Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2011. Том 52, № 1

УДК 514.763.3

О НОВЫХ ЯВНЫХ РИМАНОВЫХ МЕТРИКАХ С ГРУППОЙ ГОЛОНОМИИ $SU(2(n+1))$

Е. Г. Малькович

Аннотация. Построено в явной алгебраической форме семейство полных некомпактных Риччи-плоских метрик, обобщающих метрики Калаби в размерности $4(n+1)$, с группой голономии $SU(2(n+1))$.

Ключевые слова: группа голономии, метрика Калаби.

1. Введение

Статья посвящена исследованию Риччи-плоских римановых метрик со специальными группами голономии и является естественным продолжением работ [1–4]. В работе [4] при систематическом изучении римановых метрик с группой голономии Spin(7) на конусах над 3-сасакиевыми семимерными многообразиями найдено в явном виде непрерывное семейство полных некомпактных восьмимерных метрик $\bar{g}_\alpha$, зависящее от вещественного параметра $0 \le \alpha \le 1$. Метрика $\bar{g}_0$ совпадает с метрикой Калаби с группой голономии $SU(4)$, метрика $\bar{g}_1$ — с гиперкэлеровой метрикой Калаби, имеющей группу голономии $Sp(2) \subset SU(4)$. Каждая из найденных метрик $\bar{g}_\alpha$, $0 < \alpha < 1$, имеет группу голономии $SU(4)$ и автоматически является Риччи-плоской. Таким образом, найденное семейство «соединяет» метрики Калаби.

Однако обе метрики Калаби (впервые построенные в [5]) определены не только в размерности восемь, но и во всех размерностях, кратных четырем. Поэтому естествен вопрос о возможности обобщения построенного в [4] семейства метрик на более высокие размерности. В предлагаемой статье этот вопрос решается положительно: в каждой вещественной размерности $4(n+1)$ построено в явном виде непрерывное семейство метрик $\overline{G}_\alpha$, «соединяющее» многомерные метрики Калаби.

Теорема. *Следующее семейство состоит из полных Риччи-плоских $4(n+1)$-мерных римановых метрик:*

$$\overline{G}_\alpha = \frac{r^4(r^4-\alpha^4)^n}{(r^4-\alpha^4)^{n+1}-(1-\alpha^4)^{n+1}}\,dr^2 + \frac{(r^4-\alpha^4)^{n+1}-(1-\alpha^4)^{n+1}}{r^2(r^4-\alpha^4)^n}\eta_1^2 + r^2\big(\eta_2^2+\eta_3^2\big) + (r^2+\alpha^2)\sum_{\beta=1}^{n}\big(\eta_{4\beta}^2+\eta_{5\beta}^2\big) + (r^2-\alpha^2)\sum_{\beta=1}^{n}\big(\eta_{6\beta}^2+\eta_{7\beta}^2\big),$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 09–01–00142–а), Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ–7256.2010.1), ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (гос. контракт № 02.740.11.0429) и совместным проектом СО РАН и УрО РАН (проект № 46).

где $0 \le \alpha \le 1$, $r \ge 1$. *Метрики* $\overline{G}_0$ *и* $\overline{G}_1$ *имеют группы голономии* $SU(2(n+1))$ *и* $Sp(n+1)$ *соответственно и совпадают с многомерными метриками Калаби из* [5]. *Метрики* $\overline{G}_\alpha$ *при* $0 < \alpha < 1$ *имеют группу голономии* $SU(2(n+1))$ *и при* $n = 1$ *совпадают с семейством, построенным в* [4]. *При* $0 \le \alpha < 1$ *метрики* $\overline{G}_\alpha$ *определены на* $(n+1)$*-й тензорной степени линейного комплексного расслоения над пространством комплексных флагов в* $\mathbb{C}^{2n+1}$, *метрика* $\overline{G}_1$ *определена на* $T^*\mathbb{C}P^{n+1}$.

В следующем разделе подробно объясняется конструкция метрик $\overline{G}_\alpha$ и доказывается данная теорема.

2. Доказательство

В работе [4] исследовалось существование восьмимерных метрик с группой голономии Spin(7) вида

$$dt^2 + A_1(t)^2\eta_1^2 + A_2(t)^2\eta_2^2 + A_3(t)^2\eta_3^2 + B(t)^2\bigl(\eta_4^2+\eta_5^2\bigr) + C(t)^2\bigl(\eta_6^2+\eta_7^2\bigr)$$

на конусе над семимерным 3-сасакиевым многообразием M, чей четырехмерный кватернионно-кэлеров орбифолд $\mathscr{O}$ обладает кэлеровой структурой. При этом форма dt отвечает образующей конуса, формы η_i, $i = 1,2,3$, являются характеристическими формами 3-сасакиева многообразия, формы η_i, $i = 4,\dots,7$, — 1-формы на орбифолде. Условие на то, что группа голономии содержится в Spin(7), сводится к системе дифференциальных уравнений относительно функций A_i, B, C. Данная система подробно исследована, и найдено семейство решений

$$\begin{aligned}\bar{g}_\alpha = \frac{r^4(r^2-\alpha^2)(r^2+\alpha^2)}{r^8-2\alpha^4(r^4-1)-1}\,dr^2 + \frac{r^8-2\alpha^4(r^4-1)-1}{r^2(r^2-\alpha^2)(r^2+\alpha^2)}\eta_1^2 + r^2\bigl(\eta_2^2+\eta_3^2\bigr)\\ + (r^2+\alpha^2)\bigl(\eta_4^2+\eta_5^2\bigr) + (r^2-\alpha^2)\bigl(\eta_6^2+\eta_7^2\bigr),\end{aligned} \qquad (*)$$

где $0 \le \alpha \le 1$, $r \ge 1$. Метрики $(*)$ определены на гладком многообразии только в случае, когда M является пространством Алоффа — Уоллаха $N_{1,1} = SU(3)/S^1$.

Калаби построил свои метрики $\overline{G}_0$ и $\overline{G}_1$ на комплексных расслоениях к комплексным многообразиям Кэлера — Эйнштейна [5]. В частности, метрики с группой голономии $SU(n)$ построены на линейных расслоениях к компактным многообразиям Кэлера — Эйнштейна, а гиперкэлеровы метрики построены на $T^*\mathbb{C}P^n$. Тем не менее в работе [5] в явном виде построенные метрики выписаны не были.

Выражение для метрики $\overline{G}_0$ получено в [6]:

$$[1-(1/\rho)^{2m+2}]^{-1}\,d\rho^2 + [1-(1/\rho)^{2m+2}]\rho^2(d\tau - 2A)^2 + \rho^2\,ds^2, \qquad (1)$$

где ds^2 — метрика на m-мерном ходжевом многообразии Кэлера — Эйнштейна F, dA — кэлерова форма на F. При $m = 3$ метрика (1) обращается в метрику $\bar{g}_0$ для $F = SU(3)/T^2$. Метрика (1) определена на $m+1$ степени канонического линейного расслоения над F.

В [7] предпринято исследование метрик коодноростности один на $T^*\mathbb{C}P^{n+1}$. Несложно понять, что сферическое подрасслоение в $T^*\mathbb{C}P^{n+1}$ расслаивается над $SU(n+2)/(U(n)\times U(1))$. На алгебре Ли $su(n+2)$ можно выбрать базис из левоинвариантных 1-форм L_A^B, внешняя алгебра которых удовлетворяет соотношениям $dL_A^B = iL_A^C \wedge L_C^B$. Индекс A пробегает значения $(1,2,\beta)$, а индекс β принимает значения от 1 до n, далее β нигде не фиксируется, поэтому путаницы не возникает. Очевидно, что $u(n)\oplus u(1)$ является подалгеброй Ли в $su(n+2)$, но не образует внешней подалгебры. Формы $L_1^\beta=\sigma_\beta$, $L_2^\beta=\Sigma_\beta$ и $L_1^2=\nu$ образуют базис на фактор-пространстве $su(n+2)/(u(n)\oplus u(1))$. Затем определяются вещественные формы: $\sigma_{1\beta}+i\sigma_{2\beta}=\sigma_\beta$ и т. д. Форма $\lambda=L_1^1-L_2^2$ вещественна по определению. В [7] рассматривались метрики вида

$$dt^2+a(t)^2|\sigma_\beta|^2+b(t)^2|\Sigma_\beta|^2+c(t)^2|\nu|^2+f(t)^2\lambda^2, \tag{2}$$

здесь по индексу β идет суммирование от 1 до n. Было найдено выражение для гиперкэлеровой метрики $\bar g_1$ на $T^*\mathbb{C}P^{n+1}$:

$$\frac{dr^2}{1-r^{-4}}+\frac{1-r^{-4}}{4}r^2\lambda^2+r^2\bigl(\nu_1^2+\nu_2^2\bigr)+\frac{r^2+1}{2}\bigl(\Sigma_{1\beta}^2+\Sigma_{2\beta}^2\bigr)+\frac{r^2-1}{2}\bigl(\sigma_{1\beta}^2+\sigma_{2\beta}^2\bigr). \tag{3}$$

В случае $n=1$, чтобы согласовать обозначения статей [4, 7], необходимо положить

$$\lambda=2\eta_1,\ \nu_1=\eta_3,\ \nu_2=\eta_2,\ \Sigma_1=\sqrt{2}\eta_4,\ \Sigma_2=\sqrt{2}\eta_5,\ \sigma_1=\sqrt{2}\eta_6,\ \sigma_2=\sqrt{2}\eta_7.$$

Также в [7] выписан тензор Риччи, имеющий, очевидно, пять компонент: $\mathrm{Ric}=R_0dt^2+R_a|\sigma_\beta|^2+R_b|\Sigma_\beta|^2+R_c|\nu|^2+R_f\lambda^2$, и зависящий от четырех функций, мы его здесь не приводим.

Заметим, что для любой размерности n коэффициенты метрики (3) имеют один и тот же вид, в то время как коэффициенты (1) явно зависят от n. Следовательно, искомое семейство метрик тоже должно явно зависеть от n и при $\alpha=1$ принимать вид (3). Будем искать метрики следующего вида:

$$\frac{dr^2}{W^2}+\frac{W^2r^2}{4}\lambda^2+r^2\bigl(\nu_1^2+\nu_2^2\bigr)+\frac{(r^2-\alpha^2)}{2}\bigl(\sigma_{1\beta}^2+\sigma_{2\beta}^2\bigr)+\frac{(r^2+\alpha^2)}{2}\bigl(\Sigma_{1\beta}^2+\Sigma_{2\beta}^2\bigr),$$

где $W=W(r,\alpha,n)$ — неизвестная функция. Если подставить соответствующие функции в выражения для тензора Риччи, то компоненты (R_a,R_b,R_c) примут вид

$$R_a=-\frac{2Q}{(r^2-\alpha^2)^2(r^2+\alpha^2)},\quad R_b=\frac{2Q}{(r^2+\alpha^2)^2(r^2-\alpha^2)},\quad R_c=-\frac{2Q}{r^2(r^4-\alpha^4)},$$

где $Q=\frac{dW}{dr}(r^5-r\alpha^4)+4W^2\alpha^4+4(n+1)(r^4-\alpha^4-r^4W^2)$, и сделана замена $\frac{dr}{dt}=W$. Данное уравнение без труда интегрируется:

$$W^2=\frac{(r^4-\alpha^4)^{n+1}+C}{r^4(r^4-\alpha^4)^n},$$

где C — константа интегрирования, сдвигом по r ее можно фиксировать и следует положить равной $-(1-\alpha^4)^{n+1}$, тогда $r\geq 1$ и $W(1)=0$. При подстановке найденной функции компоненты R_0 и R_f, имеющие второй порядок по W, автоматически обращаются в нуль.

Рассмотрим далее следующую 2-форму:

$$\Omega=r\,dr\wedge\lambda+2r^2\nu_1\wedge\nu_2-(r^2+\alpha^2)\Sigma_{1\beta}\wedge\Sigma_{2\beta}+(r^2-\alpha^2)\sigma_{1\beta}\wedge\sigma_{2\beta}.$$

Используя соотношения для внешней алгебры форм из [7], несложно проверить, что данная форма замкнута и является с точностью до умножения на $\frac{1}{2}$ кэлеровой формой метрики (2). Из обращения в нуль тензора Риччи и замкнутости кэлеровой формы Ω следует утверждение теоремы о голономии.

Исследуем топологию пространств, на которых определены найденные метрики. Здесь мы переносим конструкцию, использованную в [4], на случай старших размерностей. Рассмотрим комплексное пространство $\mathbb{C}^{n+2}$ и на нем диагональное действие окружности S^1. Данное действие определяет класс эквивалентности, будем обозначать такой класс квадратными скобками, например $[u]$, $[V]$, где u, V — векторы или подпространства.

Рассмотрим пространство $\widetilde{H} = \{(u_1, u_2, V) \mid |u_1| = 1, u_1 \perp \mathbb{C}u_2 \perp_{\mathbb{C}} V\} \subset S^{2n+3} \times \mathbb{C}^{n+2} \times G_n(\mathbb{C}^{n+2})$. Рассмотрим также проекцию $\tilde{\pi} : (u_1, u_2, V) \to (u_1, V)$ пространства $\widetilde{H}$ на пространство $\widetilde{F} = \{(u_1, V) \mid |u_1| = 1, u_1 \perp_{\mathbb{C}} V\}$. Пространство сферического подрасслоения $\widetilde{H}^1 = \{(u_1, u_2, V) \mid |u_i| = 1, u_1 \perp_{\mathbb{C}} u_2 \perp_{\mathbb{C}} V\}$ можно отождествить с $SU(n+2)/SU(n)$. При помощи диагонального действия окружности S^1 расслоение $\tilde{\pi}$ порождает линейное комплексное расслоение

$$\pi : H = \widetilde{H}/S^1 \to F = \widetilde{F}/S^1.$$

Сферическое подрасслоение π совпадает с отображением

$$\pi^1 : H^1 = SU(n+2)/S[U(n) \times U(1)] \to F = SU(n+2)/T,$$

где

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} z & 0 & 0 \\ 0 & \bar{z} \det \bar{A} & 0 \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix} \mid z \in U(1), A \in U(n) \right\}.$$

Заметим, что H^1 является 3-сасакиевым многообразием, совпадающим с пространствомАлоффа — Уоллаха при $n = 1$, а π^1 — его расслоение над соответствующим твисторным пространством $\mathscr{Z} = F$ — пространством комплексных флагов $\{([u], V) \mid u \in S^{2n+3}, V \in G_n(\mathbb{C}^{n+2}), u \perp_{\mathbb{C}} V\}$ в $\mathbb{C}^{n+2}$. Несложно проверить, что длина в метрике $\overline{G}_\alpha$ характеристического векторного поля, отвечающего форме η_1, в начальный момент времени $r = 1$ равна $2(n+1)$. Для корректного определения метрики $\overline{G}_\alpha$ окружность, порождаемая соответствующим характеристическим векторным полем, должна быть профакторизована по дискретной подгруппе $\mathbb{Z}_{n+1}$, так как в 3-сасакиевом расслоении π^1 уже «проведена» соответствующая факторизация по $\mathbb{Z}_2$ (см. [1]). Следовательно, метрики $\overline{G}_\alpha$ при $0 \le \alpha < 1$ определены на тензорной степени π^{n+1}. Теорема доказана.

Благодарности. Я благодарен Я. В. Базайкину за многочисленные обсуждения и Ф. Айкарди за подготовку английской версии.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Базайкин Я. В.* О новых примерах полных некомпактных метрик с группой голономии Spin(7) // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 1. С. 11–32.
2. *Базайкин Я. В., Малькович Е. Г.* Метрики с группой голономии G_2, связанные с 3-сасакиевым многообразием // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 1. С. 3–7.
3. *Базайкин Я. В.* Некомпактные римановы пространства с группой голономии Spin(7) и 3-сасакиевы многообразия // Геометрия, топология и математическая физика. I / К 70-летию со дня рождения академика С. П. Новикова. Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 2008. Т. 263. С. 6–17.
4. *Базайкин Я. В., Малькович Е. Г.* Spin(7)-структуры на комплексных линейных расслоениях и явные римановы метрики с группой голономии $SU(4)$ // Мат. сб. (В печати). (http://arxiv.org/abs/1001.1622)
5. *Calabi E.* Metriques kahleriennes et fibres holomorphes // Ann. Éc. Norm. Supér., IV Sér. 1979. V. 12. P. 269–294.

6. *Page D., Pope C.* Inhomogeneous Einstein metrics on complex line bundles // Classical Quantum Gravity. 1987. V. 4. P. 213–225.

7. *Cvetic M., Gibbons G. W., Lu H., Pope C. N.* Hyper-Kähler Calabi metrics, L^2 harmonic forms, resolved M2-branes, and AdS_4/CFT_3 correspondence // Nucl. Phys. B. 2001. V. 617. P. 151–197.

Статья поступила 25 июля 2010 г.

Малькович Евгений Геннадьевич
Новосибирский гос. университет, механико-математический факультет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
malkovicheugen@ngs.ru