Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2011. Том 52, № 2

УДК 517.18

О ЧЕТЫРЕХЭЛЕМЕНТНОМ УРАВНЕНИИ ДЛЯ ФУНКЦИЙ, АНАЛИТИЧЕСКИХ ВНЕ ТРАПЕЦИИ, И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯХ

Ф. Н. Гарифьянов, С. А. Модина

Аннотация. Исследуется линейное четырехэлементное функциональное уравнение в классе решений, голоморфных вне равнобедренной трапеции и исчезающих на бесконечности. Строится система целых функций вполне регулярного роста, биортогональная с кусочно экспоненциальным весом системе степеней на координатных осях.

Ключевые слова: равносильная регуляризация, задача Карлемана, проблема моментов для целых функций экспоненциального типа.

Введение. Пусть D — равнобедренная трапеция с вершинами $t_1 = -2 - i$, $t_2 = 2 - i$, $t_3 = 1 + i$, $t_4 = i - 1$ и сторонами l_j, $j = \overline{1, 4}$, перечисленными в порядке обхода положительно ориентированной границы $\Gamma = \partial D$ ($t \in l_1 \Longrightarrow \operatorname{Im} t = -1$). Займемся исследованием уравнения

$$(Vf)(z) \equiv \sum_{m=1}^{4} (-1)^{m+1} f[\sigma_m(z)] = g(z), \quad z \in D, \tag{1}$$

где свободный член $g(z)$ голоморфен в D и его граничное значение $g^+(t)$ принадлежит $H(\Gamma)$. Решение ищем в классе функций $f(z)$, голоморфных вне $\overline{D}$ и исчезающих на бесконечности.

Преобразования

$$\sigma_m(z) = t_m + t_{m+1} - z, \quad m = \overline{1, 4} \ (t_5 = t_1), \tag{2}$$

переводят $\overline{D}$ в трапеции, имеющие с исходной общую сторону, причем множество $C \setminus \bigcup\limits_{m=1}^{4} \sigma_m(D)$ распадается на две связные компоненты. Уравнение (1) задано на той из них, которая не содержит бесконечно удаленной точки (трапеции D). Если же считать уравнение (1) определенным на точках другой связной компоненты, то надо предполагать, что $g(\infty) = 0$ и функция $g(z)$ голоморфна в некоторой окрестности бесконечно удаленной точки. Это уравнение достаточно тривиально и исследуется с помощью преобразования Бореля (см., например, по этому поводу [1]).

Ясно, что к исходной постановке такие рассуждения полностью неприменимы и функция $g(z)$ не обязана быть аналитически продолжимой через какой-либо отрезок границы Γ. Но даже если допустить подобное, как, например, в случае соответствующей однородной задачи

$$(Vf)(z) = 0, \quad z \in D, \tag{3}$$

то это нисколько не облегчает исследования проблемы. Левая часть уравнения (3) является кусочно голоморфной функцией, равной нулю во всех точках D. Отсюда, вообще говоря, не следует, что она равна нулю в точках другой связной компоненты.

Вместе с некоторым решением уравнению (3) удовлетворяет и любая его производная. Поэтому для обеспечения конечности числа решений потребуем, чтобы $f^-(t) \in H(l_j)$ для любого j, а в вершинах у $f^-(t)$ могут быть только логарифмические особенности. Такой класс решений обозначим через B.

Впервые подобный подход к теории разностных уравнений с постоянными коэффициентами предложен в работе [2]. Его приложения к проблеме моментов для целых функций экспоненциального типа (ц.ф.э.т.) рассмотрены в статье [3].

Основная цель статьи — выяснить картину разрешимости уравнения (1) (теорема 1) и применить полученные результаты к исследованию некоторой проблемы моментов для ц.ф.э.т. (теорема 2).

1. Приступим к исследованию задачи (1) в классе B. Будем искать ее решения в виде интеграла типа Коши

$$f(z) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\Gamma} (\tau - z)^{-1} \varphi(\tau)\, d\tau, \quad z \notin \overline{D}, \tag{4}$$

с неизвестной плотностью $\varphi(\tau) \in H(\bar{l_j})$. Ясно, что $\sigma_j(t) : \bar{l_j} \longrightarrow \bar{l_j}$ для любого j с изменением ориентации, т. е. кусочно линейная функция $\alpha(t) = \{\sigma_j(t); t \in l_j\}$ является на Γ обратным сдвигом Карлемана, разрывным в вершинах. Середины сторон — это неподвижные точки сдвига. Введем кусочно постоянную функцию $\gamma_t = \begin{cases} 1, & t \in l_1 \cup l_3, \\ -1, & t \in l_2 \cup l_4 \end{cases}$ и инволютивный оператор $W : \varphi(t) \longrightarrow \gamma_t \varphi[\alpha(t)]$. Заметим, что плотность интеграла типа Коши (4) определена с точностью до аналитически продолжимого в D слагаемого $a^+(\tau)$. За счет подбора этой функции считаем, что

$$W\varphi = \varphi. \tag{5}$$

Действительно, соотношение (5) интерпретируем как задачу Карлемана $a^+ - Wa^+ = W\varphi - \varphi$. Она не является переопределенной и безусловно разрешима, что устанавливается сведением ее к задаче Римана методом локально конформного склеивания [4]. Тогда

$$(1) \Longrightarrow (A\varphi)(z) \equiv \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\Gamma} N(\tau + z) \varphi(\tau)\, d\tau = g(z), \quad z \in D, \tag{6}$$

где

$$N(\lambda) = \sum_{m=1}^{4} (-1)^{m+1} (\lambda + a_m)^{-1} \tag{7}$$

и $a_1 = 2i$, $a_2 = -3$, $a_3 = -2i$, $a_4 = 3$. Справедлив аналог формулы Сохоцкого — Племеля

$$(A^+\varphi)(t) = -(W\varphi)(t) + (A\varphi)(t), \quad t \in \Gamma, \tag{8}$$

причем особый интегральный оператор $(A\varphi)(t)$ получается формальной заменой $z \in D$ на $t \in \Gamma$ и понимается в смысле главного значения по Коши. Возьмем от обеих частей равенства (8) оператор W и заменим в особом интеграле переменную τ на $\alpha(\tau)$ с учетом (5), изменим ориентации и условия $\alpha'(\tau) = -1$, $\tau \neq t_k$, а затем сложим полученное соотношение с исходным. Получим уравнение

$$T\varphi = g^+ + Wg^+, \tag{9}$$

где

$$T \equiv -2J + A + WAW, \tag{10}$$

а J — тождественный оператор. Введем банахово пространство $\widetilde{C}(\Gamma)$ — множество функций $\varphi(t) \in C(\bar{l}_j)$, $j = \overline{1,4}$, с нормой

$$M = \max|\varphi(t)|, \quad t \in \Gamma. \tag{11}$$

Лемма 1. *Операторы W и A с точностью до компактного слагаемого антикоммутируют в $\widetilde{C}(\Gamma)$, т. е.* (9) *— интегральное уравнение Фредгольма второго рода.*

Доказательство. Ясно, что

$$A + WAW = W(WA + AW) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma} K(t,\tau)\varphi(\tau)\,d\tau,$$

где

$$K(t,\tau) = N(\tau + t) + \gamma_t\gamma_\tau N[\alpha(\tau) + \alpha(t)]. \tag{12}$$

Ядро (12) ограниченное, что устанавливается непосредственным перебором всех возможных вариантов расположения точек τ и t на сторонах трапеции (см. ниже конкретные оценки, приведенные при доказательстве леммы 2). Более того, любая его частная производная ($\tau, t \neq t_k$) ограничена на Γ, а вершины могут быть только точками разрыва первого рода.

Докажем, что оператор (10) обратим. Воспользуемся следующим результатом: фундаментальную систему решений (ф.с.р.) однородного уравнения

$$T\varphi = 0 \tag{13}$$

можно выбрать так, что любая входящая туда функция удовлетворяет либо уравнению (5), либо противоположному условию

$$\varphi = -W\varphi. \tag{14}$$

Доказательство полностью аналогично приведенному в [5]. Заметим, что ввиду (14) имеем $\varphi(\pm i) = 0$ и

$$\int\limits_{l_j} \varphi(\tau)\,d\tau = 0, \quad j = \overline{1,3}. \tag{15}$$

Лемма 2. *Ф.с.р. уравнения* (13) *не содержит функций со свойством* (14).

Доказательство. Предположим противное. Оценим сверху модуль интегрального слагаемого в (13). Для сокращения записи введем обозначения

$$b_j(t) = \left|\int\limits_{l_j} K(t,\tau)\varphi(\tau)\,d\tau\right|, \quad \theta = \tau + t,\ \theta_1 = \alpha(\tau) + \alpha(t).$$

Из-за разрывности сдвига в вершинах различаем точки t_k-0 и t_k+0, лежащие на соседних сторонах. Придется рассмотреть три различных случая в зависимости от того, на какой стороне l_j, $j = \overline{1,3}$, выполняется (11). Случай $t \in l_4$ не требует отдельного рассмотрения в силу равнобедренности трапеции.

1. $t \in l_1$. Возможны четыре подслучая.

(a) $\tau \in l_1 \Longrightarrow \theta = \beta - 2i$, $\theta_1 = -\beta - 2i$, $\beta \in [-4,4]$. Тогда $K(t,\tau) = -ih(\beta^2)$, где

$$h(\lambda) = 8[(\lambda + \beta)(\lambda^2 - 10\lambda + 169)^{-1} - (\lambda + 16)^{-1}] \tag{16}$$

и $\lambda \in [0,16]$. Ясно, что $h(\lambda) > 0$ и $\operatorname{sgn} h'(\lambda) = \operatorname{sgn}(2695-2\lambda^3-9\lambda^2-12\lambda)$. Поэтому наименьшее значение на данном интервале — это $h(0)$, а наибольшим значением будет $h(\lambda_0), 9,5 < \lambda_0 < 9,6$. С учетом (15) имеем $b_1(t) \le 4M\left[\frac{h(\lambda_0)-h(0)}{2}\right] < 1,35M$.

(b) $\tau \in l_2 \Longrightarrow K(t,\tau) = (3+2i)(A_1(\theta) - A_2(\theta))$, где $A_1(\theta) = [(\theta-2i)(\theta+3)]^{-1}$, $A_2(\theta) = [(\theta-3+4i)(\theta-6+2i)]^{-1}$. Пусть вначале $\operatorname{Im} z \ge 0$. Тогда при $\operatorname{Re} t > 0$ будет $|A_1(\theta)| \le (4\sqrt{5})^{-1}$, $|A_2(\theta)| \le (3\sqrt{7,25})^{-1}$. При $\operatorname{Re} t < 0$ получим $|A_1(\theta)| \le 0,25$, $|A_2(\theta)| \le 325^{-0,5}$, т. е. для любого $t \in l_1$ имеем $b_2(t) \le 2,463M$. Случай $\operatorname{Im} z < 0$ не требует особого рассмотрения, так как $\operatorname{Im}\alpha(\tau) > 0$ (см. структуру ядра (12)).

(c) $\tau \in l_3 \Longrightarrow \theta = -\theta_1 \Longrightarrow K(t,\tau) = 0 \Longrightarrow b_3(t) = 0$.

(d) $\tau \in l_4$. В силу симметрии $b_4(t) \le 2,463M$.

Поскольку $1,35 + 2\cdot 2,463 < 2\pi$, то $M = 0 \Longrightarrow \varphi(t) \equiv 0$.

2. Покажем, что случай $t \in l_2$ невозможен.

(a) $\tau \in l_1$. Тогда $\theta_1 = 3 - 2i - \theta - K(t,\tau) = (\theta-2i)^{-1} - (\theta+3)^{-1} - (\theta-6+2i)^{-1} + (\theta-3+4i)^{-1}$. В силу (15) имеем

$$b_j(t) = 2^{-1}\left|\int\limits_{l_j} \varphi(\tau)[K(t,\tau) - K(t,\alpha(\tau))]\,d\tau\right|, \quad j = \overline{1,3}. \tag{17}$$

Поскольку $\tau = \beta - i$, $t = \alpha + (3-2\alpha)i$; $\beta \in [-2,2]$, $\alpha \in [1,2]$, то $2^{-1}|(\tau+t-2i)^{-1} - (t-\tau-4i)^{-1}| \le |\beta|(\beta^4+\alpha^4+6\alpha^2\beta^2+24\alpha^4)^{-0,5} \le \frac{2}{\sqrt{65}}$, $2^{-1}|(\tau+t+3)^{-1} - (t-\tau+3-2i)^{-1}| \le |\beta|([(\alpha+3)^2-\beta^2]^2 + 8(1-\alpha)^2[(\alpha+3)^2+\beta^2] + 16(1-\alpha)^4)^{-0,5} \le 6^{-1}$. Точно так же $2^{-1}|(\tau+t-6+2i)^{-1} - (t-\tau-i)^{-1}| \le |6^{-1}$ и $2^{-1}|(\tau+t-3+4i)^{-1} - (t-\tau-3+2i)^{-1}| < \frac{2}{\sqrt{65}}$. Итак, $b_1(t) \le 4(4\cdot 65^{-0,5} + 3^{-1})M < 3,34M$.

(b) $\tau \in l_2$. Тогда $\theta_1 = 6 - \theta - K(t,\tau) = (\theta+2i)^{-1} + (\theta-2i)^{-1} - (\theta+3)^{-1} - (\theta-6-2i)^{-1} - (\theta-6+2i)^{-1} + (\theta-9)^{-1}$. Введя обозначение $\nu = \theta - 3$, получим $K(t,\tau) = 12[(\nu^2-36)^{-1} - (\nu^2-13)(\nu^4-10\nu^2+169)^{-1}] = 156(3\mu-23)(\mu-36)^{-1}(\mu^2-10\mu+169)^{-1}$, $\mu = \nu^2 = -(3+4i)\gamma$, $\gamma \in [0,1]$, т. е. $b_2(t) \le \sqrt{5}156M \max\limits_{\gamma}|3\mu-23|/\min\limits_{\gamma}\operatorname{Re}[(\mu-36)(\mu^2-10\mu+169)] < 2,05M$.

(c) $\tau \in l_3$. Тогда $\theta_1 = 3 + 2i - \theta - K(t,\tau) = (\theta+2i)^{-1} - (\theta+3)^{-1} + (\theta-4i-3)^{-1} - (\theta-6-2i)^{-1}$. Воспользуемся равенством (17). Поскольку $\tau = \beta + i$, $t = \alpha + (3-2\alpha)i$, $\beta \in [-1,1]$, $\alpha \in [1,2]$, то $2^{-1}|(\tau+t+2i)^{-1} - (t-\tau+4i)^{-1}| \le |\beta|[(\alpha^2-\beta^2)^2 + 8(3-\alpha)^2(\alpha^2+\beta^2) + 16(3-\alpha)^4]^{-0,5} \le 65^{-0,5}$. Совершенно аналогично $2^{-1}|(\tau+t+3)^{-1} - (t-\tau+3+2i)^{-1}| \le |\beta|[((\alpha+3)^2-\beta^2)^2 + 8(2-\alpha)^2((\alpha+3)^2+\beta^2) + 16(2-\alpha)^4]^{-0,5} \le \frac{1}{15}$. Поэтому, рассуждая аналогично подслучаю (a), имеем $b_3(t) \le 0,77M$.

(d) $\tau \in l_4$. Тогда $\theta = -\theta_1 \Longrightarrow b_4(t) = 0$.

Так как $3,34 + 2,05 + 0,77 < 2\pi$, то $\varphi(t) \equiv 0$.

3. Остался последний возможный вариант $t \in l_3$.

(a) $\tau \in l_1 \Longrightarrow \theta_1 = -\theta \Longrightarrow b_1(t) = 0$.

(b) $\tau \in l_2 \Longrightarrow K(t,\tau) = (3-2i)[\beta_1(\theta) - \beta_2(\theta)]$, где $\beta_1(\theta) = [(\theta+2i)(\theta+3)]^{-1}$, $\beta_2(\theta) = [(\theta-3-4i)(\theta-6-2i)]^{-1}$. Рассуждая аналогично подслучаю (b) случая 1, имеем те же оценки, т. е. $b_2(t) \le 2,463M$.

(c) $\tau \in l_3 \Longrightarrow K(t,\tau) = -ih(\beta^2)$ (см. формулу (16)), где $\beta^2 \in [0,4]$, т. е. $b_3(t) \le M[h(4) - h(0)] \le 0,45M$ (с учетом (15)).

(d) $\tau \in l_4$. В силу симметрии $b_4(t) \le 2,463M$.

Из полученных оценок следует, что $\varphi(t) \equiv 0$, т. е. доказательство леммы завершено.

Предположим теперь, что уравнение (13) имеет нетривиальное решение со свойством (5). Тогда (13) $\Longrightarrow A^+\varphi + WA^+\varphi = 0 \Longrightarrow (A\varphi)(z) = 0$, $z \in D$. Положим $\psi(\tau) = \varphi(\tau) + a^+(\tau)$, где функция $a(z)$ голоморфна в D. Подберем функцию $a(z)$ таким образом, чтобы ψ имела свойство (14). В силу этого $T_1\psi = 0$, где $T_1 = 2J + A + WAW$. Применим оценки, приведенные в доказательстве леммы 2, т. е. $\psi(t) = 0 \Longrightarrow \varphi(t) = -a^+(t) \Longrightarrow \varphi(t) = 0$ (однородные задачи Карлемана $a^+ = \pm Wa^+$ имеют лишь тривиальное решение). Итак, интегральное уравнение (9) безусловно разрешимо и имеет единственное решение $\varphi(t)$, причем оно имеет свойство (5) (см., например, [5]). Поэтому (9) $\Longrightarrow A^+\varphi + WA^+\varphi = g^+ + Wg^+ \Longrightarrow (A\varphi)(z) = g(z)$, $z \in D$. Получаем следующий результат.

Теорема 1. *Функциональное уравнение* (1) *в классе B безусловно разрешимо и имеет единственное решение.*

2. Уравнение (1) имеет ряд интересных приложений к теории ц.ф.э.т. Решение $f(z)$ интерпретируем как нижнюю функцию, ассоциированную по Борелю с ц.ф.э.т. $F(z)$ (верхняя функция) [6, § 1, п. 1]. Считаем, что ее сопряженной индикаторной диаграммой является именно трапеция D.

Замечание 1. Случай, когда сопряженной индикаторной диаграммой является некоторое «меньшее» выпуклое множество $D_1 \subset D$, не представляет особого интереса (задача (1) переопределена). Тем не менее приведем те дополнительные ограничения на свободный член, при выполнении которых это имеет место. Во-первых, функция $g(z)$ должна быть аналитической на множестве $C - \bigcup\limits_{m=1}^{4} \sigma_m^{-1}(\overline{D}_1)$ и исчезать на бесконечности. Во-вторых, функция $F(z) = G_1(z)/\sum\limits_{m=1}^{4}(-1)^{m+1}\exp(-a_m z)$ должна быть целой. Здесь $G_1(z)$ — ц.ф.э.т., ассоциированная по Борелю с нижней функцией $g(-z)$. Наконец, ее нижняя функция $f(z)$ должна быть функцией класса B, удовлетворяющей (1).

Перепишем соотношение (1) в виде

$$\sum_{m=1}^{4}(-1)^{m+1}\int\limits_{L_m} F(t)\exp(-t\sigma_m(z))\,dt = g(z), \quad |z| < 1,$$

где L_m — лучи $\arg t = \frac{\pi(2-m)}{2}$, $m = \overline{1,4}$. Приравнивая коэффициенты Маклорена слева и справа, имеем

$$E[F(t), t^k] \equiv \sum_{m=1}^{4}(-1)^{m+1}\int\limits_{L_m} F(t)t^k\exp(a_m t)\,dt = g^{(k)}(0). \tag{18}$$

Задачу (18) можно рассматривать как обобщение известных проблем Стильтьеса и Гамбургера на случай четырех лучей.

Теорема 2. *Степенная проблема моментов $E[F(t), t^k] = \beta_k$ в классе ц.ф.э.т. $F(z)$, ассоциированных по Борелю с нижней функцией $f(z) \in B$, безусловно разрешима и имеет единственное решение, только если сумма ряда*

$$g(z) = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{\beta_j}{j!}z^j \tag{19}$$

голоморфна в D и $g^+(t) \in H(\Gamma)$.

Замечание 2. Условия теоремы заведомо выполнены, если степенной ряд (19) имеет радиус сходимости $R > \sqrt{5}$, что легко проверяется.

Рассмотрим систему нижних функций $f_m(z) : (Vf_m)(z) = \frac{z^m}{m!}$, $m = \overline{0, \infty}$. Соответствующая система верхних функций $F_m(z)$ удовлетворяет условиям

$$E[F_m(t), t^k] = \delta_{m,k}, \tag{20}$$

т. е. биортогональна с некоторым кусочно экспоненциальным весом системе степеней на координатных осях. Из свойств преобразования Бореля и замечания 1 следует, что целые функции $F_m(z)$ имеют кусочно тригонометрический индикатор $h(\theta) = \sin\theta + 2|\cos\theta|$ и тип $\sigma = \sqrt{5}$. Лучи $\theta_1 = \operatorname{arcctg} 2$ и $\theta_2 = \operatorname{arcctg}(-2)$ являются направлениями наибольшего роста, на которых значение индикатора равно типу. Поскольку

$$f(z) \in B \Longrightarrow \int\limits_{\Gamma} |f^-(t)|^2 \, |dt| < \infty,$$

в силу обобщения теоремы Пэли — Винера [7, с. 502, 503] имеем

$$F(z) = \sum_{j=1}^{4} \exp(t_j z) G_j(-i \exp(i\theta_j) z),$$

где лучи $\arg z = \theta_j$ ортогональны сторонам трапеции, а $G_j(z)$ — целые функции, причем на вещественной оси $G_j(x) \in L_2(-\infty, \infty)$. Ясно, что каждая из них — это ц.ф.э.т. из класса A и вполне регулярного роста (в.р.р.), индикаторной диаграммой которой является отрезок мнимой оси [8, гл. 1, § 4, п. 2].

В заключение покажем, что ц.ф.э.т.

$$F_m(z) = -\int\limits_{\Gamma} f_m^-(\tau) \exp(z\tau) \, d\tau, \quad m = \overline{0, \infty}, \tag{21}$$

суть целые функции в.р.р. Функции $f_m^-(z)$, аналитические вне Γ, в силу самого своего определения аналитически продолжимы через соответствующие стороны трапеции в каждый из четырех треугольников, на которые трапеция делится своими диагоналями S_1 (соединяющей t_1 и t_3) и S_2. Тогда

$$F_m(z) = \sum_{j=1}^{2} \int\limits_{S_j} \mu_j(\tau) \exp(z\tau) \, d\tau, \tag{22}$$

где плотности $\mu_j(\tau)$ принадлежат $H(S_j)$, $j = 1, 2$, а в вершинах t_k у них возможны самое большее логарифмические особенности. Правая часть (22) является суммой двух целых функций в.р.р. [8, с. 106]. Обозначим их индикаторы через $h_1(\theta)$ и $h_2(\theta)$ соответственно. Ясно, что $h_1(\theta_j) \neq h_2(\theta_j)$, $j = 1, 2$, т. е. функция (21) в.р.р. на направлениях наибольшего роста $\arg z = \theta_j$. Поскольку у нее тригонометрический индикатор в полуплоскостях $\operatorname{Re} z > 0$ и $\operatorname{Re} z < 0$, она в.р.р. внутри этих полуплоскостей [7, гл. 3, § 7, теорема 6]. Остается заметить, что поскольку множество лучей в.р.р. целой функции (21) всюду плотно, она целая функция в.р.р. во всей плоскости [7, с. 186]. Кроме того, множество корней ц.ф.э.т. $F_m(z)$ имеет нулевую плотность в каждой из полуплоскостей $\operatorname{Re} z > 0$ и $\operatorname{Re} z < 0$ [7, с. 202].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Напалков В. В.* Уравнения свертки в многомерных пространствах. М.: Наука, 1982.
2. *Гарифьянов Ф. Н.* Проблема обращения особого интеграла и разностные уравнения для функций, аналитических вне квадрата // Изв. вузов. Математика. 1993. № 7. С. 7–16.
3. *Гарифьянов Ф. Н.* Моменты Стильтьеса целых функций экспоненциального типа // Мат. заметки. 2000. Т. 7, № 5. С. 674–679.
4. *Зверович Э. И.* Метод локально-конформного склеивания // Докл. АН СССР. 1972. Т. 205, № 4. С. 767–770.
5. *Аксентьева Е. П., Гарифьянов Ф. Н.* К исследованию интегрального уравнения с ядром Карлемана // Изв. вузов. Математика. 1983. № 4. С. 43–51.
6. *Бибербах Л.* Аналитическое продолжение. М.: Наука, 1967.
7. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. М.: ГИТТЛ, 1956.
8. *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент. М.: Наука, 1976.

Статья поступила 12 июля 2010 г.

Гарифьянов Фархад Нургаязович, Модина Светлана Анатольевна
Казанский гос. энергетический университет, кафедра высшей математики,
ул. Красносельская, 51, Казань 420066
f.garifyanov@mail.ru, modinasvetlana@rambler.ru