Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2010. Том 51, № 6

УДК 512.54.01

О КЛАССАХ ЛЕВИ, ПОРОЖДЕННЫХ НИЛЬПОТЕНТНЫМИ ГРУППАМИ

В. В. Лодейщикова

Аннотация. Для произвольного класса M групп обозначим через $L(M)$ класс всех групп G, в которых нормальное замыкание любого элемента принадлежит M. Пусть qF_p — квазимногообразие, порожденное относительно свободной группой в классе нильпотентных групп ступени не выше 2 с коммутантом экспоненты p (p — простое число, $p \neq 2$). Дано описание класса Леви, порожденного квазимногообразием qF_p.

Ключевые слова: квазимногообразие, класс Леви, нильпотентная группа.

Введение

Пусть $\mathscr{M}$ — класс групп. Через $L(\mathscr{M})$ будем обозначать класс всех групп G, в которых нормальное замыкание $(x)^G$ любого элемента x из G принадлежит $\mathscr{M}$. Класс $L(\mathscr{M})$ групп называется *классом Леви, порожденным* $\mathscr{M}$. Впервые классы Леви введены в [1] под влиянием работы [2], в которой исследовались группы с абелевыми нормальными замыканиями вида $(x)^G$. Известно [3], что если $\mathscr{M}$ — многообразие, то $L(\mathscr{M})$ — также многообразие; если $\mathscr{M}$ — квазимногообразие, то согласно [4] $L(\mathscr{M})$ — также квазимногообразие групп. Классы Леви, порождаемые нильпотентными группами, исследовались в [5].

Обозначим через $\mathscr{N}_c$ многообразие нильпотентных групп ступени не выше c, $q\mathscr{K}$ — квазимногообразие, порожденное классом групп $\mathscr{K}$ (если $\mathscr{K} = \{G\}$, то вместо $q\{G\}$ будем писать qG). Из [2] следует, что класс $L(\mathscr{N}_1)$ является многообразием 2-энгелевых групп. В [6] доказано, что $L(\mathscr{N}_2)$ совпадает с многообразием 3-энгелевых групп.

В [4] установлено, что если $\mathscr{K}$ — произвольное множество нильпотентных групп ступени 2 без элементов порядков 2 и 5 и централизатор любого неединичного элемента, не принадлежащего центру каждой группы из $\mathscr{K}$, — абелева подгруппа, то $L(q\mathscr{K}) \subseteq \mathscr{N}_3$. В [7] данный результат усилен и доказана аналогичная теорема для произвольного множества нильпотентных групп ступени 2 без элементов порядка 2.

В [8] показано, что если $\mathscr{K}$ — произвольный класс нильпотентных ступени ≤ 2 групп без кручения, содержащий неабелеву группу, и во всякой группе из $\mathscr{K}$ централизатор любого элемента, не принадлежащего центру этой группы, является абелевой подгруппой, то $L(q\mathscr{K})$ совпадает с квазимногообразием нильпотентных групп ступени ≤ 3 без кручения. Если же $\mathscr{K}$ — произвольный класс нильпотентных ступени ≤ 2 групп экспоненты p (p — простое число,

Работа выполнена при поддержке АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» (Мероприятие 1).

$p \neq 2$), содержащий неабелеву группу, и во всякой группе из $\mathscr{K}$ централизатор любого элемента, не принадлежащего центру этой группы, является абелевой подгруппой, то по [8] $L(q\mathscr{K})$ совпадает с многообразием нильпотентных групп ступени ≤ 3 экспоненты p.

Зафиксируем простое число p, $p \neq 2$. Будем рассматривать квазимногообразие $\mathscr{N}$, заданное в $\mathscr{N}_2$ следующим бесконечным множеством формул:

$$(\forall x)(\forall y)([x,y]^p = 1), \tag{1}$$

$$(\forall x)(\forall y)(x^p = 1 \to [x,y] = 1), \tag{2}$$

$$(\forall x)(x^q = 1 \to x = 1), \tag{3}$$

$$(\forall x)(x^{p^2} = 1 \to x^p = 1), \tag{4}$$

где q пробегает множество простых чисел, отличных от p.

Через $\mathscr{M}$ обозначим квазимногообразие, задаваемое в $\mathscr{N}_3$ квазитождествами (3), (4) и формулами

$$(\forall x)(\forall y)([x,y,x]^p = 1), \tag{5}$$

$$(\forall x)(\forall y)(x^p = 1 \to [x,y,x] = 1), \tag{6}$$

$$(\forall x)(\forall x_1)\dots(\forall x_n)\left(x^{p\delta} = \prod_{i=1}^{n}[x,x_i]^{p\varepsilon_i} \to \prod_{i=1}^{n}[x,x_i,x]^{\varepsilon_i} = 1\right), \tag{7}$$

где q пробегает множество простых чисел, отличных от p, $\varepsilon_i \in \{-1;1\}$, $i = 1,\dots,n$, δ и n пробегают множество натуральных чисел.

Цель работы — доказать следующую теорему.

Теорема. *Пусть $\mathscr{K}$ — произвольный класс групп из $\mathscr{N}$, содержащий неабелеву группу. Предположим, что во всякой группе из $\mathscr{K}$ централизатор любого неединичного элемента, не принадлежащего центру этой группы, является абелевой подгруппой. Тогда $L(q\mathscr{K}) = \mathscr{M}$.*

1. Предварительные сведения

В работе используются следующие обозначения:

$$[x,y] = x^{-1}y^{-1}xy, \quad [x,y,z] = [[x,y],z],$$

$\mathrm{gr}(a_1,a_2,\dots)$ — группа, порожденная элементами $a_1,a_2,\dots$, $(x)^G = \mathrm{gr}(g^{-1}xg \mid g \in G)$ — нормальное замыкание элемента x в группе G, G' — коммутант группы G, $Z(G)$ — центр группы G.

В данной работе $\mathscr{R}_{p^\infty}$ (p — простое число) — многообразие, заданное в $\mathscr{N}_2$ тождеством (1), F_p — свободная в $\mathscr{R}_{p^\infty}$ группа ранга 2.

В дальнейшем будем использовать следующие коммутаторные тождества, истинные во всякой группе [9]:

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)([xy,z] = [x,z][x,z,y][y,z]),$$

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)([x,yz] = [x,z][x,y][x,y,z]),$$

$$(\forall x)(\forall y)([x^{-1},y] = [y,x][y,x,x^{-1}]).$$

Нам понадобится признак принадлежности конечно определенной группы G квазимногообразию $q\mathscr{K}$, являющийся частным случаем теоремы 3 из [10] (см. также [11]): *конечно-определенная группа G принадлежит квазимногообразию $q\mathscr{K}$ тогда и только тогда, когда для любого элемента $g \in G$, $g \neq 1$, существует гомоморфизм φ_g группы G в некоторую группу из класса $\mathscr{K}$ такой, что $\varphi_g(g) \neq 1$.*

Будем неоднократно использовать следующие общеизвестные теоремы.

Теорема (Ремак) [9]. *Пусть в группе G задано семейство нормальных подгрупп H_i, $i \in I$, и H — их пересечение. Тогда фактор-группа G/H изоморфна некоторому поддекартовому произведению фактор-групп G/H_i.*

Теорема (Дик) [12]. *Пусть группа G имеет в данном квазимногообразии $\mathscr{N}$ представление*

$$G = \mathrm{gr}(\{x_i \mid i \in I\} \parallel \{r_j(x_{j_1}, \dots, x_{j_{l(j)}}) = 1 \mid j \in J\}).$$

Предположим, что $H \in \mathscr{N}$ и группа H содержит множество элементов $\{g_i \mid i \in I\}$ такое, что для всякого $j \in J$ равенство $r_j(g_{j_1}, \dots, g_{j_{l(j)}}) = 1$ истинно в H. Тогда отображение $x_i \to g_i$ $(i \in I)$ продолжается до гомоморфизма G в H.

При написании тождеств и квазитождеств кванторы всеобщности иногда будут опускаться. С основными понятиями теории групп можно познакомиться в [9, 13], а теории квазимногообразий — в [11, 12, 14].

2. Основные результаты

Лемма. *Пусть группа $H = \mathrm{gr}(x, x_1, \dots, x_n)$ принадлежит квазимногообразию $\mathscr{N}$ и подгруппа $\overline{H} = \mathrm{gr}(x_1, \dots, x_n)$ абелева. Тогда $H \in qF_p$.*

Доказательство проведем индукцией по числу порождающих группы $\overline{H}$. Лемма справедлива для абелевой группы H, поэтому предполагаем, что H — неабелева группа. Зафиксируем представление группы H в порождающих $x, x_1, \dots, x_n$ в многообразии $\mathscr{R}_{p^\infty}$. Так как $H \in \mathscr{N}$ и H — неабелева группа, видим, что x — элемент бесконечного порядка.

Пусть сначала $n = 1$. Если множество определяющих соотношений группы H пусто, то $H \cong F_p$. Предполагаем, что рассматриваемое представление группы H содержит нетривиальное определяющее соотношение $x^t x_1^{t_1}[x, x_1]^q = 1$. Поскольку x, x_1 — элементы бесконечного порядка, то $t \neq 0$, $t_1 \neq 0$. Ясно, что $t, t_1 \equiv 0(\mathrm{mod}\ p)$. Пусть $t = p^v w$, $t_1 = p^c d$, $w, d \not\equiv 0(\mathrm{mod}\ p)$. Если $v \geq c$, то $\left(x^{p^{v-c}w} x_1^d\right)^{p^c} = [x, x_1]^{-q}$ и $\left(x^{p^{v-c}w} x_1^d\right)^{p^{c+1}} = 1$. Применяя квазитождество (4), замечаем, что $\left(x^{p^{v-c}w} x_1^d\right)^p = 1$. Теперь по (2) имеем $\left[x^{p^{v-c}w} x_1^d, x\right] = [x_1, x]^d = 1$. Это противоречит неабелевости группы H. Если $v < c$, аналогичным образом получаем, что $[x, x_1]^w = 1$, откуда H — абелева группа. Итак, показано, что $H \cong F_p \in qF_p$.

Теперь считаем, что $n \geq 2$. Пусть $H' = (g_1) \times \dots \times (g_l)$. Положим $G_i = (g_1) \times \dots \times (g_{i-1}) \times (g_{i+1}) \times \dots \times (g_l)$, $i = 1, \dots, l$. Несложно показать, что $H_i = H/G_i \in \mathscr{N}$, $i = 1, \dots, l$. По теореме Ремака группа H вложима в декартово произведение групп H_i $(i = 1, \dots, l)$ с циклическими коммутантами. Поэтому можно (и будем) считать, что H' — циклическая группа, порожденная элементом $[x, x_1]$. Следовательно, $[x, x_i] = [x, x_1]^{k_i}$ для подходящего k_i. Для определенности считаем, что $k_i \not\equiv 0(\mathrm{mod}\ p)$ при $i = 1, \dots, m$, $1 \leq m \leq n$; $[x, x_i] = 1$ при $i = m + 1, \dots, n$.

Случай 1. $\overline{H} = \mathrm{gr}(x_1, \dots, x_n)$ — свободная абелева группа ранга n.

Подслучай 1.1. Среди определяющих соотношений группы H присутствует равенство $x^t x_1^{t_1} \dots x_n^{t_n}[x, x_1]^q = 1$, где НОД$(t, t_1, \dots, t_n) = 1$.

Ясно, что $t \neq 0$, $t \equiv 0(\mathrm{mod}\ p)$. Возьмем произвольный элемент $z \in H$, $z \neq 1$. Ввиду признака принадлежности достаточно построить гомоморфизм φ группы H в некоторую группу $F \in qF_p$, при котором $\varphi(z) \neq 1$. Если $z \notin H'$, то в качестве искомого отображения берем естественный гомоморфизм $\varphi : H \to H/H' \in qF_p$. Пусть $z \in H'$, тогда можно считать, что $z = [x, x_1]$.

Наша ближайшая цель — преобразовать рассматриваемое определяющее соотношение в более удобное, выбрав подходящие порождающие группы H.

Возьмем $y_i = x_i x_1^{-k_i}$, $i = 2, \dots, m$. Ясно, что

$$\mathrm{gr}(x, x_1, y_2, \dots, y_m, x_{m+1}, \dots, x_n) = H, \quad y_i \in Z(H),$$

$$x^t x_1^{t_1'} y_2^{t_2} \dots y_m^{t_m} x_{m+1}^{t_{m+1}} \dots x_n^{t_n} [x, x_1]^q = 1,$$

где $t_1' = t_1 + k_2 t_2 + \dots + k_m t_m$. Отсюда $[x, x_1]^{t_1'} = 1$, т. е. $t_1' \equiv 0 (\mathrm{mod}\ p)$.

Можно считать, что $t = p^v w$ ($v > 0$, $w \not\equiv 0(\mathrm{mod}\ p)$); $t_1' = 0$ либо $t_1' = p^c d$ ($c > 0$, $d \not\equiv 0(\mathrm{mod}\ p)$). Если $c < v$, то вместо x_1 берем $z_1 = x_1 x$. Ясно, что $\mathrm{gr}(x, z_1, y_2, \dots, y_m, x_{m+1}, \dots, x_n) = H$, $x^{t'} z_1^{t_1'} y_2^{t_2} \dots y_m^{t_m} x_{m+1}^{t_{m+1}} \dots x_n^{t_n} [x, z_1]^q = 1$, где $t' = t - t_1' = p^c w_1$, $w_1 = p^{v-c} w - d \not\equiv 0(\mathrm{mod}\ p)$. Поэтому можно предполагать, что $c \geq v$ либо $t_1' = 0$.

Если $t_1 \equiv 0(\mathrm{mod}\ p)$, то из того, что НОД$(t, t_1, \dots, t_n) = 1$, следует, что $t_{i_0} \not\equiv 0(\mathrm{mod}\ p)$ для некоторого $i_0 \in \{2, \dots, n\}$. Если же $t_1 \not\equiv 0(\mathrm{mod}\ p)$, то существование $j_0 \in \{2, \dots, m\}$, для которого $t_{j_0} \not\equiv 0(\mathrm{mod}\ p)$, получаем из сравнения $t_1 + k_2 t_2 + \dots + k_m t_m \equiv 0(\mathrm{mod}\ p)$. Следовательно, НОД$(t, t_1', t_2, \dots, t_n) = 1$. Итак, можно считать, что $t_1 \equiv 0(\mathrm{mod}\ p)$, $t_2 \not\equiv 0(\mathrm{mod}\ p)$.

Таким образом, достаточно рассмотреть случай, когда среди определяющих соотношений группы H присутствует равенство $x^t x_1^{t_1} \dots x_n^{t_n} [x, x_1]^q = 1$, где $t_1 \equiv 0(\mathrm{mod}\ p)$, $t_2 \not\equiv 0(\mathrm{mod}\ p)$, $[x, x_i] = 1$, $i = 2, \dots, n$, $t = p^v w$, $t_1 = p^c d$ либо $t_1 = 0$, $w, d \not\equiv 0(\mathrm{mod}\ p)$ и $c \geq v$.

Пусть из определяющих соотношений группы H следует соотношение $x^s x_1^{s_1} \dots x_n^{s_n} [x, x_1]^r = 1$. Ясно, что $s \equiv 0(\mathrm{mod}\ p)$ и

$$\left(x^t x_1^{t_1} \dots x_n^{t_n} [x, x_1]^q\right)^s \left(x^s x_1^{s_1} \dots x_n^{s_n} [x, x_1]^r\right)^{-t} = x_1^{st_1 - ts_1} \dots x_n^{st_n - ts_n} = 1.$$

Но $\overline{H} = \mathrm{gr}(x_1, \dots, x_n)$ — свободная абелева подгруппа ранга n, значит, $st_i - ts_i = 0$, $i = 1, \dots, n$. Домножим равенства $st_i - ts_i = 0$ на t_j, $st_j - ts_j = 0$ на t_i и вычтем одно из другого. Получим, что $t(s_j t_i - s_i t_j) = 0$. Следовательно, $s_j t_i - s_i t_j = 0$, $i \neq j$, $i, j = 1, \dots, n$. Тогда

$$\left(x^t x_1^{t_1} \dots x_n^{t_n} [x, x_1]^q\right)^{s_i} \left(x^s x_1^{s_1} \dots x_n^{s_n} [x, x_1]^r\right)^{-t_i} = [x, x_1]^{qs_i - rt_i} = 1$$

и $qs_i - rt_i \equiv 0(\mathrm{mod}\ p)$, $i = 1, \dots, n$.

Пусть сначала $t_1 \neq 0$. Положим $F_p = \mathrm{gr}(a, b)$. Рассмотрим отображение

$$\psi : x \to b^{p^{c-v} d} a^{-(t_1 + t_2)}, \quad x_1 \to a^t b^{-w},\ x_2 \to a^t [b, a]^{wq},\ x_j \to 1,\ j = 3, \dots, n.$$

Тогда

$$\psi(x)^t \psi(x_1)^{t_1} \dots \psi(x_n)^{t_n} [\psi(x), \psi(x_1)]^q = 1, \quad [\psi(x), \psi(x_1)] = [b, a]^{-t_2 w} \neq 1,$$

$$[\psi(x), \psi(x_j)] = 1, \quad j = 2, \dots, n.$$

Заметим, что

$$p^{c-v} ds - ws_1 = \frac{t_1 s - ts_1}{p^v} = 0.$$

Следовательно,

$$\psi(x)^s \psi(x_1)^{s_1} \dots \psi(x_n)^{s_n} [\psi(x), \psi(x_1)]^r = b^{p^{c-v} ds - ws_1} a^{ts_2 - st_2 + ts_1 - t_1 s} [b, a]^{w(s_2 q - rt_2)} = 1.$$

По теореме Дика отображение ψ продолжаемо до гомоморфизма $\varphi : H \to F_p$, при котором $\varphi(z) = [b,a]^{-t_2 w} \neq 1$.

Аналогичным образом получаем, что в случае $t_1 = 0$ отображение

$$\psi : x \to a^{-t_2}, \quad x_1 \to a^t b^{-w},\ x_2 \to a^t [b,a]^{wq},\ x_j \to 1,\ j = 3, \dots, n,$$

продолжаемо до гомоморфизма $\varphi : H \to F_p$, при котором $\varphi(z) = [b,a]^{-t_2 w} \neq 1$.

Подслучай 1.2. Среди определяющих соотношений группы H присутствует равенство $x^t x_1^{t_1} \dots x_n^{t_n} [x, x_1]^q = 1$, и для любого соотношения такого вида НОД$(t, t_1, \dots, t_n)$ делится на p. Рассмотрим такое соотношение с наименьшим НОД$(t, t_1, \dots, t_n) = p^k$. Обозначим $m = \frac{t}{p^k}$, $m_i = \frac{t_i}{p^k}$, $i = 1, \dots, n$. Тогда

$$\left(x^t x_1^{t_1} \dots x_n^{t_n} [x, x_1]^q\right)^p = \left(x^m x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}\right)^{p^{k+1}} = 1.$$

Используя (4), получим, что $\left(x^m x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}\right)^p = 1$. Пусть $g = x^m x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}$, $G = (g)$. Ввиду (4) НОД$(m, m_1, \dots, m_n) = 1$, и по (2) $g \in Z(H)$.

Несложно проверяется, что $H/G \in \mathscr{N}$. В H/G имеем $\bar{x}^m \bar{x}_1^{m_1} \dots \bar{x}_n^{m_n} = \bar{1}$ и по подслучаю 1.1 $H/G \in F_p$. Ясно, что $H/H' \in qF_p$.

Покажем, что $G \cap H' = (1)$. Если это не так, то $g \in H'$, откуда в H справедливо соотношение вида $x^m x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n} [x, x_1]^r = 1$, что противоречит рассматриваемому подслучаю. Следовательно, $G \cap H' = (1)$. По теореме Ремака группа H вложима в группу $H/H' \times H/G \in qF_p$, и в этом подслучае лемма верна.

Подслучай 1.3. Среди определяющих соотношений группы H нет нетривиальных равенств вида $x^t x_1^{t_1} \dots x_n^{t_n} [x, x_1]^q = 1$. Тогда группа H задана в $\mathscr{R}_{p^\infty}$ соотношениями:

$$[x, x_i] = [x, x_1]^{k_i},\ i = 1, \dots, m, \quad [x, x_j] = 1,\ j = m, \dots, n,$$

$$[x_i, x_j] = 1, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Возьмем произвольный элемент $z \in H$, $z \neq 1$. Ввиду признака принадлежности достаточно построить гомоморфизм φ группы H в некоторую группу $F \in qF_p$, при котором $\varphi(z) \neq 1$. Если $z \notin H'$, то в качестве искомого отображения берем естественный гомоморфизм $\varphi : H \to H/H' \in qF_p$. Пусть $z \in H'$, тогда можно считать, что $z = [x, x_1]$.

Пусть $F_p = \mathrm{gr}(a, b)$. Рассмотрим отображение

$$\psi : x \to a, \quad x_1 \to b,\ x_i \to b^{k_i},\ i = 2, \dots, m,$$

$$x_j \to 1, \quad j = m, \dots, n.$$

Тогда

$$[\psi(x), \psi(x_i)] = [a, b]^{k_i} = [\psi(x), \psi(x_1)]^{k_i}, \quad i = 2, \dots, m,$$

$$[\psi(x), \psi(x_j)] = 1,\ j = m, \dots, n, \quad [\psi(x_i), \psi(x_j)] = 1,\ i, j = 1, \dots, n.$$

По теореме Дика отображение ψ продолжаемо до гомоморфизма $\varphi : H \to F_p$, при котором $\varphi(z) = [a, b] \neq 1$.

Случай 2. Пусть $\overline{H} = \mathrm{gr}(x_1, \dots, x_n)$ — произвольная абелева подгруппа. Пусть $\tau(\overline{H})$ — периодическая часть группы $\overline{H}$. Воспользовавшись (2), видим, что $\tau(\overline{H}) \leq Z(H)$. Из случая 1 следует, что $H/\tau(\overline{H}) \in qF_p$. Если $H' \cap \tau(\overline{H}) = (1)$, то по теореме Ремака группа H вложима в группу $H/H' \times H/\tau(\overline{H}) \in qF_p$.

Предположим, что существует неединичный элемент h_1 такой, что $h_1 \in H' \cap \tau(\overline{H})$. Подгруппа (h_1) выделяется прямым сомножителем в группе $\overline{H}$.

Дополним h_1 элементами, которые обозначим через $h_2, \dots, h_n$, до множества порождающих группы $\overline{H}$. Имеем $H = \mathrm{gr}(x, h_1, \dots, h_n)$. Хорошо известно (см., например, [9]), что коммутант нильпотентной группы содержится в ее подгруппе Фраттини, поэтому $H = \mathrm{gr}(x, h_2, \dots, h_n)$ и по индукции $H \in F_p$. Лемма 1 доказана.

Доказательство теоремы. Сначала покажем, что $\mathscr{M} \subseteq L(q\mathscr{K})$. Хорошо известно [11, теорема 2.1.20], что всякое квазимногообразие порождается множеством своих конечно порожденных групп. Следовательно, достаточно показать, что любая конечно порожденная группа G из $\mathscr{M}$ принадлежит классу Леви, порожденному $q\mathscr{K}$.

Рассмотрим нормальное замыкание произвольного элемента x из G:

$$H = (x)^G = \mathrm{gr}(x, [x, g] \mid g \in G).$$

Если G — нильпотентная группа ступени ≤ 2, то видим, что $(x)^G$ — абелева и поэтому (см. [2]) $G \in L(qF_p)$. Считаем, что G — нильпотентная группа ступени 3. Группа G является нильпотентной и конечно порожденной, поэтому любая ее подгруппа будет конечно порождена. Хорошо известно (см., например, [15, гл. 3, § 6]), что нильпотентная группа класса 3 является метабелевой, поэтому можно выбрать порождающие $x, x_1, \dots, x_n$ группы H так, чтобы подгруппа $\overline{H} = \mathrm{gr}(x_1, \dots, x_n)$ была абелевой (здесь $x_i = [x, g_i]$ для некоторого $g_i \in G$, $i = 1, \dots, n$).

Покажем, что H удовлетворяет условиям леммы. Нетрудно проверить, что H является нильпотентной группой ступени не выше 2. Истинность тождества (1) в подгруппе H следует из истинности тождества (5) в группе G. Истинность квазитождеств (3), (4) в подгруппе H следует из истинности этих квазитождеств в группе G.

Проверим истинность квазитождества (2) в H. Пусть $h_1, h_2 \in H$ и $h_1^p = 1$. Тогда

$$h_1 = x^m \prod_{i=1}^{n} [x, g_i]^{\varepsilon_i} c_1, \quad h_2 = x^s \prod_{i=1}^{n} [x, f_i]^{-\delta_i} c_2$$

для подходящих $g_i, f_i \in G$, $c_1, c_2 \in ((x)^G)'$, $\varepsilon_i, \delta_i \in \{-1; 1\}$, $i = 1, \dots, n$. Видим, что

$$[h_1, h_2] = \left[x^m \prod_{i=1}^{n} [x, g_i]^{\varepsilon_i} c_1, x^s \prod_{i=1}^{n} [x, f_i]^{-\delta_i} c_2 \right] = \prod_{i=1}^{n} [x, g_i, x]^{\varepsilon_i s} [x, f_i, x]^{\delta_i m}.$$

Сначала рассмотрим случай, когда $m \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\ p)$. Из (6) следует, что для произвольного $y \in G$

$$\left[x^m \prod_{i=1}^{n} [x, g_i]^{\varepsilon_i} c_1, y, x^m \prod_{i=1}^{n} [x, g_i]^{\varepsilon_i} c_1 \right] = [x, y, x]^{m^2} = 1.$$

Тогда по (3) получаем, что $[x, y, x] = 1$. В частности, $[x, g_i, x] = 1$ и $[x, f_i, x] = 1$, $i = 1, \dots, n$. Следовательно, в этом случае $[h_1, h_2] = 1$.

Пусть теперь $m \equiv 0 (\mathrm{mod}\ p)$. Тогда $[x, f_i, x]^{\delta_i m} = 1$. Поскольку $h_1^p = 1$, то $x^{-mp} = \prod_{i=1}^{n} [x, g_i]^{\varepsilon_i p}$. Из (7) следует, что $\prod_{i=1}^{n} [x, g_i, x]^{\varepsilon_i} = 1$ и $[h_1, h_2] = 1$. Таким образом, H удовлетворяет условиям леммы 1 и $H \in qF_p$. Значит, группа G принадлежит классу $L(qF_p)$ и $\mathscr{M} \subseteq L(qF_p)$. Поскольку F_p — относительно свободная группа, содержащаяся в $q\mathscr{K}$, то $L(qF_p) \subseteq L(q\mathscr{K})$, следовательно, $\mathscr{M} \subseteq L(q\mathscr{K})$.

Осталось показать, что $L(q\mathscr{K}) \subseteq \mathscr{M}$. Для этого достаточно установить, что любая конечно порожденная группа G из $L(q\mathscr{K})$ принадлежит $\mathscr{M}$. Из [7] следует, что $L(q\mathscr{K}) \in \mathscr{N}_3$. Рассмотрим произвольный элемент $x \in G$. По определению класса Леви $(x)^G \in q\mathscr{K}$. Поскольку в $\mathscr{K}$ истинны формулы (3), (4), они будут истинны и в нормальном замыкании $(x)^G$ для любых элементов $x \in G$. Значит, квазитождества (3) и (4) будут истинны в группе G. Заметим, что для произвольного $y \in G$ элемент $[x, y]$ принадлежит подгруппе $(x)^G$. Следовательно, истинность формул (5) и (6) в G непосредственно следует из истинности формул (1) и (2) в $(x)^G$.

Пусть

$$x^{p\delta} = \prod_{i=1}^{n} [x, x_i]^{p\varepsilon_i},$$

где $\varepsilon_i \in \{-1; 1\}$, $i = 1, \dots, n$, δ — целое число. Тогда

$$\left(\prod_{i=1}^{n} [x, x_i]^{\varepsilon_i} x^{-\delta} \right)^p = 1,$$

и поскольку в нормальном замыкании $(x)^G$ истинно квазитождество (2), то

$$\left[\prod_{i=1}^{n} [x, x_i]^{\varepsilon_i} x^{-\delta}, x \right] = \prod_{i=1}^{n} [x, x_i, x]^{\varepsilon_i} = 1.$$

Следовательно, (7) истинно в G. Таким образом показано, что G принадлежит $\mathscr{M}$, значит, $L(q\mathscr{K}) \subseteq \mathscr{M}$. Теорема доказана.

Заметим, что $\mathscr{K} = \{F_p\}$ удовлетворяет условиям теоремы, стало быть, справедливо

Следствие. *Если $\mathscr{K} = \{F_p\}$, то $L(qF_p) = \mathscr{M}$.*

Автор выражает глубокую признательность профессору А. И. Будкину за полезные советы и постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kappe L. C.* On Levi-formations // Arch. Math. 1972. V. 23, N 6. P. 561–572.
2. *Levi F. W.* Groups in which the commutator operation satisfies certain algebraic conditions // J. Indian Math. Soc. 1942. V. 6. P. 87–97.
3. *Morse R. F.* Levi-properties generated by varieties // Contemp. Math. 1994. V. 169. P. 467–474.
4. *Будкин А. И.* Квазимногообразия Леви // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 2. С. 266–270.
5. *Будкин А. И.* О классах Леви, порожденных нильпотентными группами // Алгебра и логика. 2000. Т. 39, № 6. С. 635–647.
6. *Kappe L. C., Kappe W. P.* On three-Engel groups // Bull. Aust. Math. Soc. 1972. V. 7, N 3. P. 391–405.
7. *Будкин А. И., Таранина Л. В.* О квазимногообразиях Леви, порожденных нильпотентными группами // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 2. С. 270–277.
8. *Лодейщикова В. В.* О квазимногообразиях Леви, порожденных нильпотентными группами // Изв. АлтГУ. 2009. № 1. С. 26–29.
9. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. М.: Наука, 1972.
10. *Будкин А. И., Горбунов В. А.* К теории квазимногообразий алгебраических систем // Алгебра и логика. 1975. Т. 14, № 2. С. 123–142.
11. *Будкин А. И.* Квазимногообразия групп. Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2002.
12. *Мальцев А. И.* Алгебраические системы. М.: Наука, 1970.

13. *Курош А. Г.* Теория групп. М.: Наука, 1967.
14. *Горбунов В. А.* Алгебраическая теория квазимногообразий. Новосибирск: Научная книга, 1999.
15. *Нейман Х.* Многообразия групп. М.: Мир, 1969.

Статья поступила 3 июня 2009 г.

Лодейщикова Виктория Владимировна
Алтайский гос. университет, пр. Ленина, 61, Барнаул 656049
victoria0504@mail.ru