*Сибирский математический журнал*
*Январь—февраль, 2011. Том 52, № 1*

*УДК 517.54+517.55*

# ЛОКАЛЬНО БИГОЛОМОРФНЫЕ КОНЕЧНОЛИСТНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЕЙ

**В. В. Старков**

**Аннотация.** Для плоских счетносвязных областей дано решение проблемы существования локально биголоморфного конечнолистного отображения ограниченной области на круг. Получены достаточные условия существования соответствующего отображения в многомерном случае.

**Ключевые слова:** локально биголоморфное отображение, многолистное отображение, комплексное многообразие.

## 1. Введение

Изучая биголоморфные отображения в $\mathbb{C}^n$ $(n \geq 1)$, мы встречаемся с существенными отличиями от одномерного случая. Так, например, открытый поликруг $\Delta^n$ невозможно [1] (см. также [2, гл. I, § 4, 10]) биголоморфно отобразить на открытый евклидов шар $\mathbb{B}^n$. Однако многие из такого рода трудностей многомерного случая отступают, если вместо биголоморфных отображений рассматривать локально биголоморфные. Например, Форнаэсс и Стаут [3] доказали, что для любого $n$-мерного связного паракомпактного комплексного многообразия $Y$ существует локально биголоморфное $m$-листное $(m \leq 2 + (2n+1)4^n)$ отображение $f$ поликруга $\Delta^n$ на $Y$, а следовательно, и на шар $\mathbb{B}^n$. Здесь и далее *$m$-листность*, $m \in \mathbb{N}$, отображения $f$ из $X$ на $Y$ означает, что для каждого $y \in Y$ прообраз $\{f^{-1}(y)\}$ состоит из не более чем $m$ элементов.

В 2003 г. Лигоцки [4] удалось заменить в теореме Форнаэсса — Стаута поликруг $\Delta^n$ декартовым произведением $D_1 \times \dots \times D_n$ многосвязных областей, внешность каждой из которых имеет невырожденную изолированную компоненту. Ценой такого обобщения, естественно, было ухудшение оценки листности локально биголоморфного отображения: $m \leq (24)^n[2 + (2n+1)4^n]$. Этот результат Лигоцки следует из ее теоремы о том, что любую область $D \subset \mathbb{C}$, для которой $\overline{\mathbb{C}} \setminus D$ содержит изолированную компоненту, отличную от точки, можно локально биголоморфно и 24-листно отобразить на открытый единичный круг $\Delta = \{z : |z| < 1\}$. Эта константа листности $m = 24$ сначала была уменьшена до $m = 5$ [5], затем до $m = 4$ [6], причем это было сделано для более широкого, чем в работе Лигоцки, класса областей — для областей с изолированным граничным фрагментом I или II рода.

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 08–01–00648–а).

Определение [5]. Пусть $D$ — область в $\mathbb{C}$. Будем говорить, что $D$ *имеет изолированный граничный фрагмент*, если выполнено по крайней мере одно из следующих трех условий:

(I) существуют невырожденный континуум (т. е. связное замкнутое множество, отличное от точки) $K \subset \partial D$ и открытое множество $\mathscr{U}$, для которых $K \subset \mathscr{U}$ и $(\partial D \setminus K) \cap \mathscr{U} = \varnothing$; в этом случае будем говорить, что область $D$ имеет *изолированный граничный фрагмент* I *рода*;

(II) существуют кривая Жордана $\Gamma \subset \partial D$ с концами $\xi$, $\eta$ и открытый круг $B$, для которых $\Gamma \setminus \{\xi, \eta\} \subset B$, $\xi, \eta \in \partial B$ и $(\partial D \setminus \Gamma) \cap B = \varnothing$; при этом назовем $D$ *областью с изолированным граничным фрагментом* II *рода*;

(III) область $D$ имеет изолированную граничную точку.

В [7] также доказано, что при локально биголоморфных отображениях многосвязной области с изолированным граничным фрагментом I или II рода на круг константа листности не может быть меньше 3. Заметим, что в данном определении и далее в тексте рассматриваются области $D$ любой связности, в том числе бесконечносвязные. В частности, конечносвязные области, имеющие неизолированные граничные точки, являются частным случаем областей с изолированным граничным фрагментом I рода.

Естественно встает вопрос: любые ли области $D \subset \mathbb{C}$ допускают локально биголоморфное конечнолистное отображение на круг? Вопрос важен для дальнейшего продвижения в обобщении цитированного результата Форнаэсса — Стаута с поликруга $\Delta^n$ на более широкий класс областей. Теоремы Лиувилля и Пикара дают отрицательный ответ на этот вопрос для неограниченных областей $D$, граница которых состоит из вырожденных (в точку) изолированных граничных континуумов. Если же область имеет невырожденную граничную компоненту, то по теореме Римана ее можно биголоморфно отобразить на ограниченную область. Лигоцка в [4] поставила проблему: *всякую ли ограниченную плоскую область можно конечнолистно и локально биголоморфно отобразить на круг?*

Положительное решение этой проблемы для конечносвязных ограниченных областей и для бесконечносвязных областей с изолированным граничным фрагментом I или II рода вытекает из цитированных выше результатов. Здесь будет дан положительный ответ на поставленный вопрос для счетносвязных областей.

Дадим необходимые определения. Под *континуумом*, как обычно, будем понимать связное замкнутое и отличное от точки подмножество расширенной плоскости. *Компонентой границы* области $D$ называется каждый (в том числе вырожденный в точку) континуум $K \subset \partial D$, обладающий тем свойством, что любой континуум $K' \subset \partial D$ такой, что $K' \supset K$, совпадает с $K$.

Определение 1. Область $D$ называется *счетносвязной*, если ее граница $\partial D$ является объединением счетного множества компонент. Если же $\partial D$ невозможно представить в виде не более чем счетного множества попарно не пересекающихся вырожденных и невырожденных континуумов, то область $D$ называется *несчетносвязной*.

Для доказательства основного результата (см. доказательство теоремы 1) необходима уверенность в сохранении характера связности (счетносвязности) области при ее биголоморфных преобразованиях, и здесь нам понадобится следующий результат Керекьярто (1923 г.), изложенный в [8] и переформулированный ниже в виде теоремы А.

Сначала заметим, что каждая компонента границы области $D$ определяет «граничный элемент» области $D$ (в терминологии С. Стоилова [8, гл. 4, II]) и, более того, имеется взаимно однозначное соответствие между множеством компонент связности границы $\partial D$ и множеством ее «граничных элементов». Мощность же множества «граничных элементов» является инвариантом при гомеоморфизмах области [8, гл. 4, II]. Поэтому справедлива

**Теорема A.** *Мощность множества граничных компонент области является инвариантом при гомеоморфизмах области.*

## 2. Решение проблемы Лигоцки для счетносвязных областей

**Теорема 1.** *Любую ограниченную счетносвязную область можно локально биголоморфно и 16-листно отобразить на круг.*

Доказательство. Поскольку данная область $D$ ограничена, ее можно (см. [9]) биголоморфно отобразить на круг $\Delta$ с разрезами по дугам концентрических окружностей с центром в 0. Этот круг с разрезами обозначим через $D_0$. Сначала рассмотрим случай, когда среди разрезов области $D_0$ по крайней мере один невырожденный (т. е. отличный от точки). Пусть $a$ и $b$ — концы этого разреза; не умаляя общности, можно считать, что $a \in (0,1)$. Тогда отображение $w = \frac{1}{z-a}$ биголоморфно переводит область $D_0$ на область $D_1$, представляющую собой внешность круга $B_0$ с диаметром $\left[-\frac{1}{1+a}, \frac{1}{1-a}\right]$, разрезанную по дугам окружностей $\{\Gamma_n'\}$, $\{\Gamma_n''\}$ и по фрагментам прямой $l = \left\{\left(-\frac{1}{2a}, y\right) : y \in \mathbb{R}\right\}$, одним из которых является вертикальный луч $l_0$. При этом окружности семейства $\{\Gamma_n'\}$ лежат слева от $l$ и их внутренности содержат точку $w = -\frac{1}{a}$, а окружности семейства $\{\Gamma_n''\}$ — справа от $l$ и их внутренности содержат круг $B_0$. Повернем область $D_1$ на угол $\pi/2$ с последующим растяжением и сдвигом так, чтобы разрез $l_0$ области $D_1$ перешел в разрез $[-1, +\infty)$, а точка $w = -\frac{1}{a}$ — в точку $\zeta_0$, не лежащую на мнимой оси. Образы семейств окружностей $\{\Gamma_n'\}$ и $\{\Gamma_n''\}$ при этом линейном отображении обозначим через $\{\Gamma_n^+\}$ и $\{\Gamma_n^-\}$, причем через $\{\Gamma_n^+\}$ обозначаем окружности, лежащие в верхней полуплоскости, а через $\{\Gamma_n^-\}$ — в нижней. Заметим, что окружности семейств $\{\Gamma_n^+\}$ и $\{\Gamma_n^-\}$ симметричны относительно вертикали $\{z : \operatorname{Re} z = \operatorname{Re} \zeta_0\}$, отличной от мнимой оси. Обозначим $D_2 = F(D_1)$.

Одна из ветвей функции $w = \phi(z)$, обратной к функции Жуковского, опять же биголоморфно отображает $D_2$ на круг $\Delta$ с разрезами по отрезку $[0,1]$ и по дугам кривых $\{\gamma_n^+\}$ и $\{\gamma_n^-\}$:

$$\{\gamma_n^-\} = \phi(\{\Gamma_n^+\}), \quad \{\gamma_n^+\} = \phi(\{\Gamma_n^-\}).$$

Кроме того, в области $D_3 = \phi(D_2)$ еще возможны разрезы на интервале $(-1, 0)$.

Обозначим через $D_4$ образ области $D_3$ при 2-листном локально биголоморфном отображении $z^2$. Тогда $D_4$ — круг с не более чем счетным множеством разрезов. Покажем, что эти разрезы, за исключением, может быть, лежащих на разрезе $[0,1)$, представляют собой вырожденные континуумы (точки).

Из однолистности $z^2$ в верхней и нижней полуплоскостях вытекает, что если такой разрез $\lambda$, не лежащий на вещественной оси, существует и $t \in \lambda$, то $t = w_1^2 = w_2^2$ и $w_1 \in \gamma_k^-$, $w_2 \in \gamma_j^+$ для некоторых $k, j \in \mathbb{N}$. Поэтому $w_2 = -w_1 \Longleftrightarrow z_2 = -z_1$, где $z_2 = \phi^{-1}(w_2) \in \Gamma_j^-$, $z_1 = \phi^{-1}(w_1) \in \Gamma_k^+$. Но при фиксированных $j, k \in \mathbb{N}$ уравнение

$$z_2 = -z_1, \quad z_2 \in \Gamma_j^-, \quad z_1 \in \Gamma_k^+, \tag{1}$$

имеет не более двух корней. Следовательно, множество точек $t \in \lambda$ счетно. Таким образом, компонентами границы области $D_4$ кроме окружности $\partial\Delta$ и, возможно, разрезов вещественной оси могут быть точки $\{t_k\}$ из не более чем счетного множества.

Если на $\partial\Delta$ существует дуга, свободная от предельных точек множества $\{t_k\}$, то $D_4$ — область с изолированным граничным фрагментом II рода и ее можно локально биголоморфно и 4-листно отобразить на $\Delta$. Если же область $D_4$ не имеет изолированного граничного фрагмента II рода, то воспользуемся биголоморфным отображением $\psi : \Delta \to (\Delta \setminus [0, 1))$, вещественным на вещественной оси. Обозначим $D_5 = \psi(D_4)$. Тогда $D_5 = \Delta \setminus ([0, 1) \cup \{z_n\}_{n=1}^{\infty} \cup L)$, где $z_n \in \Delta$, $n \in \mathbb{N}$, $L$ — разрезы области $D_5$, $L \subset (-1, 0)$ ($L$ может быть и пустым).

Обозначим через $D_6$ образ области $D_5$ при локально биголоморфном и 2-листном в $D_5$ отображении $w = z^{1+\delta}$, где $\delta$ — фиксированное число из $(0, 1)$. Покажем, что существует $\delta \in (0, 1)$, при котором область $D_6$ имеет изолированный граничный фрагмент II рода.

Обозначим $\pi\theta_n = \arg z_n$, $n \in \mathbb{N}$. Если область $D_6$ имеет граничные точки (кроме точек единичной окружности) в секторе $\{z \in \Delta : 0 < \arg z < 2\pi\delta\}$, то существуют такие $z_k, z_j \in \partial D_5$, $z_k \neq z_j$, что

$$z_k^{1+\delta} = z_j^{1+\delta} \Longrightarrow \pi\theta_k(1+\delta) = \pi\theta_j(1+\delta) + 2\pi \Longleftrightarrow 1+\delta = \frac{2}{\theta_k - \theta_j}. \qquad (2)$$

Поскольку правая часть (2) принимает счетное множество значений, а левая — несчетное, существует $\delta_0 \in (0, 1)$, при котором равенство (2) не выполнено для любых $k, j \in \mathbb{N}$. Поэтому дуга окружности $\{w = e^{i\eta} : \eta \in (0, 2\pi\delta_0)\}$ является изолированным граничным фрагментом II рода области $D_6$, полученной из $D_5$ преобразованием $z^{1+\delta_0}$.

Остается построить 4-листное локально биголоморфное отображение области $D_6$ на $\Delta$, существование которого доказано в [6] (см. введение). Взяв суперпозицию всех построенных отображений, получим локально биголоморфное 16-листное отображение исходной области $D$ на $\Delta$.

Замечание. Из доказательства теоремы 2 будет вытекать, что область $D_6$ в доказательстве теоремы 1 можно локально биголоморфно и 3-листно отобразить на $\Delta$. Поэтому константа 16 из условий теоремы 1 может быть заменена на 12.

**Следствие 1.** *Если плоские ограниченные области $D_1, \ldots, D_n$ конечно- или счетносвязны, то существует локально биголоморфное $12^n$-листное отображение поликруговой области $D = D_1 \times \cdots \times D_n$ на $\Delta^n$.*

## 3. Многомерный случай

В работах [4–7] из результатов, полученных в одномерном случае, приводятся следствия для областей из $\mathbb{C}^n$, подобные сформулированному выше. В них, как и в следствии 1, не удавалось выйти за пределы рассмотрения поликруговых областей $D \subset \mathbb{C}^n$. Далее будет выделен класс *допустимых* областей $D \subset \mathbb{C}^n$, которые можно локально биголоморфно и конечнолистно отобразить на $\Delta^n$ (или $\mathbb{C}^n$).

Определение 2. Пусть $D \subset \mathbb{C}^n$, $D_k$ $(k = 1, \ldots, n)$ — проекции $D$ на координатные плоскости. Область $D$ называется *допустимой*, если

1) для любого $k = 1, \dots, n$ существуют односвязные подобласти $\widetilde{D}_k \subset D_k$ такие, что $(\partial\widetilde{D}_k \cap \partial D_k) \supset \gamma_k$, где $\gamma_k$ — связные континуумы, каждый из которых содержит более одной достижимой граничной точки области $\widetilde{D}_k$;

2) $\widetilde{D}_1 \times \dots \times \widetilde{D}_n \subset D$.

Каждая ограниченная поликруговая область допустима. Обратное, конечно, неверно.

**Теорема 2.** *Каждую допустимую область $D \subset \mathbb{C}^n$ можно локально биголоморфно и $3^n$-листно отобразить на $\Delta^n$.*

Доказательство. Для каждого $k = 1, \dots, n$ построим локально биголоморфное 3-листное отображение $f_k$ области $D_k$ на $\Delta$, при котором $f_k(\widetilde{D}_k) = \Delta$ (здесь использованы обозначения определения 2). Тогда из условия 2 определения 2 вытекает, что $F = (f_1(z_1), \dots, f_n(z_n))$ локально биголоморфно и $3^n$-листно отображает $D$ на $\Delta^n$. Идеи построения отображений $f_k$ во многом заимствованы из моих совместных с Личберски работ. Таким образом, доказательство теоремы 2 сводится к следующей одномерной задаче: *пусть $\widetilde{B}$ — односвязная подобласть области $B \subset \mathbb{C}$, $\gamma \subset \partial B \cap \partial\widetilde{B}$ — связный континуум и $a, b \in \gamma$ — достижимые граничные точки области $\widetilde{B}$. Тогда существует такое локально биголоморфное и 3-листное отображение $F$ области $B$ на $\Delta$, что $F(\widetilde{B}) = \Delta$.*

Обозначим через $K$ граничную компоненту области $B$, содержащую континуум $\gamma$. Тогда [10, гл. 4, § 3] $K$ разбивает $\overline{\mathbb{C}}$ на области, односвязные вследствие связности $K$. Выберем из них такую односвязную область $G$, что $B \subset G$. Тогда $\partial B \subset \overline{G}$, следовательно, $K \subset \partial G$, поскольку $K \cap G = \varnothing$, а значит, $K = \partial G$. Поэтому $\gamma \subset \partial G$. Тогда $a$ и $b$ — достижимые граничные точки области $G$.

По теореме Римана существует биголоморфное отображение $\Phi$ области $G$ на $\Delta$. Обозначим

$$B_1 = \Phi(B) \subset \Delta, \quad \widetilde{B}_1 = \Phi(\widetilde{B}) \subset B_1.$$

Из свойств достижимых граничных точек (см. [11, гл. II, § 3]) следует, что отображение $\Phi$ непрерывно продолжается на эти граничные точки; обозначим $\alpha = \Phi(a)$, $\beta = \Phi(b)$, тогда $\alpha, \beta \in \partial\Delta$, $\alpha \neq \beta$. Так как $a$ и $b$ — достижимые граничные точки односвязной области $\widetilde{B}$, существует открытая простая кривая $\Gamma \subset \widetilde{B}$ с концами $a$ и $b$. Тогда $L = \Phi(\Gamma) \subset \widetilde{B}_1$ — открытая простая кривая с концами $\alpha$ и $\beta$. Обозначим через $Q$ односвязную подобласть $\widetilde{B}$, ограниченную кривой $\Gamma$ и континуумом $\gamma_1 \subset \gamma$, соединяющим $a$ и $b$. Поскольку $\partial\Phi(G) = \partial\Delta$, то $Q_1 = \Phi(Q)$ — односвязная подобласть $\Delta$, ограниченная кривой $L$ и дугой окружности $\partial\Delta$, соединяющей $\alpha$ и $\beta$. Поэтому на окружности $\partial\Delta$ существуют точка $C \in \partial Q_1$ и ее круговая окрестность $U_C$ такие, что $(U_C \cap \Delta) \subset Q_1$. Но $Q_1 \subset \widetilde{B}_1$, следовательно, $(U_C \cap \Delta) \subset \widetilde{B}_1 \subset B_1$. Не умаляя общности, можно считать, что $C = -1$.

Обозначим $\Pi^+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$, и пусть $\Pi^+_*$ — односвязная область, полученная из $\Pi^+$ удалением двух вертикальных промежутков $\left(-\sqrt[4]{3/4}, \sqrt[4]{3}e^{i\frac{3}{4}\pi}\right]$, $\left(\sqrt[4]{3/4}, \sqrt[4]{3}e^{i\frac{\pi}{4}}\right]$.

Обозначим через $\Psi$ биголоморфное отображение области $\Pi^+_*$ на $\Delta$, и пусть $E = \Psi(B^+)$, где $B^+ = \left\{z \in \Pi^+ : |z| < \frac{1}{2}\right\}$. Отображение $\Psi$ продолжимо до гомеоморфизма из $\Pi^+_* \cup \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ на $\Delta \cup S$, где $S$ — дуга окружности (см. [11, гл. II, § 3]). Продолженное таким образом отображение также обозначим через $\Psi$. Можно считать, что точка $\zeta = 1$ лежит на дуге $S = \Psi\left(\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right)$, иначе применим преобразование поворота.

Найдется открытая круговая окрестность $U_1$ точки $\zeta = 1$ такая, что $U_1 \cap \Delta \subset E$. Для рассматриваемых круговых окрестностей $U_1$ и $U_{-1}$ отображение

$$\Theta(z) = \frac{z+a}{1+az}, \quad z \in \Delta,$$

с параметром $a \in (-1,1)$, достаточно близким к 1, переводит область $\Delta \setminus \overline{U}_{-1}$ в область $\Delta \cap U_1$. Следовательно, суперпозиция $\Psi^{-1} \circ \Theta \circ \Phi$ рассмотренных отображений преобразует область $B$ биголоморфно на такую область $B_2 \subset \Pi^+_*$, что

$$\partial B_2 \setminus \partial \Pi^+_* \subset B^+. \tag{3}$$

При этом подобласть $\widetilde{B} \subset B$ отобразится на $\Pi^+_*$ за вычетом некоторого подмножества, лежащего в $B^+$.

Теперь рассмотрим функцию

$$f(z) = \frac{z^3 - 3z}{z^2 - 1}.$$

В [5] показано, что это отображение 3-листно в $\Pi^+$ и $f(\Omega) = \Pi^+$, где

$$\Omega = \{z \in \Pi^+ : |z| > \sqrt[4]{3}\} \cup \{\sqrt[4]{3}e^{it} : t \in (0, \pi/4) \cup (3\pi/4, \pi)\}.$$

Из условия (3) вытекает, что $\Omega \subset B_2$. Поскольку $f'(z) = 0$ в $\Pi^+$ только в точках $z = \sqrt[4]{3}e^{i\frac{\pi}{4}}$ и $z = \sqrt[4]{3}e^{i\frac{3}{4}\pi}$, отображение $f$ локально биголоморфно в $B_2$.

Следовательно, $F = f \circ \Psi^{-1} \circ \Theta \circ \Phi$ отображает область $B$ и ее подобласть $\widetilde{B}$ на полуплоскость $\Pi^+$ ($F(\widetilde{B}) = \Pi^+$) локально биголоморфно и 3-листно. Теперь осталось биголоморфно отобразить $\Pi^+$ на круг $\Delta$.

Теорема 2 доказана.

Пример. Если $D_0 \subset \Delta^n$ — область, $a$ — точка на остове $\Delta^n$ и существует такая окрестность $U_a$ точки $a$, что $U_a \cap D_0 = U_a \cap \Delta^n$, то $D_0$ допустимая. Поэтому (теорема 2) существует $3^n$-листное локально биголоморфное отображение области $D_0$ на $\Delta^n$.

**Следствие 2.** *Если $D$ — допустимая область из $\mathbb{C}^n$, $X$ — связное паракомпактное $n$-мерное комплексное многообразие, то существует локально биголоморфное $m$-листное, $m \leq 3^n[(2n+1)4^n + 2]$, отображение области $D$ на $X$.*

**Теорема 3.** *Каждую допустимую область $D \subset \mathbb{C}^n$ можно локально биголоморфно и $3^n$-листно отобразить на $\mathbb{C}^n$.*

Доказательство. Как и в доказательстве теоремы 2, достаточно построить локально биголоморфные 3-листные отображения $f_k$ областей $D_k$ из определения 2 на $\mathbb{C}$, при которых $f_k(\widetilde{D}_k) = \mathbb{C}$. Тогда отображение $F = (f_1, \ldots, f_n)$ искомое.

Как и в доказательстве теоремы 2, биголоморфно отобразим область $D_k$ ($k$ фиксировано) на область $B_1 \subset \Delta$ так, что $U_{-1} \cap \Delta = U_{-1} \cap B_1$, $U_{-1} \cap \Delta \subset \widetilde{B}_1$ (обозначения из доказательства теоремы 2). Поэтому существует дробно-линейное отображение $\phi$ круга $\Delta$ на верхнюю полуплоскость $\Pi^+$, при котором область $B_1$ перейдет в $B_2' \subset \Pi^+$ так, что $\widetilde{B}_2' = \phi(\widetilde{B}_1) \supset \{z \in \Pi^+ : |z| > 1\}$ и $\partial B_2' \setminus \mathbb{R} \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. В [5] (теорема 1, п. 2 доказательства) показано, что такую область $B_2'$ можно 3-листно и локально биголоморфно отобразить на $\mathbb{C}$ и при этом отображении образом области $\{z \in \Pi^+ : |z| > 1\}$ будет все $\mathbb{C}$. Это доказывает теорему 3.

Следующая теорема 4 подобно теореме 3 выделяет класс многосвязных областей в $\mathbb{C}^n$, допускающих локально биголоморфное конечнолистное отображение на $\mathbb{C}^n$.

Пусть $D \subset \mathbb{C}^n$ — область. Точка $a$ называется *опорной* точкой области $D$, если существует опорная гиперплоскость $\{z \in \mathbb{C}^n : \operatorname{Re}\langle a - z, b\rangle = 0\}$ с внешней нормалью $b \in \mathbb{C}^n$ такая, что $\operatorname{Re}\langle a - z, b\rangle > 0$ для любого $z \in D$.

**Теорема 4.** *Пусть $a$ — опорная точка ограниченной области $D$, $b$ — внешняя нормаль к соответствующей опорной гиперплоскости, причем на этой гиперплоскости нет других опорных точек области $D$, кроме $a$. Если при фиксированных $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ и $r \in (0,1)$ существует угловая подобласть*

$$U = \{z \in \mathbb{C}^n : \|z - a\| < r,\ |\arg\langle a - z, b\rangle| < \alpha\} \subset D,$$

*то $D$ допускает конечнолистное локально биголоморфное отображение на $\mathbb{C}^n$.*

Доказательство. Можем считать, что $\|b\| = 1$. Преобразованиями сдвига и поворота с помощью унитарной матрицы переведем область $D$, ее подобласть $U$ и опорную гиперплоскость в точке $a$ в их образы (сохранив обозначения) так, что $a = b = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. Таким образом, область $D$ лежит в полупространстве

$$\Pi = \{z \in \mathbb{C}^n : \operatorname{Re}\langle z, a\rangle < 1\}.$$

Фиксируем $A \in \left(1 - \frac{r\cos\alpha}{\sqrt{n}}, 1\right)$. Отображение $w(z) = \frac{z - Aa}{1 - \langle z, a\rangle}$ биголоморфно в $\Pi$, так как для $z' = (z'_1, \ldots, z'_n)$, $z'' = (z''_1, \ldots, z''_n) \in \Pi$ из $w(z') = w(z'')$ вытекает

$$\frac{z''_k - A/\sqrt{n}}{z'_k - A/\sqrt{n}} = \frac{1 - \langle z'', a\rangle}{1 - \langle z', a\rangle} = \lambda \quad \forall k = 1, \ldots, n\ (\lambda \in \mathbb{C}).$$

Тогда $z'' - Aa = \lambda(z' - Aa)$, т. е. $z'' = \lambda z' + (1 - \lambda)Aa$. Отсюда и из равенства $1 - \langle z'', a\rangle = \lambda(1 - \langle z', a\rangle)$ получаем $\lambda = 1$, следовательно, $z'' = z'$.

Обозначим $D' = w(D)$, $U' = w(U)$. Покажем, что при некотором $R > 0$

$$W_R = \{w = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{C}^n : |w_k| > R,\ |\arg w_k| \le \alpha\ \forall k = 1, \ldots, n\} \subset U'. \quad (4)$$

Пусть $w^0 = \left(w^0_1, \ldots, w^0_n\right) \in W_R$. Поскольку обратным к отображению $w(z)$ будет $z(w) = Aa + w\frac{1 - A}{1 + \langle w, a\rangle}$, достаточно проверить, что $z^0 = z(w^0) \in U$, т. е.

$$|\arg(1 - \langle z^0, a\rangle)| < \alpha \quad (5)$$

и $\|z^0 - a\| < r$. Так как $w^0 \in W_R$, то $|\arg\langle w^0, a\rangle| \le \alpha$. Поэтому

$$|\arg(1 - \langle z^0, a\rangle)| = \left|\arg\left(1 - A - \frac{(1 - A)\langle w^0, a\rangle}{1 + \langle w^0, a\rangle}\right)\right| = \left|\arg\frac{1}{1 + \langle w^0, a\rangle}\right| < \alpha.$$

Следовательно, (5) выполнено. Поскольку $\operatorname{Re}\frac{1}{1 + \langle w^0, a\rangle} = o(1)$ для $w^0 \in W_R$ при $R \to \infty$, то

$$\|z^0 - a\| = (1 - A)\left\|\frac{w^0}{1 + \langle w^0, a\rangle} - a\right\| = (1 - A)\sqrt{\frac{\|w^0\|^2}{|1 + \langle w^0, a\rangle|^2} - 1 + o(1)}.$$

Обозначив $w_k^0 = R_k e^{i\phi_k}$ $(R_k > R,\ |\phi_k| \le \alpha\ \ \forall k = 1, \dots, n)$, заметим, что

$$\frac{\|w^0\|^2}{|1+\langle w^0, a\rangle|^2} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} R_k^2}{\left(1+\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{R_k\cos\phi_k}{\sqrt{n}}\right)^2 + \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{R_k\sin\phi_k}{\sqrt{n}}\right)^2}$$

$$\le \frac{n\sum\limits_{k=1}^{n} R_k^2}{\cos^2\alpha\left(\sum\limits_{k=1}^{n} R_k\right)^2} \le \frac{n}{\cos^2\alpha}.$$

Поэтому

$$\|z^0 - a\| \le (1-A)\sqrt{\frac{n}{\cos^2\alpha} - 1 + o(1)} < \frac{(1-A)\sqrt{n}}{\cos\alpha} < r$$

при достаточно больших $R$. Тем самым доказано включение (4).

Обозначим через $D_k$ проекцию области $D'$ на $k$-ю координатную плоскость. Покажем, что для любого $k = 1, \dots, n$ существует такое $x_0 < 0$, что $D_k \cap (-\infty, x_0] = \varnothing$. Предположим, это не так, например, при $k = 1$. Тогда существует такая последовательность отрицательных чисел $x_m \to -\infty$, что для любого $m \in \mathbb{N}$ уравнение

$$z_1 - \frac{A}{\sqrt{n}} = x_m(1 - \langle z, a\rangle)$$

имеет решение $z^{(m)} \in D$. Из ограниченности $D$ имеем $(1 - \langle z^{(m)}, a\rangle) \to 0$ при $m \to \infty$. Поэтому из последовательности $\{z^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность (обозначим ее так же)

$$z^{(m)} = \left(z_1^{(m)}, \dots, z_n^{(m)}\right) \to z^* = \left(z_1^*, \dots, z_n^*\right) \in \partial\Pi \cap \partial D.$$

В силу единственности опорной точки на гиперплоскости вытекает, что $z^* = a$, следовательно, $\operatorname{Re}\left(z_1^{(m)} - \frac{A}{\sqrt{n}}\right) > 0$ при достаточно больших $m$. Однако $\operatorname{Re}(x_m(1 - \langle z^{(m)}, a\rangle)) < 0$; противоречие.

Поскольку $W_R \subset D' \subset D_1 \times \dots \times D_n$, задача построения искомого отображения сводится к построению конечнолистного локально биголоморфного отображения $F(t)$, $t \in \mathbb{C}$, области $D_k$, $k = 1, \dots, n$, на $\mathbb{C}$, при котором $F(V(R,\alpha)) = \mathbb{C}$; здесь и далее принято обозначение

$$V(R,\alpha) = \{t \in \mathbb{C} : |t| \ge R,\ |\arg t| \le \alpha\}.$$

Для этого сначала применим к $D_k$ однолистное отображение $\omega(t) = \frac{\sqrt{t - x_0}}{M}$, $M$ — фиксированное положительное число. Это отображение переводит $D_k$ в область $\Omega_k$, лежащую в правой полуплоскости, причем $\omega(V(R,\alpha)) \supset V\left(\frac{\sqrt{R-x_0}}{M}, \alpha_1\right)$, здесь угол $\alpha_1 \in (0, \alpha/2)$ зависит от $R$, $x_0$, $\alpha$ и не зависит от $M$, что будет использовано впоследствии. Заметим, что область $\Omega_k'$, полученная из $\Omega_k$ преобразованием сдвига $\xi = \omega + \epsilon$, $\epsilon > 0$, будет содержать $V\left(\epsilon + \frac{\sqrt{R-x_0}}{M}, \alpha_2\right)$, где $\alpha_2 \in (0, \alpha_1)$, $\alpha_2 \to \alpha_1$ при $\epsilon \to +0$. Поэтому для фиксированного $\delta \in (0, \alpha_1)$ можно подобрать $\epsilon$ столь близким к 0, что $\alpha_2 \in (\alpha_1 - \delta, \alpha_1)$. Для таких $\epsilon$ и

$\delta$ однолистное отображение $\zeta(\omega) = \frac{2\pi}{\alpha_1-\delta}\log(\omega+\epsilon)$, $\log 1 = 0$, переводит $\Omega_k$ в область $G_k$, лежащую в полуполосе

$$\mathscr{P} = \left\{\zeta \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}\zeta \in \left(-\frac{\pi^2}{\alpha_1-\delta}, \frac{\pi^2}{\alpha_1-\delta}\right),\ \operatorname{Re}\zeta > x_1 = \frac{2\pi}{\alpha_1-\delta}\log\epsilon\right\}$$

и содержащую полуполосу

$$P = \left\{\zeta \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}\zeta \in [-2\pi, 2\pi],\ \operatorname{Re}\zeta \geq x_2 = \frac{2\pi}{\alpha_1-\delta}\log\left(\epsilon + \frac{\sqrt{R-x_0}}{M}\right)\right\}.$$

При этом

$$0 < x_2 - x_1 = \frac{2\pi}{\alpha_1-\delta}\log\left(1 + \frac{\sqrt{R-x_0}}{M\epsilon}\right) < 1, \tag{6}$$

если $M$ достаточно велико.

Обозначим через $\mathscr{P}_*$ и $P_*$ полуполосы, полученные в результате преобразования сдвига $Z = \zeta - x_2$ из $\mathscr{P}$ и $P$ соответственно.

Покажем, что при условии (6) отображение $W(Z) = (Z^2+\pi^2)\exp Z$ локально биголоморфно и конечнолистно в $\mathscr{P}_*$ и $W(P_*) = \mathbb{C}$.

Действительно,

$$W'(Z) = (Z^2 + \pi^2 + 2Z)\exp Z = 0$$

при $Z_{1,2} = -1 \pm i\sqrt{\pi^2-1} \notin \mathscr{P}_*$; следовательно, $W(Z)$ локально биголоморфно в $\mathscr{P}_*$. Покажем, что $W(P_*) = \mathbb{C}$. Для этого найдем образ прямоугольника

$$P_+^\rho = \{Z = X + iY : 0 \leq X \leq \rho,\ 0 \leq Y \leq 2\pi\}, \quad \rho > 3,$$

при отображении $W(Z)$. Заметим, что отрезок $[0,\rho]$ взаимно однозначно перейдет в отрезок $[\pi^2, (\rho^2+\pi^2)e^\rho]$. При изменении $Y$ от 0 до $2\pi$ функции $|W(\rho+iY)|$ и $\arg W(\rho+iY)$ монотонно возрастают, причем полное приращение $\arg W(\rho+iY)$, $Y \in [0,2\pi]$, будет больше $2\pi$. Если $Z = X + 2\pi i$ пробегает горизонтальный участок при изменении $X$ от $\rho$ до 0, то образ $W(X+2\pi i)$ точки $Z$ заполняет кривую из верхней полуплоскости $\{Z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} Z \geq 0\}$. Наконец, $0 \leq \arg W(iY) < \pi$ при $Y \in [0,\pi)$ и $0 < \arg W(iY) = \arg W(i\eta) \leq \pi$ при $Y = \pi + \eta \in (\pi, 2\pi]$. Таким образом, при обходе точкой $Z$ границы $\partial P_+^\rho$ в положительном направлении образ $W(Z)$ этой точки попадает в нижнюю полуплоскость $\{W \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} W < 0\}$ только в случае $Z = R + iY$, $0 < Y_1 < Y < Y_2 < 2\pi$. Поэтому при полном обходе в положительном направлении границы прямоугольника $P_+^\rho$ приращение аргумента $\Delta\arg(W(Z) - W_0)$ будет равно $2\pi$ для любой точки $W_0 \in \{W \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} W < 0,\ |W| \leq \exp\rho\}$. Отсюда и из принципа аргумента получаем включение

$$\{W \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} W < 0,\ |W| \leq \exp\rho\} \subset W\big(P_+^\rho\big),$$

тогда из компактности $P_+^\rho$ вытекает, что

$$\{W \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} W \leq 0,\ |W| \leq \exp\rho\} \subset W\big(P_+^\rho\big).$$

Теперь из равенства $W(\overline{Z}) = \overline{W(Z)}$ и произвольности $\rho > 0$ следует, что $W(P_*) = \mathbb{C}$.

Покажем, что отображение $W(Z)$ конечнолистно в $\mathscr{P}_*$. Из теоремы единственности получаем, что на ограниченном подмножестве плоскости $Z$ целая функция $W(Z)$ может принимать фиксированное значение $W_0 \in \mathbb{C}$ лишь в конечном числе точек. Поэтому если уравнение $W(Z) = W_0$ имеет бесконечное множество корней $\{Z_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathscr{P}_*$, то $\operatorname{Re} Z_k \to \infty$ при $k \to \infty$. Но тогда из вида функции $W(Z)$ вытекает, что $W(Z_k) \to \infty$; противоречие с равенством $W(Z_k) = W_0$.

Теорема 4 доказана.

Автор благодарит С. Ю. Графа, Е. Калину, П. Личберски за участие в обсуждении проблемы Е. Лигоцки на семинарах в Лодзи в 2005 г. Особая благодарность Н. М. Мишачеву за указание им на цитированный выше результат Керекьярто, что позволило существенно сократить доказательство теоремы 1.

## *ЛИТЕРАТУРА*

**1.** *Poincaré H.* Les fonctions analytiques de deux variables et la représentation conforme // Rend. Circ. Math. Palermo. 1907. V. 23. P. 185–220.
**2.** *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. II. М.: Наука, 1976.
**3.** *Fornaess J. E., Stout E. L.* Spreading polydiscs on complex manifolds // Amer. J. Math. 1977. V. 99. P. 933–960.
**4.** *Ligocka E.* On locally biholomorphic surjective mappings // Ann. Polon. Math. 2003. V. 82. P. 127–135.
**5.** *Liczberski P., Starkov V. V.* On locally biholomorphic mappings from multi-connected onto simply connected domains // Ann. Polon. Math. 2005. V. 85. P. 135–143.
**6.** *Liczberski P., Starkov V. V.* On locally biholomorphic finitely valent mappings from multiply connected onto simply connected domains // Contemporary Math. 2008. V. 455. P. 269–277.
**7.** *Старков В. В.* Локально биголоморфные отображения многосвязных областей // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 4. С. 914–922.
**8.** *Стоилов С.* Лекции о топологических принципах теории аналитических функций. М.: Наука, 1964.
**9.** *Reich E., Warszawski S. E.* On canonical conformal maps of regions of arbitrary connectivity // Pacific J. Math. 1960. V. 10, N 3. P. 965–989.
**10.** *Александров П. С.* Введение в теорию множеств и общую топологию. М.: Наука, 1977.
**11.** *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966.

*Статья поступила 11 февраля 2010 г.*

Старков Виктор Васильевич
Петрозаводский гос. университет, математический факультет,
пр. Ленина, 33, Петрозаводск 185640
`Vstar@psu.karelia.ru`