63) принимает вид

$$\omega \varphi = \operatorname{div} \mathbf{A}, \tag{67}$$

для скалярного потенциала $\varphi$ получаем из (65) уравнение

$$-\Delta \varphi + \omega^2 \varphi = \operatorname{div} \mathbf{j} / \omega. \tag{68}$$

Чтобы устранить оставшийся произвол выбора $\mathbf{A}$, $\varphi$, можно поставить условия Дирихле для $\varphi$, а именно

$$\varphi|_\Gamma = 0. \tag{69}$$

Отметим, что наличие скалярного потенциала $\varphi$ эквивалентно выполненному нами предварительному преобразованию $\mathbf{j}$ для устранения неравенства ее дивергенции нулю (9). Если здесь использовать $\mathbf{j}$ с нулевой дивергенцией, то решением задачи (68), (69) является $\varphi = 0$. Поэтому из (67) следует, что

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0. \tag{70}$$

За счет (69) в (66) остаются только касательные компоненты $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A}_\tau|_\Gamma = 0. \tag{71}$$

Еще одно граничное условие получается из (67) с учетом (69), (71). Например, на плоском участке границы $x = 0$ в силу (71) $A_y = A_z = 0$. Поэтому $\operatorname{div} \mathbf{A} =$

$\frac{\partial A_x}{\partial x}$ и, значит, из (70) получаем условие Неймана для нормальной компоненты **A**:

$$\left.\frac{\partial A_x}{\partial x}\right|_{x=0} = 0. \tag{72}$$

На неплоских границах аналогично получается более сложное условие. Например, на сфере $r = 1$ условие (72) заменяется условием

$$\left.\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r)\right|_{r=1} = 0.$$

Если решать задачу в параллелепипеде, то для функции **A** можно использовать то же разложение (14), что мы использовали для **E**, поскольку условие (7) для **E** совпадает с условием (71) для **A**. Все три задачи для декартовых компонент **A** в параллелепипеде независимы:

$$\big(k_{nml}^2 - \omega^2\big)A_{nml}^x = j_{nml}^x, \quad \big(k_{nml}^2 - \omega^2\big)A_{nml}^y = j_{nml}^y, \quad \big(k_{nml}^2 - \omega^2\big)A_{nml}^z = j_{nml}^z.$$

Хотя для компонент **A** на некоторых гранях вместо условия Дирихле ставятся условия Неймана вида (72), при $n, m, l$, отличных от нуля, параметры $k_{nml}$ в этих задачах совпадают и собственные числа равны $\lambda_{nml} = k_{nml}^2 - \omega^2$, при этом добавляются нулевые значения одного из индексов $n, m, l$ для каждой из задач. Принципиальным отличием этих $\lambda$ от (36) является их отрицательность при $k_{nml} < \omega$. Иначе говоря, операторы задач в традиционной формулировке не являются положительными. При аналитическом решении задач в области с известным полным набором собственных функций это несущественно, поскольку задачи сводятся к разложению правых частей по этим собственным функциям, но в общем случае затрудняет создание итерационных методов.

Для сформулированной нами задачи (56), (57), (24) с положительно определенным оператором обоснованный для нее принцип минимума квадратичного функционала энергии позволяет строить приближенные решения по методу Ритца. Выбирая в качестве базисных функций те или иные восполнения сеточных функций, получаем вариационно-разностные методы [5].

При совпадении частоты $\omega$ с одним из $k_{nml}$ и наша, и традиционные задачи теряют единственность решения. Несложно проверить, что во всех трех рассмотренных формулировках: для **E**, **B** — (4), (7), для **F**, **P** — (56), (57), (24), для **A** — (65), (70), (71), получаются одни и те же **E**, **B**, соответствующие электромагнитным колебаниям с резонансными частотами.

Оператор нашей задачи при таких частотах теряет положительную определенность, но остается неотрицательным. Поскольку оператор $L$ симметричный, ядра операторов $L$, $L^*$ и $LL^* = LL$ (26) совпадают. Поэтому элементу $\mathbf{F}, \mathbf{P}$ из ядра $LL^*$ соответствуют нулевые векторные функции **E**, **B**, построенные по формулам (27), т. е. собственных колебаний таким путем не получается. Однако однородные задачи: для **F**, **P** — (27), (24) и для **E**, **B** — (4), (7), (8), совпадают, поэтому сами **F**, **P** в этом случае могут быть использованы в качестве резонансных полей **E**, **B**. Иначе говоря, элементы из ядра $LL^*$ могут быть использованы как элементы из ядра $L$.

Хотя доказательства проведены нами только для параллелепипеда, по-видимому, основные результаты справедливы для достаточно произвольных областей с кусочно гладкой границей.

## *ЛИТЕРАТУРА*


1. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. М.: Гостехиздат, 1957.
2. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. 2. Теория поля. М.: Наука, 1967.
3. *Вайнштейн Л. А.* Электромагнитные волны. М.: Радио и связь, 1988.
4. *Коновалов А. Н.* Сопряженно-факторизованные модели в задачах математической физики. Новосибирск, 1997. (Препринт / ВЦ СО РАН; № 1095).
5. *Оганесян Л. А., Руховец Л. А.* Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений. Ереван: Изд-во АН Арм.ССР, 1979.


*Статья поступила 15 июля 2010 г.*

Денисенко Валерий Васильевич
Институт вычислительного моделирования СО РАН,
Академгородок, Красноярск 660036;
Сибирский федеральный университет,
пр. Свободный, 79, Красноярск 660041
denisen@icm.krasn.ru