Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2011. Том 52, № 1

УДК 519.17

ИНЪЕКТИВНАЯ $(\Delta + 1)$–РАСКРАСКА ПЛОСКИХ ГРАФОВ С ОБХВАТОМ 6

О. В. Бородин, А. О. Иванова

Аннотация. Раскраска графа называется *инъективной*, если любые две вершины, между которыми существует цепь длины 2, получают разные цвета. Ясно, что минимальное число цветов $\chi_i(G)$ в инъективной раскраске любого графа G не меньше, чем его максимальная степень $\Delta(G)$. Существуют плоские графы с обхватом $g \geq 6$ и $\chi_i = \Delta + 1$ для любой $\Delta \geq 2$. Доказано, что каждый плоский граф с $\Delta \geq 18$ и $g \geq 6$ имеет $\chi_i \leq \Delta + 1$.

Ключевые слова: плоский граф, инъективная раскраска, обхват.

1. Введение

Под графом мы понимаем неориентированный граф без петель и кратных ребер. Через $V(G)$, $E(G)$, $\Delta(G)$ и $g(G)$ обозначим множества вершин, ребер, максимальную степень и обхват графа G соответственно. (Будем опускать аргумент всякий раз, когда граф ясен из контекста.)

Раскраска $\varphi : V(G) \to \{1, 2, \dots, k\}$ графа G называется *инъективной,* если любые две вершины, между которыми существует цепь длины 2, получают разные цвета. Минимальное число цветов в инъективной раскраске графа G называется его *инъективным хроматическим числом* и обозначается через $\chi_i(G)$. Инъективная раскраска находит применение в теории сложности и теории кодирования (см. [1]).

Отметим, что при инъективной раскраске не требуется, чтобы соседние вершины красились в разные цвета, и в этом состоит единственное отличие ее от 2-дистанционной раскраски. Последняя изучается в теории графов уже более 30 лет, а такое ее обобщение, как (p, q)-раскраска является одной из наиболее естественных моделей в проблеме распределения радиочастот в сетях мобильного телефонирования. Вершины плоского графа (источники) должны быть раскрашены (получить частоты) так, чтобы цвета (целые числа) любых двух вершин, находящихся друг от друга на расстоянии 1, отличались не менее чем на p, а вершин на расстоянии 2 — не менее чем на q. На практике $p \geq q$, поскольку с увеличением расстояния интерференция волн ослабевает. При $p = q = 1$ возникает задача 2-дистанционной раскраски плоских графов. Минимальное число цветов в 2-дистанционных раскрасках графа G обозначим через $\chi_2(G)$.

В 1977 г. Вегнер [2] высказал гипотезу, что $\chi_2 \leq \lfloor \frac{3\Delta}{2} \rfloor + 1$ для любого плоского графа с $\Delta \geq 8$. Были получены следующие верхние оценки: $\lfloor \frac{9\Delta}{5} \rfloor + 2$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 08–01–00673, 09–01–00244), работа второго автора также поддержана грантом президента России для молодых ученых (код проекта МК–2302.2008.1).

при $\Delta \geq 749$ Агнарсоном и Холдорсоном [3] и $\lceil \frac{9\Delta}{5} \rceil + 1$ при $\Delta \geq 47$ О. В. Бородиным, Брусмой, А. Н. Глебовым и Ван-Ден-Хойвелом [4, 5]. Наилучшие из известных верхних оценок при больших Δ принадлежат Молою и Салаватипуру [6, 7]: $\lceil \frac{5\Delta}{3} \rceil + 78$ при всех Δ и $\lceil \frac{5\Delta}{3} \rceil + 25$ при $\Delta \geq 241$.

Ясно, что $\chi_2(G) \geq \Delta(G)+1$ для любого графа G. В [8–10] получены достаточные условия (в терминах g и Δ) того, что 2-дистанционное хроматическое число плоского графа достигает тривиальной нижней границы $\Delta+1$. В частности, в [9] и независимо в [11] установлено, что минимальное g такое, что $\chi_2 = \Delta+1$, если Δ достаточно велико (в зависимости от g), равно 7. Другими словами, существуют плоские графы с $g \leq 6$ такие, что $\chi_2 = \Delta+2$ для произвольно больших Δ. В [12, 13] доказано, что $\chi_2 = \Delta+1$ при всех $\Delta \geq 31$ для плоских графов обхвата 6 при дополнительном условии, что каждое ребро инцидентно вершине степени 2. Дворжак и др. в [11] показали, что каждый плоский граф с $\Delta \geq 8821$ и $g \geq 6$ имеет $\chi_2 \leq \Delta+2$, а авторами в [14–16] ограничение на Δ было снижено до 18, а для предписанной 2-дистанционной раскраски — до 24.

По сравнению с 2-дистанционной раскраской инъективная раскраска плоских графов изучена гораздо меньше.

Легко привести пример плоского графа с $g = 4$ и произвольным четным Δ, имеющего $\chi_i = \frac{3}{2}\Delta$. Ясно, что любой граф G имеет $\chi_i(G) \geq \Delta(G)$, поэтому кажется естественным попытаться описать плоские графы, имеющие $\chi_i(G) = \Delta(G)$. Для плоских графов известны следующие достаточные условия: $\Delta \geq 71$ и $g \geq 7$ [17], $\Delta \geq 4$ и $g \geq 13$ [18], $\Delta \geq 3$ и $g \geq 19$ [19]. Нами в [20] доказано, что $\chi_i = \Delta$ в каждом из следующих случаев: $\Delta \geq 16$ и $g = 7$, $\Delta \geq 10$ и $8 \leq g \leq 9$, $\Delta \geq 6$ и $10 \leq g \leq 11$, а также $\Delta = 5$ и $g \geq 12$.

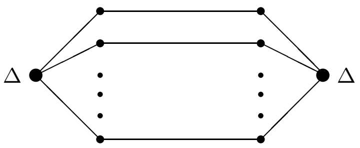

Рис. 1.

С другой стороны, нечетный цикл C_{2n-1} имеет $\chi_i(C_{2n-1}) = \Delta(C_{2n-1}) + 1 = 3$ (и произвольно большое g), а граф на рис. 1 имеет $g = 6$ и $\chi_i(G) = \Delta + 1$ при произвольно большой Δ.

Для плоских графов известны также следующие результаты: $\chi_i \leq \Delta+4$ при $g \geq 5$ [19], $\chi_i \leq \Delta+2$ при $g \geq 8$ [17], $\chi_i \leq \Delta+1$ при $g \geq 9$ и $\Delta \geq 4$ [17–19].

Целью данной работы является получение неулучшаемой верхней оценки для инъективного хроматического числа плоских графов обхвата не менее 6.

Теорема 1. *Каждый плоский граф с* $\Delta \geq 18$ *и* $g \geq 6$ *имеет* $\chi_i \leq \Delta+1$.

Доказательство теоремы 1 основано на технике граней-трансмиттеров, разработанной нами в [10, 14–16].

2. Доказательство теоремы 1

Пусть G' — контрпример к теореме 1, и пусть G — граф с наименьшим числом ребер такой, что $\Delta(G) \leq \Delta(G') = \Delta$, $g(G) \geq g(G')$ и $\chi_i(G) > \Delta + 1$. Множество графов с этими свойствами непусто, поскольку, например, G' обладает ими всеми. Для доказательства теоремы 1 мы покажем, что G не существует, что будет противоречить существованию G'.

Без ограничения общности можем считать, что G связен и не содержит висячих ребер. Формулу Эйлера $|V| - |E| + |F| = 2$ перепишем в виде

$$\sum_{v \in V}(2d(v) - 6) + \sum_{f \in F}(r(f) - 6) = -12, \tag{1}$$

где F — множество граней графа G, $d(v)$ — степень вершины v, а $r(f)$ — ранг грани f.

Через $\mu(v) = 2d(v) - 6$ обозначим *заряд* вершины v графа G, а *заряд* $\mu(f)$ любой грани f положим равным $r(f) - 6$. Заметим, что заряд 2-вершины равен -2, а заряды всех остальных вершин и всех граней неотрицательны.

Чтобы доказать несуществование G, сначала опишем некоторые структурные свойства графа G, а затем, основываясь на них, перераспределим заряды, сохраняя их сумму, так, чтобы все новые заряды были неотрицательными (что даст противоречие с (1)).

Далее *d-вершина* — вершина степени d, *k-цепь* — цепь из в точности k вершин степени 2, а *$(k_1, \dots, k_d)$-вершина* — d-вершина, инцидентная d различным цепям, i-я из которых есть k_i-цепь ($1 \le i \le d$).

2.1. Структурные свойства графа G.

Замечание 1. Ввиду минимальности G граф, полученный из G удалением любого ребра uv, имеет инъективную $(\Delta + 1)$-раскраску. Если удается перекрасить вершины u и v так, чтобы их цвета отличались от цветов вершин на расстоянии 2, то G получает инъективную $(\Delta + 1)$-раскраску.

Лемма 1. *В G нет k-цепи при $k \ge 2$.*

Доказательство. Предположим, что $v_0v_1v_2\dots$ — цепь, где $d(v_0) \ge 3$, $d(v_1) = d(v_2) = 2$. Возьмем инъективную $(\Delta + 1)$-раскраску графа $G - v_1v_2$ (существующую по замечанию 1) и покрасим вершины v_1 и v_2 в любом порядке (каждая вершина имеет не более Δ ограничений на выбор цвета). $\square$

Вершина v называется *младшей*, если $3 \le d(v) \le 4$, и *старшей*, если $d(v) \ge 9$. *Сильной* называется 6-грань, инцидентная по меньшей мере двум старшим вершинам; в противном случае 6-грань называется *слабой*. Иногда мы сокращаем «грань ранга не меньше 7» до «7^+-грань», а «вершина степени не меньше 3» до «3^+-вершина».

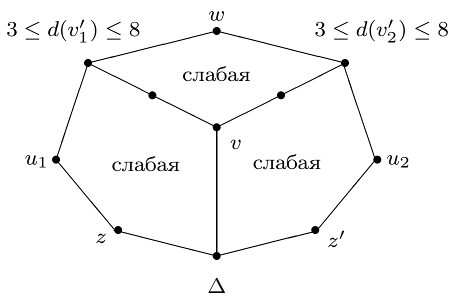

Рис. 2. Специальная вершина.

Полуспециальной называется 3-вершина, инцидентная двум 1-цепям, ведущим в вершины степени от 3 до 8. Согласно замечанию 1 каждая полуспециальная вершина смежна с Δ-вершиной. Полуспециальная вершина называется *специальной*, если она окружена тремя слабыми 6-гранями (рис. 2).

Лемма 2. *Специальная вершина не может быть соединена* 1*-цепями с двумя полуспециальными вершинами.*

Доказательство. Предположим, что специальная вершина v окружена 6-гранями $wv_1'v_1vv_2v_2'$, $zu_1v_1'v_1vv_3$ и $z'u_2v_2'v_2vv_3$, где $d(v_3) = \Delta$ и $d(v_1) = d(v_2) = 2$ (см. рис. 2 с учетом того, что теперь $d(v_1') = d(v_2') = 3$).

Заметим, что $d(w) = \Delta$. Действительно, иначе $d(w) = 2$, т. е. Δ-вершина u_1, смежная с полуспециальной вершиной v_1', сделала бы 6-грань $zu_1v_1'v_1vv_3$ при v сильной; противоречие. Отсюда $d(u_1) = d(u_2) = 2$, и вспомним, что каждая из z, z' имеет степень от 3 до 8.

Удалим ребро u_1z и раскрасим полученный граф. Если вершина v_1' окрашена так же, как z, то поменяем цвета вершин v_1' и v_2'. Если цвета вершин u_1 и

v_3 совпадают, то перекрасим u_1 (она имеет два ограничения на раскраску через 3-вершину v_1' и не более семи — через z). $\square$

2.2. Перераспределение зарядов вершин и граней.

R0. Каждая 2-вершина получает заряд 1 от каждой смежной вершины.

R1. 7^+-грань $f = v_1v_2\dots$ дает (рис. 3):

(a) $\frac{2}{3}$ инцидентной младшей вершине v_3, если $d(v_2) = d(v_4) = 2$, а v_1 и v_5 старшие;

(b) $\frac{1}{3}$ инцидентной младшей вершине v_3, если R1a не применимо к v_3, а $d(v_2) = 2$ и v_4 либо старшая вершина, либо 2-вершина.

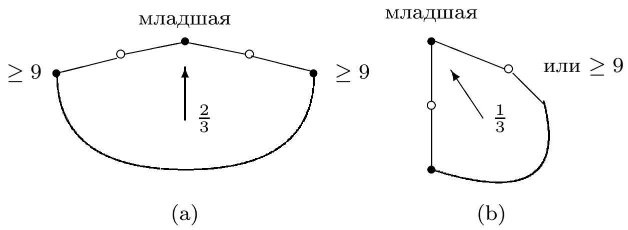

Рис. 3. Передачи от 7^+-грани.

R2. Пусть $f = v_1v_2\dots v_6$ — 6-грань. Тогда (рис. 4):

(a) если $d(v_1) = d(v_5) = \Delta$, $d(v_2) = d(v_4) = 2$, а v_3 младшая, то f сначала получает $\frac{1}{3}$ от каждой из вершин v_1 и v_5 вдоль ребер v_1v_6 и v_5v_6 соответственно, а затем отдает $\frac{2}{3}$ вершине v_3;

(b) если v_1 старшая, $d(v_3) = 2$, v_2 младшая, а одна из вершин v_5 и v_6 старшая, то грань f сначала получает от v_1 вдоль ребра v_1v_6 заряд $\frac{1}{3}$, если $d(v_1) = \Delta$, и $\frac{1}{6}$ в противном случае; затем f дает вершине v_2 заряд $\frac{1}{3}$, если $d(v_1) = \Delta$, и $\frac{1}{6}$ в противном случае.

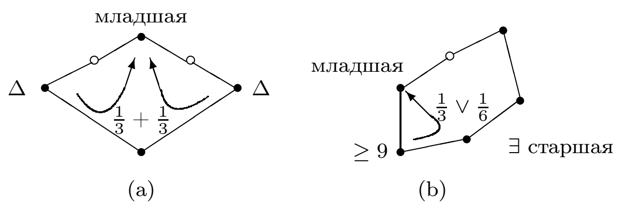

Рис. 4. Передачи от 6-грани.

Трансмиттерами назовем 6-грани, описанные в правиле R2. Через $\xi(vw)$ обозначим суммарный заряд, передаваемый вдоль ребра vw от старшей вершины v инцидентным ему трансмиттерам.

R3. Пусть v — Δ-вершина, инцидентная пути $P = vwx\dots$. Тогда v дает:

(a) вершине x заряд $\frac{2}{3} - \xi(vw)$, если $d(w) = 2$, а $3 \leq d(x) \leq 8$;

(b) вершине w заряд $\frac{5}{3} - \xi(vw)$, если $3 \leq d(w) \leq 8$.

R4. Пусть v — старшая вершина с $d(v) < \Delta$. Тогда v дает:

(a) каждой смежной вершине w степени от 3 до 8 заряд $\frac{3}{2} - \xi(vw)$, если $d(v) \geq 12$, и $\frac{4}{3} - \xi(v, w)$ в противном случае;

(b) другой нестаршей концевой вершине каждой инцидентной 1-цепи заряд $\frac{1}{2}$, если $d(v) \geq 12$, и $\frac{1}{3}$ в противном случае.

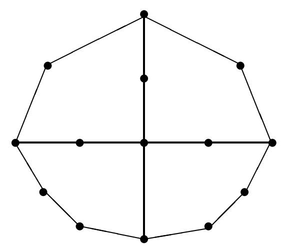

Рис. 5. Полуплохая вершина.

Назовем 4-вершину *полуплохой*, если она окружена четырьмя 6-гранями и инцидентна трем 1-цепям, ведущим в нестаршие вершины (рис. 5). Полуплохая вершина называется *плохой*, если все инцидентные ей грани слабые.

R5. Каждая специальная вершина v получает заряд $\frac{1}{3}$ от неполуспециальной вершины y, соединенной с v через 1-цепь:

(a) если y не является плохой вершиной;

(b) если y — плохая вершина, а другая 1-цепь из v ведет в плохую или полуспециальную вершину.

R6. Каждая 3-вершина v, смежная с 2-вершиной и с вершинами v_1 и v_2 степени от 3 до 8, получает заряд $\frac{1}{6}$ от каждой из вершин v_1 и v_2.

Заметим, что правило R6 корректно: оно не может быть применено к v_1 или v_2 как к v ввиду замечания 1 (иначе ребро vv_1 или vv_2 можно было бы удалить).

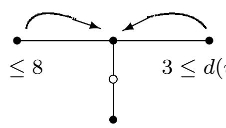

Рис. 6. Передачи в $\frac{1}{6}$ на (1,0,0)-вершину по правилу R6.

R7. Каждая плохая вершина y получает заряд $\frac{1}{6}$ от вершины z степени от 3 до 8, соединенной с y через 1-цепь, если z смежна по меньшей мере с двумя Δ-вершинами.

2.3. Проверка условия $\mu^*(v) \ge 0$ для $v \in V(G)$. Через $v_1, \dots, v_{d(v)}$ обозначим соседние с v вершины в циклическом порядке.

Случай 0. $d(v) = 2$. По лемме 1 вершина v принадлежит 1-цепи, а значит, получает по 1 от соседей согласно правилу R0, откуда $\mu^*(v) \ge 2 \times 2 - 6 + 2 = 0$.

Случай 1. $d(v) = 3$.

Подслучай 1.1. $d(v_i) \ge 3$ при $1 \le i \le 3$. Если v не дает $\frac{1}{6}$ своим соседям по R6, то $\mu^*(v) = \mu(v) = 2 \times 3 - 6 = 0$.

Пусть v дает $\frac{1}{6}$ вершине v_1. Поскольку у v_1 ограничений на раскраску мало, применяя замечание 1 к ребру vv_1, получаем, что $d(v_2) + d(v_3) \ge 17$. Можно считать, что вершина v_2 старшая, а значит, v получает от v_2 не меньше 1 по R3b или R4a, откуда $\mu^*(v) \ge 1 - 2 \times \frac{1}{6} > 0$.

Подслучай 1.2. $d(v_i) \ge 3$ при $1 \le i \le 2$, но $d(v_3) = 2$. Через v_3' обозначим соседнюю с v_3 вершину, отличную от v. Сначала допустим, что v_3' старшая. Заметим, что v получает не меньше $\frac{1}{3}$ от v_3' по R3a или R4b, поскольку $\xi(v_3'v_3) = 0$, дает 1 вершине v_3 по R0 и может отдавать $\frac{1}{6}$ на v_1 и v_2 по R6. Если, скажем, $d(v_1) \ge 9$, то $\mu^*(v) \ge \frac{1}{3} + 1 - 1 - \frac{1}{6} > 0$ по R3b и R4a. Если же ни одна из v_1 и v_2 не старшая, то, применяя замечание 1 к ребру vv_3, видим, что $d(v_3') = \Delta$, поэтому v получает $\frac{2}{3}$ от v_3' по R3a. Ввиду R6 имеем $\mu^*(v) = \frac{2}{3} + 2 \times \frac{1}{6} - 1 = 0$.

Теперь допустим, что v_3' не старшая. Поскольку у v_3 ограничений на раскраску мало, из замечания 1 получаем $d(v_1)+d(v_2)\geq 17$, поэтому можно считать, что v_1 старшая. Ввиду R3b или R4a в сочетании с R5a или R7 остается рассмотреть случай, когда v дает $\frac{1}{6}$ вершине v_2 по R6. Если так, то $d(v_1)\geq 17-3>12$, а значит, v_1 дает вершине v не менее $\frac{3}{2}$ по R4a или R3b. Действительно, передача от v_1 на v по R3b или R4a не уменьшается, поскольку $\xi(v_1v)=0$. (В данном случае v может отдавать либо $\frac{1}{3}$ по R5a, либо $\frac{1}{6}$ по R7, но не одновременно, так как v смежна лишь с одной 2-вершиной.)

Подслучай 1.3. $d(v_1)=d(v_2)=2$, а $d(v_3)\geq 3$. Через v_1' и v_2' обозначим смежные с v_1 и v_2 вершины, отличные от v.

Подслучай 1.3.1. Если $d(v_3)\leq 8$, то $d(v_1')=d(v_2')=\Delta$ по замечанию 1, примененному к ребру vv_1 или vv_2 соответственно. Следовательно, v получает по $\frac{2}{3}$ от каждой из вершин v_1' и v_2' по R3a, поскольку $\xi(v_1'v_1)=\xi(v_2'v_2)=0$. Заметим также, что v получает $\frac{2}{3}$ по R1a или R2a. Остается заметить, что v не может отдавать $\frac{1}{6}$ вершине v_3 по R6 ввиду замечания 1, откуда $\mu^*(v)=-2\times 1+3\times\frac{2}{3}=0$.

Подслучай 1.3.2. Вершина v_3 старшая. Если обе вершины v_1' и v_2' старшие, то v получает не менее $\frac{4}{3}$ по R3b и R4a, так что $\mu^*(v)\geq -2\times 1+\frac{4}{3}+2\times\frac{1}{3}=0$ по R3a или R4b.

Пусть v_1' старшая, а v_2' — нет. Докажем, что v получает в сумме не меньше 2 от v_3 и v_1'. Заметим, что $d(v_3)\geq 12$ по замечанию 1, т. е. v получает не менее $\frac{3}{2}$ от v_3 по R3b или R4a. Если $d(v_1')\geq 12$, то v получает не менее $\frac{1}{2}$ от v_1' по R3a и R4b. Предположим теперь, что $9\leq d(v_1')\leq 11$; тогда $d(v_3)=\Delta$ ввиду замечания 1, а значит, v получает $\frac{5}{3}$ от v_3 по R3b. Кроме того, v_1' дает не менее $\frac{1}{3}$ вершине v по R4b.

Нам уже нечего доказывать, если v не дает $\frac{1}{3}$ вершине v_2' по R5 (поскольку правило R7 не применимо к v). Однако v_2' не может быть специальной, так как 1-цепь vv_2v_2' инцидентна либо 7^+-грани, либо сильной грани.

Пусть теперь ни одна из v_1' и v_2' не является старшей. Ввиду замечания 1, примененного к ребрам vv_1 и vv_2, имеем $d(v_3)=\Delta$, т. е. v полуспециальная. Заметим, что v получает $\frac{5}{3}$ от v_3 по R3b, так что вершине v не хватает лишь $\frac{1}{3}$.

Если v инцидентна 7^+-грани или сильной 6-грани, т. е. v не является специльной, то v получает $\frac{1}{3}$ от такой грани по R1b или R2b, что и требовалось, поскольку v не может передавать $\frac{1}{3}$ специальной вершине по R5.

Остается предположить, что v специальная. По лемме 2 хотя бы одна из вершин v_1' и v_2', пусть v_1', не полуспециальная. Если v_1' еще и не плохая, то v получает $\frac{1}{3}$ от этой вершины по R5a. Предположим, что v_1' плохая. Теперь v получает $\frac{1}{3}$ от v_1' по R5b, если v_2' либо плохая, либо полуспециальная, а иначе $\frac{1}{3}$ от v_2' по R5a.

Подслучай 1.4. $d(v_1)=d(v_2)=d(v_3)=2$. Как и в подслучае 1.3.1, видим, что v получает $\frac{2}{3}$ вдоль каждой инцидентной 1-цепи по R3a. Кроме того, v получает $3\times\frac{2}{3}$ по R1a и R2a, откуда $\mu^*(v)\geq 3\times\frac{2}{3}+3\times\frac{2}{3}-3\times 1>0$.

Случай 2. $4\leq d(v)\leq 5$. Напомним, что v отдает заряд 1 каждой смежной 2-вершине по R0 и также может отдавать вдоль каждой инцидентной 0-цепи или 1-цепи либо $\frac{1}{3}$ по R5, либо $\frac{1}{6}$ по R6 или R7. При разборе вариантов читатель должен помнить, что v, в свою очередь, получает довольно много от старших вершин по правилу R2 в сочетании с R3 и R4. Кроме того, v получает $\frac{1}{6}$ по R7, если v плохая.

Подслучай 2.1. $d(v)=4$. Теперь начальный заряд вершины v равен 2. Если v смежна не более чем с одной 2-вершиной, то $\mu^*(v)\geq 2-1-3\times\frac{1}{6}-\frac{1}{3}>0$.

Без ограничения общности пусть $d(v_1) = d(v_2) = 2$, $d(v_3) \geq 3$ и $d(v_4) \geq 3$. Если, скажем, $d(v_4) \geq 9$, то v_4 отдает вершине v не менее 1 по R3b или R4a, так что $\mu^*(v) \geq 2 - 2 + 1 - 2 \times \frac{1}{3} - \frac{1}{6} > 0$. Пусть $d(v_4) \leq 8$ и $d(v_3) \leq 8$; ввиду замечания 1 обе 1-цепи из v ведут в старшие вершины, поэтому $\mu^*(v) \geq 2 - 2 \times 1 - 2 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{3} > 0$.

Предположим теперь, что $d(v_1) = d(v_2) = d(v_3) = 2$ и $d(v_4) \geq 3$. Если $d(v_4) \leq 8$, то из замечания 1 следует, что каждая 1-цепь из v ведет в старшую вершину, посылающую не меньше $\frac{1}{3}$ вершине v по R4b или R3a, откуда $\mu^*(v) \geq 2 + 3 \times \frac{1}{3} - 3 \times 1 = 0$, поскольку v не отдает $\frac{1}{6}$ вершине v_4 по R6 ввиду замечания 1.

Остается допустить, что v_4 старшая; тогда v получает не менее $\frac{4}{3}$ от v_4 по R4a или R3b. Если хотя бы одна 1-цепь ведет из v в старшую вершину, то v получает не менее $\frac{1}{3}$ от этой вершины и может посылать $2 \times \frac{1}{3}$ вдоль 1-цепей на специальные вершины согласно R5, а значит, $\mu^*(v) \geq 2 + \frac{4}{3} + \frac{1}{3} - 3 \times 1 - 2 \times \frac{1}{3} = 0$.

Пусть, наконец, v соединена тремя 1-цепями с нестаршими вершинами. Заметим, что $d(v_4) \geq 12$, поэтому v получает не менее $\frac{3}{2}$ от v_4 по R3b или R4a. Понятно, что у v имеется не меньше $\frac{1}{2}$ для передачи вдоль 1-цепей на специальные вершины, поэтому будем считать, что таких 1-цепей не менее двух.

Если v инцидентна хотя бы одной 7^+-грани, то $\mu^*(v) \geq 2 + \frac{3}{2} + \frac{1}{3} - 3 \times 1 - 2 \times \frac{1}{3} > 0$ по R1b, поскольку в этом случае v может делать не более двух передач в $\frac{1}{3}$ на специальные вершины.

Итак, пусть v — полуплохая вершина, т. е. окружена 6-гранями. Через v'_i, $1 \leq i \leq 3$, обозначим смежную с v_i вершину, отличную от v.

$(*)$ Если грань $f = v'_1 v_1 v v_4 y x$ инцидентна специальной вершине v'_1, то $d(x) = 2$, так как иначе f была бы сильной.

Возможны два случая.

(A) Вершины v'_1 и v'_3 специальные, т. е. v плохая. Ввиду $(*)$ v'_2 смежна с двумя Δ-вершинами, поэтому v получает $\frac{1}{6}$ по R7, откуда $\mu^*(v) \geq 2 + \frac{3}{2} + \frac{1}{6} - 3 \times 1 - 2 \times \frac{1}{3} = 0$.

(B) Вершины v'_1 и v'_2 специальные. Ясно, что грани $f_1 = v_4 v v_1 \ldots$, $f_2 = v_1 v v_2 \ldots$ и $f_3 = v_2 v v_3 \ldots$ слабые. Согласно $(*)$ v'_3 не является специальной. Если $f_4 = v_3 v v_4 \ldots$ — сильная грань, то v получает не менее $\frac{1}{6}$ от f_4 по R2b, откуда $\mu^*(v) \geq 2 + \frac{3}{2} + \frac{1}{6} - 3 \times 1 - 2 \times \frac{1}{3} = 0$. Остается предположить, что f_4 является слабой гранью, т. е. вершина v плохая, а это означает, что v'_3 не является даже полуспециальной.

Теперь достаточно доказать, что вершина v'_3 не может быть плохой: в этом случае правило R5b не применимо к v и v'_2, стало быть, v отдает $\frac{1}{3}$ лишь вершине v'_1. Предположив противное, видим, что грань при v'_2, отличная от f_2 и f_3, не может быть слабой, поскольку инцидентна Δ-вершине, смежной с v'_1 и v'_2, а с другой стороны, инцидентна старшей вершине, смежной с v'_3; противоречие. Ввиду присутствия не плохой вершины v'_3, вершина v не отдает $\frac{1}{3}$ вершине v'_2 по R5, откуда $\mu^*(v) > 0$.

Наконец, пусть $d(v_1) = d(v_2) = d(v_3) = d(v_4) = 2$. Теперь согласно замечанию 1 каждая 1-цепь из v ведет в вершину степени не менее 12, поэтому $\mu^*(v) \geq 2 + 4 \times \frac{1}{2} - 4 \times 1 = 0$.

Подслучай 2.2. $d(v) = 5$. Теперь $\mu(v) = 4$. Если v смежна не более чем с двумя 2-вершинами, то $\mu^*(v) \geq 4 - 2 \times 1 - 5 \times \frac{1}{3} > 0$.

Предположим, что $d(v_5) \geq 3$ и $d(v_4) \geq 3$, а остальные соседи вершины v имеют степень 2. Если, скажем, $d(v_5) \geq 9$, то $\mu^*(v) \geq 4 - 3 \times 1 + 1 - 4 \times \frac{1}{3} > 0$. Пусть $d(v_5) \leq 8$ и $d(v_4) \leq 8$. Рассмотрения требует лишь случай, когда v отдает не менее $3\times\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$, но тогда все 1-цепи из v ведут в нестаршие вершины. В этом случае каждая 2-вершина при v имеет не более 11 ограничений на раскраску, а v — не более $7+7+3=17$, что противоречит замечанию 1.

Пусть теперь $d(v_5)\geq 3$, а остальные соседи вершины v имеют степень 2. Если v_5 старшая, то $\mu^*(v)\geq 4-4+\frac{4}{3}-4\times\frac{1}{3}=0$. Остается предположить, что $d(v_5)\leq 8$; тогда из замечания 1 следует, что каждая 1-цепь из v ведет в старшую вершину, так что $\mu^*(v)\geq 4-4\times 1+4\times\frac{1}{3}-\frac{1}{6}>0$ по R3a и R4b.

Наконец, если v смежна лишь с 2-вершинами, то $\mu^*(v)\geq 4-5\times 1+5\times\frac{1}{3}>0$.

Случай 3. $6\leq d(v)\leq 8$. Теперь v получает и отдает заряды по тем же правилам, что и в случае 2, не считая того, что v уже ничего не получает по R7.

Если v смежна лишь с 2-вершинами, то каждая 1-цепь из v ведет в старшую вершину, откуда $\mu^*(v)\geq 2d(v)-6-d(v)\times 1\geq 0$. С другой стороны, если у v хотя бы два 3^+-соседа, то $\mu^*(v)\geq 2d(v)-6-(d(v)-2)\times\frac{4}{3}-2\times\frac{1}{6}=\frac{2d(v)-11}{3}>0$.

Пусть, наконец, v смежна в точности с одной 3^+-вершиной v_1. Если v_1 старшая, то $\mu^*(v)\geq 2d(v)-6+1-(d(v)-1)\times\frac{4}{3}=\frac{2d(v)-11}{3}>0$, а иначе каждая 1-цепь из v ведет в старшую вершину согласно замечанию 1, откуда $\mu^*(v)\geq 2d(v)-6-(d(v)-1)\times 1-\frac{1}{6}>0$.

Случай 4. $9\leq d(v)\leq\Delta-1$. Если $d(v)\geq 12$, то v отдает не более $\frac{1}{2}+1$ вдоль каждой инцидентной 1-цепи по R0 в сочетании с R4b и не более $\frac{3}{2}$ вдоль каждого ребра, ведущего в 3^+-вершину по R4a, т. е. $\mu^*(v)=2d(v)-6-d(v)\times\frac{3}{2}=\frac{d(v)-12}{2}\geq 0$. Если же $9\leq d(v)\leq 11$, то $\mu^*(v)=2d(v)-6-d(v)\times\frac{4}{3}=\frac{2(d(v)-9)}{3}\geq 0$.

Случай 5. $d(v)=\Delta$. Теперь v отдает вдоль каждого ребра не более $\frac{5}{3}$ по R0 в сочетании с R3 или R2, поэтому $\mu^*(v)=2d(v)-6-d(v)\times\frac{5}{3}=\frac{d(v)-18}{3}\geq 0$.

2.4. Проверка условия $\mu^*(f)\geq 0$ для $f\in F(G)$. Пусть $r(f)=6$; если f не трансмиттер, то $\mu^*(f)=r(f)-6=0$, а иначе $\mu^*(f)=0$ по R2.

Пусть теперь $r(f)\geq 7$. Для оценки суммарного расхода грани f по R1 распределим передаваемые ею вершине v заряды по инцидентным v ребрам в границе грани f следующим образом: заряд $\frac{2}{3}$ на четыре ближайших к v ребра, а $\frac{1}{3}$ на два инцидентных v ребра.

Заметим, что теперь каждое ребро в границе грани f получает от f не более $\frac{1}{6}$. Если $r(f)\geq 8$, то $\mu^*(f)\geq r(f)-6-r(f)\times\frac{1}{6}=\frac{5r(f)-36}{6}>0$, а если $r(f)=7$, то $\mu^*(f)\geq 1-6\times\frac{1}{6}=0$.

Теорема 1 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hahn G., Kratochvíl J., Širáň J., Sotteau D.* On the injective chromatic number of graphs // Discrete Math. 2002. V. 256, N 1–2. P. 179–192.
2. *Wegner G.* Graphs with given diameter and a coloring problem: Technical report. University of Dortmund, Germany. 1977.
3. *Agnarsson G., Halldorsson M. M.* Coloring powers of planar graphs // SIAM J. Discrete Math. 2003. V. 16, N 4. P. 651–662.
4. *Бородин О. В., Брусма Х., Глебов А. Н., Ван-Ден-Хойвел Я.* Строение плоских триангуляций в терминах пучков и звезд // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2001. Т. 8, № 2. С. 15–39.
5. *Бородин О. В., Брусма Х., Глебов А. Н., Ван-Ден-Хойвел Я.* Минимальная степень и хроматическое число квадрата плоского графа // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2001. Т. 8, № 4. С. 9–33.

6. *Molloy M., Salavatipour M. R.* Frequency channel assignment on planar networks // Algorithms — ESA. 2002. Berlin: Springer, 2002. P. 736–747. (Lect. Notes Comp. Sci.; V. 2461).
7. *Molloy M., Salavatipour M. R.* A bound on the chromatic number of the square of a planar graph // J. Combin. Theory. Ser. B. 2005. V. 94. P. 189–213.
8. *Бородин О. В., Иванова А. О., Неустроева Т. К.* 2-дистанционная раскраска разреженных плоских графов // Сиб. электрон. мат. изв.(http://semr.math.nsc.ru). 2004. № 1. С. 76–90.
9. *Бородин О. В., Глебов А. Н., Иванова А. О., Неустроева Т. К., Ташкинов В. А.* Достаточные условия 2-дистанционной $(\Delta+1)$-раскрашиваемости плоских графов // Сиб. электрон. мат. изв. (http://semr.math.nsc.ru). 2004. Т. 1. С. 129–141.
10. *Иванова А. О.* Предписанная 2-дистанционная $(\Delta+1)$-раскраска плоских графов с обхватом не менее 7 // Дискрет. анализ и исслед. операций. (В печати).
11. *Dvořák Z., Kràl D., Nejedlỳ P., Škrekovski R.* Coloring squares of planar graphs with girth six // European J. Combin. 2008. V. 29, N 4. P. 838–849.
12. *Бородин О. В., Иванова А. О., Неустроева Т. К.* Достаточные условия 2-дистанционной $(\Delta+1)$-раскрашиваемости плоских графов с обхватом 6 // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2005. Т. 12, № 3. С. 32–47.
13. *Бородин О. В., Иванова А. О., Неустроева Т. К.* Достаточные условия минимальной 2-дистанционной раскрашиваемости плоских графов с обхватом 6 // Сиб. электрон. мат. изв. (http://semr.math.nsc.ru). 2006. Т. 3. С. 441–450.
14. *Borodin O. V., Ivanova A. O.* List 2-distance $(\Delta+2)$-coloring of planar graphs with girth six // Europ. J. Combin. 2009. V. 30. P. 1257–1262.
15. *Бородин О. В., Иванова А. О.* Предписанная 2-дистанционная $(\Delta+2)$-раскраска плоских графов с обхватом 6 и $\Delta \geq 24$ // Сиб. мат. журн. 2009. Т. 50, № 6. С. 1216–1224.
16. *Borodin O. V., Ivanova A. O.* 2-Distance $(\Delta+2)$-coloring of planar graphs with girth six and $\Delta \geq 18$ // Discrete Math. 2009. V. 309. P. 6496–6502.
17. *Bu Y., Chen D., Raspaud A., Wang W.* Injective coloring of planar graphs // Discrete Appl. Math. 2009. V. 157, N 4. P. 663–672.
18. *Cranston D. W., Kim S.-J., Yu G.* Injective colorings of sparse graphs / Discrete Math. (Submitted).
19. *Lužar B., Škrekovski R., Tancer M.* Injective colorings of planar graphs with few colors // Discrete Math. (To appear).
20. *Borodin O.V., Ivanova A. O.*. Injective Δ-choosability of planar graphs with given girth / Discrete Math. (Submitted).

Статья поступила 3 февраля 2010 г.

Бородин Олег Вениаминович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
brdnoleg@math.nsc.ru

Иванова Анна Олеговна
Институт математики при Якутском гос. университете,
ул. Кулаковского, 4, Якутск 677891
shmgnanna@mail.ru