Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2010. Том 51, № 6

УДК 517.982+517.988

УСЛОВИЯ ПРОДОЛЖЕНИЯ ОГРАНИЧЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ И СУБЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ СО ЗНАЧЕНИЯМИ В ПРОСТРАНСТВАХ ЛИНДЕНШТРАУССА

Ю. Э. Линке

Аннотация. Найдены условия продолжения линейных и сублинейных операторов со значениями в четырех классах пространств: пространств непрерывных функций на компакте, пространств Линденштраусса и их сепарабельных частей. Доказано, что во всех изученных случаях свойство продолжения линейных операторов влечет свойство продолжения сублинейных операторов, а в сепарабельных пространствах оба свойства эквивалентны.

Ключевые слова: линейный оператор, сублинейный оператор, продолжение операторов, аффинное отображение, субдифференциал, многозначное отображение, пространство Линденштраусса.

Введение

Пусть E, X, Y — банаховы пространства и E является замкнутым подпространством в X, а Y упорядочено конусом положительных элементов Y_+. Непрерывный линейный (сублинейный) оператор $\widehat{T} : X \to Y$ называется *продолжением* непрерывного линейного (сублинейного) оператора $T : E \to Y$, если $\widehat{T}e = Te$ для всех $e \in E$. В том случае, когда каждый линейный (сублинейный) оператор $T : E \to Y$ имеет продолжение, говорят, что пара (E, X) *имеет свойство продолжения линейных* (*сублинейных*) *операторов* для некоторого Y. Часто свойство продолжения изучается для какого-либо класса пространств, а в данной работе для четырех классов: класса банаховых пространств $\mathscr{C}$ непрерывных функций $C(K)$ на компакте K с нормой супремум, для охватывающего его класса $\mathscr{L}$ — пространств Линденштраусса, т. е. изометрически предвойственных $L_1(\mu)$ для некоторой меры μ, и их сепарабельных частей $\mathscr{C}_s$ и $\mathscr{L}_s$.

Свойство продолжения линейных функционалов, а также линейных операторов, интенсивно исследуется, начиная с основания функционального анализа. С основными результатами теории продолжения ограниченных линейных операторов, нерешенными проблемами и библиографией можно ознакомиться в обзоре [1]. В недавно опубликованной работе [2] продолжено изучение линейных операторов со значениями в пространствах Линденштраусса и указаны новые проблемы, одна из которых решена в предлагаемой статье.

Отметим также, что в последние годы усилился интерес к задачам продолжения как линейных, так и нелинейных, в том числе липшицевых, гёльдеровых, z-линейных, билинейных отображений (см., например, [2–10]). Вместе с тем, насколько известно автору, вопросы продолжения для ближайшего класса к

© 2010 Линке Ю. Э.

классу непрерывных линейных операторов — класса непрерывных сублинейных операторов — до сих пор не изучены [11].

Чтобы сформулировать основные задачи, которые изучаются в предлагаемой статье, напомним два определения. Для этого фиксируем число $\lambda \geq 1$ и некоторый класс упорядоченных банаховых пространств $\mathscr{A}$.

Говорят [3], что пара (E, X) имеет $(\lambda, \mathscr{A})$-*линейное* (*сублинейное*) *свойство продолжения*, если для всякого $A \in \mathscr{A}$ и всякого линейного (сублинейного) оператора $T : E \to A$ существует линейное (сублинейное) продолжение $\widehat{T} : X \to A$ оператора T, для которого $\|\widehat{T}\| \leq \lambda \cdot \|T\|$.

Банахово пространство X имеет $(\lambda, \mathscr{A})$-*линейное* (*сублинейное*) *свойство продолжения*, если любая пара (E, X) имеет $(\lambda, \mathscr{A})$ линейное (сублинейное) свойство продолжения [3].

В работе для четырех классов $\mathscr{A}$, указанных выше: $\mathscr{C}$, $\mathscr{L}$, $\mathscr{C}_s$ и $\mathscr{L}_s$, изучаются следующие вопросы:

(a) найти необходимые и достаточные условия, при выполнении которых пара (E, X) имеет $(\lambda, \mathscr{A})$-линейное (сублинейное) свойство продолжения;

(b) обнаружить связи между $(\lambda, \mathscr{A})$-линейными и сублинейными свойствами продолжения как для пар (E, X), так и банаховых пространств X.

В статье в предложении 3.1 решена проблема из [2, с. 12] о нахождении критерия, при выполнении которого пара (E, X) имеет $(\lambda, \mathscr{L})$-линейное свойство продолжения. История этой проблемы такова. Еще в 1991 г. Циппин [12, предложение 2] получил критерий для класса $\mathscr{C}$. Он заключается в том, что существует слабо* — слабо* непрерывное отображение B_{E^*} в $\lambda \cdot B_{X^*}$, где B_{E^*} и B_{X^*} означают шары единичного радиуса с центром в нуле банахова пространства E^* и X^* соответственно. Недавно в [2, лемма 2.2] для некоторых классов пространств, составляющих пространства Линденштраусса, получены частные критерии и в связи с этим поставлена проблема нахождения критерия для класса пространств Линденштраусса в целом [2, с. 12]. Ключом решения как поставленной проблемы, так и других вопросов является теорема автора о представлении сублинейных операторов со значениями в $\mathscr{L}$ многозначными отображениями [13, теорема 1]. Ответ оказался очень простым: надо к указанному выше критерию для класса $\mathscr{C}$ добавить два дополнительных свойства: отображение должно быть аффинным и переводить нуль в нуль.

Статья состоит из семи разделов. В разд. 1 собраны определения и необходимые предварительные сведения. В разд. 2, 3 найдены условия продолжения для классов пространств непрерывных функций и пространств Линденштраусса соответственно. В разд. 4 обсуждается гомологический подход к задачам продолжения операторов. В разд. 5, 6 соответственно для классов пространств непрерывных функций и пространств Линденштраусса доказано, что выполнение свойства продолжения линейных операторов во всех рассмотренных случаях влечет выполнение свойства продолжения сублинейных операторов. Здесь же найдены условия, когда эти свойства эквивалентны. В разд. 7 даны применения как полученных критериев продолжения, так и установленных связей между линейными и сублинейными свойствами продолжений. Например, в теореме 7.4 доказано, что при выполнении определенных условий свойства почти изометрического продолжения линейных, сублинейных и липшицевых операторов равносильны.

1. Предварительные сведения

1.1. Классы пространств. Все топологические пространства хаусдорфовы, а отображения непрерывны. Хаусдорфовы компактные топологические пространства для краткости называются *компактами*. Класс пространств вещественных непрерывных функций $C(K)$, где K — компакт, с sup-нормой и стандартным порядком обозначается символом $\mathscr{C}$, а входящие в него сепарабельные пространства — $\mathscr{C}_s$. Хорошо известно, что $C(K)$ сепарабельно тогда и только тогда, когда компакт K метризуем [14].

Пусть Y — комплексное или вещественное банахово пространство такое, что его топологическое сопряженное пространство Y^* изометрично изоморфно $L_1(\mu)$ для некоторой меры μ. Такие пространства были введены Гротендиком, интенсивно изучались Линденштрауссом и поэтому называются часто *пространствами Линденштраусса*. Пространства Линденштраусса содержат пространства непрерывных функций $C(K)$ на компакте K, пространства Гротендика, C_σ, M-пространства и пространства $A(K)$ непрерывных аффинных функций на выпуклом компакте, который является также и симплексом Шоке. Классификация вещественных пространств Линденштраусса дана Линденштрауссом и Вулбертом [15] (см. также [16]). Аналогичная классификация комплексных пространств получена Олсеном [17].

Пространства Линденштраусса Y априори не упорядочены. Чтобы их упорядочить, заметим, что $Y^* = L_1(\mu)$ имеет естественный порядок, если в качестве конуса положительных элементов в $L_1(\mu)$ взять конус $L_1^+(\mu)$, состоящий из классов эквивалентных неотрицательных функций. Упорядочим теперь Y конусом Y_+, который является двойственным к $L_1^+(\mu)$, т. е. $Y_+ = {L_1^+(\mu)}^* \cap Y$. Отметим, что такой порядок совпадает с естественным порядком, который имеется в приведенных выше пространствах Линденштраусса.

Класс вещественных пространств Линденштраусса обозначим символом $\mathscr{L}$, а часть, состоящую из сепарабельных пространств, — $\mathscr{L}_s$.

Если V — банахово пространство, то его единичный шар с центром в нуле обозначим символом $B_V := \{v \in V : \|v\| \leq 1\}$. Топологическое сопряженное V^* и B_{V^*} рассматриваются со слабой* топологией или топологией $\sigma(V^*, V)$, определяемой двойственностью между V^* и V.

Нам потребуется также часть единичного шара $B_{L_1^+(\mu)}$, состоящая из неотрицательных элементов $B_{L_1(\mu)}$, которая тоже рассматривается в слабой* топологии.

Далее все банаховы пространства предполагаются вещественными, а линейные и сублинейные операторы — непрерывными, т. е. ограниченными. Выпуклые множества и компактные выпуклые множества — это всегда подмножества хаусдорфовых или отделимых локально-выпуклых пространств.

Отображение двух выпуклых множеств называется *аффинным*, если оно переводит выпуклые комбинации одного выпуклого множества в соответствующие выпуклые комбинации другого.

1.2. Сублинейные операторы и многозначные отображения. Пусть Y — банахово пространство, упорядоченное конусом положительных элементов Y_+. Напомним, что *сублинейным оператором* $S : E \to Y$ называется субаддитивное и положительно однородное отображения E в Y, т. е. для всех $e_1, e_2, e \in E$ и $\alpha \geq 0$ верны соотношения

$$S(e_1 + e_2) \leq S(e_1) + S(e_2); \quad S(\alpha e) = \alpha S(e).$$

Хорошо известно, что непрерывность сублинейного оператора, равносильна его ограниченности. Норма сублинейного оператора определяется следующей формулой:

$$\|S\| = \sup\{\|Se\| : e \in B_E\}.$$

Далее потребуются многозначные отображения. Напомним, что гиперпространство $\exp Q$ ($\exp_c Q$) топологического пространства Q есть множество всех непустых замкнутых (компактных) подмножеств из Q с топологией Вьеториса [18, 2.7.20(a)] (см. также [19, IV.3.1]). Базу ее топологии образуют семейства вида $O\langle U_1, U_2, \dots, U_n\rangle = \{A \in \exp Q \mid A \subset U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_n,\ A \cap U_k \neq \varnothing$ для $k = 1, 2, \dots, n\}$, где $n \in \mathbb{N}$ и $U_1, U_2, \dots, U_n$ — открытые подмножества Q.

Для отображения $f : V \to W$, где V и W — топологические пространства, определим $\exp_c(f) : \exp_c(V) \to \exp_c(W)$ с помощью соотношения $\exp_c(f)(A) = f(A)$ для $A \in \exp_c(V)$. Если V — выпуклое множество, то обозначим

$$cc(V) = \{A \in \exp_c(V) \mid A \text{ является выпуклым } \} \subset \exp_c(V).$$

Если $f : V \to W$ — аффинное отображение выпуклых множеств, то отображение $cc(f) : cc(V) \to cc(W)$ зададим как ограничение $\exp_c(f)$ на $cc(V)$.

Для непустого компактного подмножества V локально выпуклого пространства W обозначим через $h(V)$ его замкнутую выпуклую оболочку, т. е. зададим непрерывное отображение $h : \exp_c(V) \to cc(W)$ [20].

Напомним, что операции Минковского в $cc(V)$ определяются следующим образом: $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 = \{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \mid x_1 \in A_1,\ x_2 \in A_2\}$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $A_1, A_1 \in cc(V)$.

Пусть V — банахово пространство и V^* — его топологическое сопряженное, наделяемое, напомним, слабой* топологией. Согласно вышесказанному $cc(V^*)$ есть совокупность всех непустых выпуклых и слабо* замкнутых подмножеств из V^* с топологией Вьеториса [18, 2.7.20(a)]. Рассмотрим также его подпространства $cc(B_{V^*})$, состоящие из подмножеств, содержащихся в B_{V^*}. Пусть λ — некоторое число. Тогда верно равенство $\lambda \cdot cc(B_{V^*}) = cc(\lambda \cdot B_{V^*})$.

Отображения некоторого топологического пространства Q в $\lambda \cdot cc(B_{V^*})$ будем далее рассматривать как многозначные отображения в V^*. Многозначные отображения использовались для характеристики сублинейных операторов [13, 21]. Поставим в соответствие сублинейному оператору [21] $S : V \to C(K)$ единственное отображение (многозначное в V^*) $F_S : K \to \|S\| \cdot cc(B_{V^*})$, при котором $F_S(k)$ для каждого $k \in K$ есть субдифференциал в нуле ∂s_k непрерывного сублинейного функционала $s_k : V \to \mathbb{R}$, действующего по правилу $s_k(v) := Sv(k)$ ($\forall k \in K$, $v \in V$).

Отображение $F_S : K \to \|S\| \cdot cc(B_{V^*})$ называется *представлением* сублинейного оператора S или *двойственным отображением*. Отображение $F : K \to cc(V^*)$ является двойственным отображением тогда и только тогда, когда оно непрерывно в топологии Вьеториса [21, теорема 1].

Рассмотрим теперь сублинейный оператор $S : V \to Y$, где Y — пространство Линденштраусса и $Y^* = L_1(\mu)$ [13, теорема 1]. В этой ситуации свяжем с каждым сублинейным оператором S отображение F_S из $B_{L_1^+(\mu)}$ со слабой* топологией в $\|S\| \cdot cc(V^*)$. Оно каждому y_+^* сопоставляет субдифференциал в нуле $\partial(y_+^* \circ S)$, который является непустым выпуклым и слабо* компактным множеством из $\|S\| \cdot cc(B_{V^*})$. Отображение F_S также называется *представлением* сублинейного оператора S или *двойственным отображением*. Отображение

$F : B_{L_1^+(\mu)} \to cc(V^*)$ является двойственным отображением тогда и только тогда, когда оно непрерывно в топологии Вьеториса, аффинно и $F(0) = 0$ [13, теорема 1].

В следующих двух частях для пар (E, X) найдем условия, обеспечивающие продолжения линейных и сублинейных операторов со значениями в классах $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}_s$, $\mathscr{L}$ и $\mathscr{L}_s$.

2. Условия продолжения для класса $\mathscr{C}$ и $\mathscr{C}_s$

Здесь получим условия продолжения сублинейных операторов со значениями в пространствах из класса $\mathscr{C}$ и $\mathscr{C}_s$. Прежде всего напомним, что критерий продолжения линейных операторов получил еще в 1991 г. Циппин [12, предложение 2] (см. также [1, 1.10]), эффективно применявший его для решения ряда задач продолжения линейных операторов. Применение этого критерия к вопросам продолжения сублинейных операторов потребует некоторое его дополнение. Для удобства читателей приведем формулировку этого критерия вместе с этим дополнением.

Необходимые определения абсолютно выпуклого, уравновешенного и абсолютно выпуклого множеств можно найти, например, в [11, 1.1.(7)].

Отображение $f : C_1 \to C_2$ абсолютно выпуклых множеств называется *нечетным* (*четным*), если для всех $x \in C_1$ верно равенство $f(-x) = -f(x)$ $(f(-x) = f(x))$. Ясно, что для нечетного отображения $f(0) = 0$.

Предложение 2.1 [12, предложение 2] (см. также [1, 1.10]). *Пара (E, X) имеет $(\lambda, \mathscr{C})$-линейное свойство продолжения тогда и только тогда, когда существует слабо* — слабо* непрерывное отображение $\varphi : B_{E^*} \to \lambda \cdot B_{X^*}$, которое продолжает линейные функционалы, т. е. $\varphi(e^*)(e) = e^*(e)$ для всех $e \in E$ и $e^* \in B_{E^*}$. Кроме того, отображение φ можно считать четным или нечетным с $\varphi(0) = 0$.*

Доказательство. Доказательство Циппина существования слабо* — слабо* непрерывного отображения $\varphi : B_{E^*} \to \lambda \cdot B_{X^*}$, которое продолжает линейные функционалы, базируется на теореме Гельфанда об общем виде линейных операторов, определенных на банаховых пространствах, со значениями в $C(K)$, где K — компакт [22] (см. также [23, теорема VI.7.1]). Читатель легко его восстановит, если ознакомится с доказательством предложения 2.3, в котором воспроизведены рассуждения Циппина применительно к сепарабельному случаю, т. е. к классу $\mathscr{C}_s$. Итак, предположим, что отображение $\varphi : B_{E^*} \to \lambda \cdot B_{X^*}$, которое продолжает линейные функционалы, найдено. Так как шары B_{E^*} и B_{X^*} являются абсолютно выпуклыми компактами в силу теоремы Алаоглу [23, V.4.2], преобразуем отображение φ, положив

$$e^* \mapsto \frac{\varphi(e^*) - \varphi(-e^*)}{2}, \quad e^* \in B_{E^*}.$$

Это отображение действует из B_{E^*} в $\lambda \cdot B_{X^*}$ и нечетно. Оно продолжает линейные функционалы. Действительно,

$$\frac{\varphi(e^*) - \varphi(-e^*)}{2}(e) = \frac{\varphi(e^*)(e) - \varphi(-e^*)(e)}{2} = \frac{e^*(e) - (-e^*(e))}{2} = e^*(e)$$

для всех $e \in E$ и $e^* \in B_{E^*}$. Непосредственно проверяется, что оно переводит нулевой элемент в нулевой элемент.

Для того чтобы получить четное отображение снова, используя абсолютную выпуклость шаров B_{E^*} и B_{X^*}, преобразуем исходное отображение φ, но теперь соотношением

$$e^* \mapsto \frac{\varphi(e^*) + \varphi(-e^*)}{2}, \quad e^* \in B_{E^*}.$$

Это отображение действует из B_{E^*} в $\lambda \cdot B_{X^*}$ и четно. Так же, как и для нечетного отображения, проверяется, что оно продолжает линейные функционалы. $\square$

Как отмечалось в доказательстве предложения 2.1, шары B_{E^*} и B_{X^*} являются абсолютно выпуклыми компактами. Известно, что $cc(B_{E^*})$ и $cc(B_{X^*})$ — выпуклые компакты в слабой* топологии Вьеториса [18, 3.12.26(a)]. Используя идеи Пинскера, можно считать, что они вложены в локально выпуклые пространства (см., например, [20, лемма 2.1]). Несложно проверить, что эти выпуклые компакты являются также абсолютно выпуклыми. Поскольку далее рассматриваются отображения $\Phi : cc(B_{E^*}) \to \lambda \cdot cc(B_{X^*})$, а локально выпуклые пространства, в которые $cc(B_{E^*})$ и $cc(B_{X^*})$ вложены, нам потребуются только формально, договоримся считать отображение Φ *нечетным* (*четным*), если $\Phi(-r) = -\Phi(r)$ ($\Phi(-r) = \Phi(r)$) для всех $r \in cc(B_{E^*})$.

В следующем предложении получим критерий продолжения сублинейных операторов.

Предложение 2.2. *Пара (E, X) имеет $(\lambda, \mathscr{C})$-сублинейное свойство продолжения тогда и только тогда, когда существует слабо* — слабо* непрерывное в топологии Вьеториса отображение $\Phi : cc(B_{E^*}) \to \lambda \cdot cc(B_{X^*})$, которое продолжает сублинейные функционалы, т. е.*

$$\sup\{x^*(e) : x^* \in \Phi(d)\} = \sup\{e^*(e) : e^* \in d\}$$

для всех $e \in E$ и $d \in cc(B_{E^*})$. Кроме того, отображение Φ можно считать четным или нечетным с $0 \in \Phi(0)$.

Доказательство. Достаточность. Пусть $S : E \to C(K)$ — непрерывный сублинейный оператор. Не умаляя общности, считаем, что $\|S\| = 1$. Тогда [21, теорема 1] его двойственное отображение $F_S : K \to cc(B_{E^*})$ слабо* непрерывно в топологии Вьеториса. Следовательно, суперпозиция $F = \Phi \circ F_S : K \to \lambda \cdot cc(B_{X^*})$является слабо* непрерывным в топологии Вьеториса отображением K в $\lambda \cdot cc(B_{X^*})$. Вновь применяя [21, теорема 1], найдем такой непрерывный сублинейный оператор $\widehat{S} : X \to C(K)$, что для него $F_{\widehat{S}} = F$. Осталось показать, что $\widehat{S}$ продолжает S. В самом деле, в силу определения двойственного отображения и свойства Φ продолжать сублинейные функционалы, для всех $e \in E$ и $k \in K$ имеем равенства

$$\begin{aligned}\widehat{S}e(k) &= \sup\{x^*(e) : x^* \in F(k)\} = \sup\{x^*(e) : x^* \in \Phi \circ F_S(k)\} \\ &= \sup\{x^*(e) : x^* \in \Phi(F_S(k))\} = \sup\{e^*(e) : e^* \in F_S(k)\} = Se(k).\end{aligned}$$

Отсюда заключаем, что сублинейный оператор $\widehat{S}$ действительно продолжает сублинейный оператор S.

Необходимость. Пусть пара (E, X) имеет $(\lambda, \mathscr{C})$-сублинейное свойство продолжения. Положим $K := cc(B_{E^*})$ со слабой* топологией Вьеториса. Рассмотрим тождественное отображение $\mathrm{id} : K \to K$ как многозначное отображение K в $cc(B_{E^*})$. Согласно [21, теорема 1] определим непрерывный сублинейный оператор $S : E \to C(K)$ формулой

$$Se(k) = \sup\{e^*(e) : e^* \in \mathrm{id}(k)\} = \sup\{e^*(e) : e^* \in k\},$$

где $e \in E$ и $k \in K$. Его норма равна единице. Пусть $\widehat{S} : X \to C(K)$ — любое его сублинейное продолжение. Тогда $\|\widehat{S}\| \leq \lambda \cdot \|S\|$, т. е. $\|\widehat{S}\| \leq \lambda$. Двойственное отображение $F_{\widehat{S}}$ сублинейного оператора $\widehat{S}$ отображает $cc(B_{E*})$ в $\lambda \cdot cc(B_{X*})$ слабо* — слабо* непрерывно в топологии Вьеториса [21, теорема 1]. С другой стороны, оно продолжает сублинейные функционалы. В самом деле, так как сублинейный оператор $\widehat{S}$ продолжает сублинейный оператор S, это свойство вытекает из равенств

$$\sup\{x^*(e) : x^* \in F_{\widehat{S}}(k)\} = \widehat{S}(e)(k) = S(e)(k) = \sup\{e^*(e) : e^* \in k\},$$

которые верны для всех $e \in E$ и $k \in cc(B_{E^*})$.

Искомое нечетное отображение Φ определим, используя абсолютную выпуклость $cc(B_{E*})$ и $\lambda \cdot cc(B_{X*})$, формулой

$$\Phi(k) = \frac{F_{\widehat{S}}(k) + (-F_{\widehat{S}}(-k))}{2}, \quad k \in cc(B_{E^*}).$$

Так же, как и в предложении 2.1, можно проверить, что Φ продолжает сублинейные функционалы. Свойство $0 \in \Phi(0)$ непосредственно вытекает из формулы вычисления Φ. Для завершения доказательства осталось определить четное отображение Φ следующим соотношением:

$$\Phi(k) = \frac{F_{\widehat{S}}(k) + (F_{\widehat{S}}(-k))}{2}, \quad k \in cc(B_{E^*}),$$

и вновь, как и в предложении 2.1, убедиться, что оно продолжает сублинейные функционалы. □

Часто задачи продолжения операторов рассматриваются в классе сепарабельных пространств. Поэтому определенный интерес представляют следующие два предложения, в которых получены условия продолжения для класса $\mathscr{C}_s$.

Предложение 2.3. *Для того чтобы пара (E, X) имела $(\lambda, \mathscr{C}_s)$-линейное свойство продолжения, достаточно существование слабо* — слабо* непрерывного отображения $\varphi : B_{E^*} \to \lambda \cdot B_{X^*}$, которое продолжает линейные функционалы. Если E сепарабельно, то оно является также и необходимым условием. Кроме того, отображение φ можно считать четным или нечетным с $\varphi(0) = 0$.*

Доказательство. Следуем доказательству Циппина [12, предложение 2] (см. также [1, 1.10]), внося необходимые изменения.

Достаточность. Возьмем линейный оператор $T : E \to C(K)$, где K — метризуемый компакт. Не умаляя общности, считаем, что $\|T\| = 1$. Тогда его двойственное отображение $F_T : K \to B_{E^*}$, определенное формулой $F_T(k)(e) = Te(k)$ для $k \in K$ и $e \in E$, является слабо* непрерывным согласно теоремы Гельфанда [22] (см. также [23, теорема VI.7.1]). Следовательно, суперпозиция $F = \varphi \circ F_T : K \to \lambda \cdot B_{X^*}$ слабо* непрерывна. Определим оператор $\widehat{T} : X \to C(K)$ равенством $\widehat{T}x(k) = F(k)(e)$ для $k \in K$ и $x \in X$. Вновь применяя теорему Гельфанда, заключаем, что $\widehat{T}$ — линейный непрерывный оператор, и поскольку $F(k) \in \lambda \cdot B_{X^*}$, то $\|\widehat{T}\| \leq \lambda$. Наконец, $\widehat{T}$ продолжает T, так как φ продолжает линейные функционалы. Действительно, $\widehat{T}e(k) = F(k)(e) = \varphi \circ F_T(k)(e) = F_T(k)(e) = Te(k)$ для $k \in K$ и $e \in E$.

Заметим, что проведенное доказательство фактически не использует метризуемость K, поэтому если считать K любым компактом, то вышеприведенные рассуждения является доказательством достаточности в предложении 2.1.

Необходимость. Предположим, что пара (E, X) имеет $(\lambda, \mathscr{C}_s)$-линейное свойство продолжения и E сепарабельно. Пусть $K := B_{E^*}$ со слабой* топологией. Тогда K — метризуемый компакт [23, V.5.1]. Определим оператор $T : E \to C(K)$ равенством $Te(e^*) = e^*(e)$ для всех $e \in E$ и $e^* \in B_{E^*}$. Его норма равна единице. Пусть $\widehat{T}$ — любое линейное продолжение T с $\|\widehat{T}\| \leq \lambda$, которое существует по условию. Далее через δ_{e^*} будем обозначать меру Дирака на $C(K)$, сосредоточенную в точке e^*. Определим $\varphi : B_{E^*} \to \lambda \cdot B_{X^*}$ соотношением $\varphi(e^*) = \hat{T}^*(\delta_{e^*})$. Здесь $\widehat{T}^*$ — сопряженный оператор. Несложно проверить, используя свойства сопряженного оператора, что φ слабо* — слабо* непрерывно. Из цепочки равенств

$$\varphi(e^*)(e) = \widehat{T}^*(\delta_{e^*})(e) = \delta_{e^*}(\hat{T}e) = \delta_{e^*}(Te) = e^*(e)$$

для $e \in E$ и $e^* \in B_{E^*}$ заключаем, что φ продолжает линейные функционалы. Дополнительные свойства φ устанавливаются так же, как и в предложении 2.1. $\square$

Теперь приведем сублинейную версию предложения 2.3.

Предложение 2.4. *Для того чтобы пара (E, X) имела $(\lambda, \mathscr{C}_s)$-сублинейное свойство продолжения, достаточно существования слабо* — слабо* непрерывного в топологии Вьеториса отображения $\Phi : cc(B_{E^*}) \to \lambda \cdot cc(B_{X^*})$, которое продолжает сублинейные функционалы. Если E сепарабельно, то оно является также и необходимым условием. Кроме того, отображение Φ можно считать четным или нечетным с $0 \in \Phi(0)$.*

Доказательство. Следует повторить доказательство предложения 2.2, заметив что для сепарабельного E пространство $C(cc(B_{E^*}))$ сепарабельно, так как компакт $cc(B_{E^*})$ метризуем [18, 4.5.22(e)]. Дополнительные свойства Φ проверяются так же, как и в предложении 2.2. $\square$

3. Условия продолжения для $\mathscr{L}$ и $\mathscr{L}_s$

Напомним, что проблема нахождения необходимых и достаточных условий продолжения линейных операторов со значениями в $\mathscr{L}$ поставлена в [2, с. 12]. Применяя характеристику линейных операторов $T : V \to Y$ для пространств Линденштраусса Y, вытекающую из [13, теорема 1], получаем следующее решение этой проблемы.

Предложение 3.1. *Пара (E, X) имеет $(\lambda, \mathscr{L})$-линейное свойство продолжения тогда и только тогда, когда существует аффинное слабо* — слабо* непрерывное отображение $\psi : B_{E^*} \to \lambda \cdot B_{X^*}$, которое продолжает линейные функционалы, и $\psi(0) = 0$.*

Доказательство. Необходимость. Если пара (E, X) обладает свойством линейного продолжения, то рассмотрим $T : E \to C(B_{E^*})$ как естественное вложение E в $C(B_{E^*})$, определенное формулой $T(e)(e^*) = e^*(e)$, где шар B_{E^*} наделен слабой* топологией. Хорошо известно, что пространство непрерывных функций $C(K)$ может быть «реализовано» в виде аффинного пространства на симплексе Шоке. Именно, $C(K)$ изометрически и порядково изоморфно аффинному пространству $A(M_K)$, где выпуклый компакт M_K, зависящий от выбора компакта K, определен соотношением $M_K = \{\nu \in C^*(K) : \|\nu\| = \nu(1) = 1\}$ и наделен слабой* топологией. С другой стороны, M_K является симплексом Шоке, так как он аффинно изоморфен базе решеточного конуса. Следовательно, пространство аффинных функций $A(M_K)$ является пространством Линденштраусса [16, разд. 4]. Предположим, что далее $K := B_{E^*}$. Обозначим через B изометрический и порядковый изоморфизм $C(B_{E^*})$ и $A(M_K)$. Заметим, что, во-первых, M_K содержит $\{\delta_{e^*} : e^* \in B_{E^*}\}$, во-вторых, $BTe(e^*) = e^*(e)$.

Пусть $\widehat{BT} : X \to A(M_K)$ есть продолжение BT с $\|\widehat{BT}\| \leq \lambda$, которое существует, так как пара (E, X) имеет $(\lambda, \mathscr{L})$-линейное свойство продолжения. Положим $\psi(e^*) = \widehat{BT}^*(\delta_{e^*})$, где $e^* \in B_{E^*}$ и δ_{e^*} — точечная мера Дирака, вычисляемая в пространстве аффинных функций $A(M_K)$. Тогда ψ является слабо* — слабо* непрерывным аффинным отображением B_{E^*} в $\lambda \cdot B_{X^*}$, которое продолжает линейные функционалы. Действительно, полагая $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ и $\alpha + \beta = 1$, $e_1^*, e_2^* \in B_{E^*}$, имеем

$$\psi(\alpha e_1^* + \beta e_2^*) = \widehat{BT}^*(\delta_{\alpha e_1^* + \beta e_2^*}) = \widehat{BT}^*(\alpha \delta_{e_1^*} + \beta \delta_{e_2^*}) = \alpha \psi(e_1^*) + \beta \psi(e_2^*);$$

$$\psi(e^*)(e) = \widehat{BT}^*(\delta_{e^*}) = BT(e)(e^*) = e^*(e).$$

Так как свойство $\psi(0) = 0$, очевидно, выполнено, необходимость доказана.

Достаточность. Если $\psi : B_{E^*} \to \lambda \cdot B_{X^*}$ является слабо* — слабо* непрерывным аффинным отображением, $\psi(0) = 0$ и ψ продолжает функционалы, то для каждого оператора $T : E \to Y$ с $\|T\| = 1$ суперпозиция $\psi \circ F_T : B_{L_1^+(\mu)} \to \lambda \cdot B_{X^*}$ является слабо* — слабо* непрерывным аффинным отображением, переводящим 0 в 0. Здесь $Y^* = L_1(\mu)$, а F_T — двойственное отображение оператора T, существование и свойства которого установлены в [13, теорема 1]. Применяя вновь [13, теорема 1], найдем единственное линейное продолжение $\widehat{T}$ линейного оператора T, для которого $F_{\widehat{T}} = \psi \circ F_T$ и $\|\widehat{T}\| \leq \lambda$.

Действительно, возьмем любые $e \in E$ и $y_+^* \in Y_+^*$, $\|y_+^*\| \leq 1$. В силу свойств двойственных отображений и свойства ψ сохранять линейные функционалы верны равенства

$$y_+^*(\widehat{T}e) = (\psi \circ F_T)(y_+^*)(e) = \psi(F_T(y_+^*))(e) = F_T(y_+^*)(e) = y_+^*(Te),$$

которые показывают, что если рассматривать $\widehat{T}e$ и Te для фиксированного $e \in E$ как формы на $B_{L_1^+(\mu)}$, то они равны, являются аффинными слабо* непрерывными и равными в нуле нулю. Так как конус $L_1^+(\mu)$ в $L_1(\mu)$ воспроизводящий, конус Y_+ будет нормальным. Поэтому возможно естественное линейное продолжение $\widehat{T}e$ и Te сначала на конус $L_1^+(\mu)$, так как норма на $L_1^+(\mu)$ аддитивна, а затем на все пространство $L_1(\mu)$, ибо конус Y_+ нормален. Таким образом, $\widehat{T}e$ и Te становятся равными линейными формами, сужения которых на все шары в $L_1(\mu)$ слабо* непрерывны [24, V.3.3]. Непрерывность рассматриваемых форм следует теперь из теоремы Банаха [25, IV.2.5]. Поэтому $\widehat{T}e = Te$ для всех $e \in E$. $\square$

Теперь получим критерий для сублинейных операторов.

Предложение 3.2. *Пара (E, X) имеет $(\lambda, \mathscr{L})$-сублинейное свойство продолжения тогда и только тогда, когда существует аффинное слабо* — слабо**

непрерывное в топологии Вьеториса отображение $\Psi : cc(B_{E^*}) \to \lambda \cdot cc(B_{X^*})$, которое продолжает сублинейные функционалы, и $\Psi(0) = 0$.

Доказательство. Достаточность. Пусть $S : E \to Y$ — непрерывный сублинейный оператор, где Y — пространство Линденштраусса. Не умаляя общности, считаем, что $\|S\| = 1$. Тогда его двойственное отображение [13, теорема 1] $F_S : B_{L_1^+(\mu)} \to cc(B_{E^*})$ будет слабо* — слабо* непрерывным в топологии Вьеториса аффинным отображением с $F_S(0) = 0$. Следовательно, суперпозиция $F = \Psi \circ F_S : K \to \lambda \cdot cc(B_{X^*})$ будет слабо* — слабо* непрерывным в топологии Вьеториса отображением $B_{L_1^+(\mu)}$ в $\lambda \cdot cc(B_{X^*})$, которое является аффинным и $F(0) = 0$. Вновь применяя [13, теорема 1], найдем такой непрерывный сублинейный оператор $\widehat{S} : X \to Y$, что для него $F_{\widehat{S}} = F$ и $\widehat{S}$ продолжает S. В самом деле, для всех $e \in E$ и $y_+^* \in B_{L_1^+(\mu)}$ имеем в силу определения F и свойства Ψ сохранять сублинейные функционалы следующую цепочку равенств:

$$
\begin{aligned}
y_+^*(\widehat{S}e) &= \sup\{x^*(e) : x^* \in F(y_+^*)\} = \sup\{x^*(e) : x^* \in \Psi \circ F_S(y_+^*)\} \\
&= \sup\{x^*(e) : x^* \in \Psi(F_S(y_+^*))\} = \sup\{e^*(e) : e^* \in F_S(y_+^*)\} = y_+^*(Se),
\end{aligned}
$$

которая показывает, что если рассматривать $\widehat{S}e$ и Se как формы на $B_{L_1^+(\mu)}$, то они равны, аффинны, слабо* непрерывны и равны в нуле нулю. Далее, очевидно, следует повторить рассуждения, приведенные при доказательстве достаточности в предложении 3.1, и заключить, что $\widehat{S}e = Se$ для всех $e \in E$.

Необходимость. Пусть пара (E, X) имеет $(\lambda, \mathscr{L})$-сублинейное свойство продолжения. Положим $K := cc(B_{E*})$ со слабой* топологией Вьеториса. Как и в доказательстве предложения 2.2 рассмотрим тождественное отображение $\mathrm{id} : K \to K$ как многозначное отображение K в $cc(B_{E^*})$. Согласно [21, теорема 1] определим непрерывный сублинейный оператор $S : E \to C(K)$ формулой

$$
Se(k) = \sup\{e^*(e) : e^* \in \mathrm{id}(k)\} = \sup\{e^*(e) : e^* \in k\},
$$

где $e \in E$ и $k \in K$. Этот оператор является непрерывным сублинейным оператором, и его норма равна единице. Так же, как и в доказательстве предложения 3.1, используем пространство непрерывных аффинных функций $A(M_K)$ на симплексе M_K.

Обозначим через B изометрический и порядковый изоморфизм $C(K)$ и $A(M_K)$. Тогда оператор BS является непрерывным сублинейным оператором и его норма так же, как и норма оператора S, равна единице.

Заметим далее, что, во-первых, M_K содержит $\{\delta_k : k \in K\}$, во-вторых, $BSe(\delta_k) = S(e)(k)$ для всех $e \in E$ и $k \in K$.

Пусть $\widehat{BS} : X \to A(M_K)$ есть продолжение BS с $\|\widehat{BS}\| \leq \lambda$, которое существует, так как $A(M_K)$ является пространством Линденштраусса . Положим $\Psi(k) = F_{\widehat{BS}}(\delta_k)$, где $k \in K$ и δ_k — точечная мера Дирака, вычисляемая в пространстве аффинных функций $A(M_K)$. Тогда [13, теорема 1] Ψ является слабо* — слабо* непрерывным аффинным отображением $K = cc(B_{E^*})$ в $\lambda \cdot B_{X^*}$, которое продолжает сублинейные функционалы.

Действительно, полагая $\alpha + \beta = 1$, $k_1, k_2 \in K$, имеем

$$
\Psi(\alpha k_1 + \beta k_2) = F_{\widehat{BS}}(\delta_{\alpha k_1 + \beta k_2}) = F_{\widehat{BS}}(\alpha \delta_{k_1} + \beta \delta_{k_2}) = \alpha \Psi(k_1) + \beta \Psi(k_2)
$$

и для $e \in E$, $k \in K$ получаем

$$
\sup\{x^*(e) : x^* \in \Psi(k)\} = \sup\{x^*(e) : x^* \in F_{\widehat{BS}}(\delta_k)\} = \delta_k(\widehat{BT}(e) = S(e)(k),
$$

т. е. Ψ продолжает сублинейные функционалы. Так как свойство $\Psi(0) = 0$, очевидно, выполнено, необходимость доказана. $\square$

Переходим к условию продолжения для класса $\mathscr{L}_s$.

Предложение 3.3. *Для того чтобы пара (E, X) имела $(\lambda, \mathscr{L}_s)$-линейное свойство продолжения, достаточно существование аффинного слабо* — слабо* непрерывного отображения $\psi : B_E^* \to \lambda \cdot B_X^*$, которое продолжает линейные функционалы, и $\psi(0) = 0$. Если E сепарабельно, то указанное условие также необходимо.*

Доказательство. Следует повторить доказательство предложения 3.1, заметив что для сепарабельного E пространство $C(B_{E^*})$ сепарабельно, так как B_{E^*} — метризуемый компакт [23, V.5.1]. $\square$

Предложение 3.4. *Для того чтобы пара (E, X) имела $(\lambda, \mathscr{L}_s)$ сублинейное свойство продолжения, достаточно существование аффинного слабо* — слабо* непрерывного отображения $\Psi : cc(B_{E^*}) \to \lambda \cdot cc(B_{X^*})$, которое продолжает сублинейные функционалы, и $\Psi(0) = 0$. Если E сепарабельно, то указанное условие также необходимо.*

Доказательство. Следует повторить доказательство предложения 3.2, заметив что для сепарабельного E пространство $C(cc(B_{E^*}))$ сепарабельно, так как $cc(B_{E^*})$ — метризуемый компакт [18, 4.522(e)]. $\square$

Гомологический подход к задачам продолжения отображений (см., например, [2, 8, 9]) рассмотрим в следующем разделе.

4. Условия продолжения при гомологическом подходе

Пусть задана короткая точная последовательность в абелевой категории банаховых пространств и действующих в них линейных операторов

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{j} X \xrightarrow{q} Z \longrightarrow 0 \equiv H,$$

т. е. ядро каждого оператора совпадает с образом предшествующего оператора. Теорема Банаха об открытом отображении и замкнутом графике гарантирует, что j является изометрическим вложением и образ $j(E)$ — замкнутое линейное подпространство в X (в общем случае после перенормировки X), а q является фактор-отображением и Z — фактор-пространством $Z = X/j(E)$ [8].

Пусть заданы класс $\mathscr{A}$ банаховых пространств и число $\lambda \geq 1$. Говорят [2, 8], что короткая точная последовательность H *линейно* $(\lambda, \mathscr{A})$*-тривиальна* или $(\lambda, \mathscr{A})$*-разложима*, если для каждого $A \in \mathscr{A}$ и любого линейного оператора $T : E \to A$ существует его линейное продолжение $\widehat{T} : X \to A$, удовлетворяющее соотношению $\|\widehat{T}\| \leq \lambda \cdot \|T\|$.

Здесь термин продолжение означает, что оператор $Te = Tj^{-1}je$ рассматривается как оператор Tj^{-1}, заданный на подпространстве $j(E)$.

В случае, когда класс $\mathscr{A}$ состоит из упорядоченных пространств, будем говорить, что короткая точная последовательность H *сублинейно* $(\lambda, \mathscr{A})$*-тривиальна* или $(\lambda, \mathscr{A})$*-разложима*, если в предыдущем определении заменить линейные операторы сублинейными операторами. Непосредственно из определений вытекает

Предложение 4.1. *Короткая точная последовательность H линейно (сублинейно) $(\lambda, \mathscr{A})$-тривиальна тогда и только тогда, когда пара $(j(E), X)$ имеет линейное (сублинейное) свойство продолжения. Обратно, пара (E, X) имеет линейное или сублинейное свойство продолжения тогда и только тогда, когда короткая точная последовательность*

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{id} X \xrightarrow{q} X/E \longrightarrow 0,$$

где $\mathrm{id} : E \to E$ *— тождественное отображение, а q — факторное отображение, линейно (сублинейно) $(\lambda, \mathscr{A})$-тривиальна.*

Естественно задать вопрос о том, как изменяются условия, которые получены в предыдущих двух частях, если вместо изучения пар пространств исследовать короткие точные последовательности. Ответ оказывается очень простым и дается в [2, лемма 2.2].

При гомологическом подходе к задаче продолжения, когда вместо подпространства E пространства X задана короткая точная последовательность H, критерий линейной $(\lambda, \mathscr{C})$-тривиальности сохраняется в той же самой форме, как и в предложении 2.1, если условие продолжения линейных функционалов заменить эквивалентным операторным равенством $j^*\varphi = \mathrm{id}$, где здесь и далее j^* — сопряженный к оператору j, а id — тождественный оператор [2, лемма 2.1].

Аналогично можно показать, что для короткой точной последовательности H критерий линейной $(\lambda, \mathscr{L})$-тривиальности сохраняется в той же самой форме, как и в предложении 3.1, если условие продолжения линейных функционалов заменить эквивалентным операторным равенством $j^*\psi = \mathrm{id}$.

При гомологическом подходе к задаче продолжения сублинейных операторов, когда вместо подпространства E пространства X задана короткая точная последовательность H, критерий сублинейной $(\lambda, \mathscr{C})$-тривиальности сохраняется в той же самой форме, как и в предложении 2.2, если условие продолжения сублинейных функционалов заменить эквивалентным операторным равенством $cc(j^*)\Phi = \mathrm{id}$, а в предложении 3.2 — $cc(j^*)\Psi = \mathrm{id}$.

Аналогичные ответы верны и для пространств значений линейных и сублинейных операторов в классах $\mathscr{C}_s$ и $\mathscr{L}_s$. Здесь условие продолжения линейных или сублинейных функционалов также надо заменить соответствующим операторным равенством.

5. Связи между линейными и сублинейными свойствами продолжения для $\mathscr{C}$ и $\mathscr{C}_s$

Изучим связи между линейными и сублинейными свойствами продолжения для указанных классов пространств. Начнем с класса $\mathscr{C}$.

Теорема 5.1. *Если пара (E, X) имеет $(\lambda, \mathscr{C})$-линейное свойство продолжения, то она имеет и $(\lambda, \mathscr{C})$-сублинейное свойство продолжения. Если же дополнительно X сепарабельно, то верно и обратное утверждение.*

Доказательство. Применим предложение 2.1 и найдем непрерывное отображение $\varphi : B_{E^*} \to \lambda \cdot B_{X^*}$, которое продолжает линейные функционалы. Определим отображение $\Phi := h(cc(\varphi))$, где, напомним, h — замкнутая выпуклая оболочка, а cc — ограничение $\exp_c$ на выпуклые компактные подмножества. В силу определения cc получаем, что $cc(\varphi) : cc(B_{E^*}) \to \lambda \cdot \exp_c(B_{X^*})$, а $\Phi : cc(B_{E^*}) \to \lambda \cdot cc(B_{X^*})$. Отображение Φ слабо* — слабо* непрерывно в топологии Вьеториса, так как функторы cc и h слабо* — слабо* непрерывны в топологии Вьеториса. Чтобы применить предложение 2.2, осталось показать, что отображение Φ продолжает сублинейные функционалы. Вначале заметим, что для любого слабо* компактного подмножества $r \in X^*$ и любого $x \in X$ справедливо равенство

$$\sup\{x^*(x) : x^* \in r\} = \sup\{x^*(x) : x^* \in h(r)\}.$$

Возьмем теперь слабо* компактное выпуклое множество k из $cc(B_{E^*})$ и $e \in E$. Так как непрерывный образ компакта является компактом, то, полагая в предыдущем равенстве $r = \varphi(k)$, имеем цепочку равенств

$$\sup\{x^*(e) : x^* \in \Phi(k)\} = \sup\{x^*(e) : x^* \in h(\varphi(k))\}$$
$$= \sup\{x^*(e) : x^* \in \varphi(k)\} = \sup\{e^*(e) : e^* \in k\},$$

которая означает, что Φ продолжает сублинейные функционалы. Применяя предложение 2.2, заключаем, что пара (E, X) имеет $(\lambda, \mathscr{C})$-сублинейное свойство продолжения.

Если дополнительно считать, что X сепарабельно, то предположим, что для пары (E, X) справедливо $(\lambda, \mathscr{C})$-сублинейное свойство продолжения. Надо доказать, что для пары (E, X) справедливо $(\lambda, \mathscr{C})$-линейное свойство продолжения. Возможно провести два доказательства. В первом из них используются субдифференциалы сублинейных операторов, а во втором — теорема Майкла о селекциях многозначных отображений.

1. Возьмем любой линейный оператор $T : E \to C(K)$, где K — компакт. Не умаляя общности, считаем, что $\|T\| = 1$. В силу сделанных предположений можно найти сублинейное продолжение линейного оператора T, которое обозначим символом $S : X \to C(K)$. Имеем $\|S\| \leq \lambda$. Так как область определения сублинейного оператора S — пространство X — сепарабельна, он является субдифференцируемым в нуле оператором, т. е. его субдифференциал в нуле ∂S или, что то же самое, множество линейных операторов $\widehat{T} : X \to C(K)$, удовлетворяющих неравенствам $\widehat{T}x \leq Sx$ для всех $x \in X$, непустой [21, предложение 1] (см. также [11, 3.7.2(3)]). Любой оператор $\widehat{T} \in \partial S$ является линейным продолжением оператора T, норма которого $\|\widehat{T}\| \leq \lambda$.

2. Применяя предложение 2.2, найдем отображение $\Phi : cc(B_{E^*}) \to \lambda \cdot cc(B_{X^*})$. Не умаляя общности, можно считать, что отображение Φ нечетно. Рассмотрим далее его сужение на B_{E^*} как непрерывное нечетное многозначное отображение в $\lambda \cdot B_{X^*}$. Так как X сепарабельно, область значений многозначного отображения является метризуемым компактом, поэтому применима теорема Майкла о непрерывных селекциях. Однако нам требуется, чтобы сечение, как и отображение Φ, было нечетным. Этого несложно добиться, если в доказательстве теоремы Майкла в ее аппроксимационной лемме выбирать аппроксимацию в виде нечетного отображения (см., например, доказательство теоремы Майкла в [19, лемма VI.2.7]). Итак, будем считать, что селекция φ рассматриваемого сужения будет нечетным отображением. Покажем, что φ продолжает линейные функционалы. Фиксируем $e^* \in B_{E^*}$ и $e \in E$. Тогда с одной стороны имеем оценку

$$\varphi(e^*)(e) \leq \sup\{x^*(e) : x^* \in \Phi(e^*)\} = e^*(e),$$

так как φ является непрерывной селекцией Φ, а Φ продолжает сублинейные функционалы. Используя эти же соображения для противоположной точки $-e^*$, получаем, что

$$-\varphi(e^*)(e) = \varphi(-e^*)(e) \leq \sup\{x^*(e) : x^* \in \Phi(-e^*)\} = -e^*(e)$$

в силу того, что φ нечетно. Следовательно, $\varphi(e^*)(e) = e^*(e)$. Завершает доказательство применение предложения 2.1. $\square$

Используя определения и результаты предыдущего раздела, сформулируем гомологический аналог теоремы 5.1.

Теорема 5.2. *Если короткая точная последовательность*

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{j} X \xrightarrow{q} Z \longrightarrow 0 \equiv H$$

$(\lambda, \mathscr{C})$-линейно тривиальна, то она и $(\lambda, \mathscr{C})$-сублинейно тривиальна. Если же, сверх того, X сепарабельно, то верно и обратное утверждение.

Из теоремы 5.1 и определений $(\lambda, \mathscr{C})$-линейных и сублинейных свойств продолжений вытекает также

Теорема 5.3. *Если банахово пространство X имеет $(\lambda, \mathscr{C})$-линейное свойство продолжения, то оно имеет и $(\lambda, \mathscr{C})$-сублинейное свойство продолжения. Если же X сепарабельно, то верно обратное утверждение.* $\square$

Переходим к изучению свойств для операторов со значениями в пространствах из класса $\mathscr{C}_s$.

Теорема 5.4. *Пусть E сепарабельно, тогда если пара (E, X) имеет $(\lambda, \mathscr{C}_s)$-линейное свойство продолжений, то она имеет и $(\lambda, \mathscr{C}_s)$-сублинейное свойство продолжений. Если же X сепарабельно, то верно обратное утверждение.*

Доказательство. Следует повторить доказательство теоремы 5.1, заменив в нем ссылку на предложение 2.1 ссылкой на предложение 2.3, а ссылку на предложение 2.2 — ссылкой на предложение 2.4. $\square$

Из теоремы 5.4 немедленно вытекает

Теорема 5.5. *Пусть X сепарабельно, тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) *X имеет $(\lambda, \mathscr{C}_s)$-линейное свойство продолжения;*

(ii) *X имеет $(\lambda, \mathscr{C}_s)$-сублинейное свойство продолжения.*

6. Связи между линейными и сублинейными свойствами продолжения для $\mathscr{L}$ и $\mathscr{L}_s$

Продолжим изучение связей и начнем с класса $\mathscr{L}$.

Теорема 6.1. *Если пара (E, X) имеет $(\lambda, \mathscr{L})$-линейное свойство продолжения, то она имеет и $(\lambda, \mathscr{L})$-сублинейное свойство продолжения. Если же X сепарабельно, то верно и обратное утверждение.*

Доказательство. Пусть пара (E, X) имеет $(\lambda, \mathscr{L})$-линейное свойство продолжения. Применяя предложение 3.1, найдем слабо* — слабо* непрерывное аффинное отображение $\psi : B_{E^*} \to \lambda \cdot B_{X^*}$, которое продолжает линейные функционалы, и $\psi(0) = 0$. Определим отображение $\Psi := cc(\psi)$, где, напомним, cc — ограничение $\exp_c$ на выпуклые компактные подмножества. В силу определения отображение $\Phi : cc(B_{E^*}) \to \lambda \cdot cc(B_{X^*})$ слабо* — слабо* непрерывно в топологии Вьеториса, аффинно и $\Psi(0) = 0$. Чтобы применить предложение 3.2, осталось показать, что отображение Ψ продолжает сублинейные функционалы.

Для этого возьмем слабо* компактное выпуклое множество k из $cc(B_{E^*})$ и $e \in E$. Так как ψ продолжает линейные функционалы, верны следующие равенства:

$$\sup\{x^*(e) : x^* \in \Psi(k)\} = \sup\{x^*(e) : x^* \in cc(\psi)(k)\} \\ = \sup\{x^*(e) : x^* \in \psi(k)\} = \sup\{e^*(e) : e^* \in k\},$$

которые означают, что Ψ продолжает сублинейные функционалы.

Если X сепарабельно, то предположим, что для пары (E, X) справедливо $(\lambda, \mathscr{L})$-сублинейное свойство продолжения. Надо доказать, что для пары (E, X) справедливо $(\lambda, \mathscr{C})$-линейное свойство продолжения. Так же, как и в теореме 5.1, можно привести два доказательства. В первом из них используются субдифференциалы сублинейных операторов, а во втором — аффинные непрерывные селекции многозначных отображений.

1. Возьмем любой линейный оператор $T : E \to Y$, где Y — пространство Линденштраусса. Не умаляя общности, считаем, что $\|T\| = 1$. В силу сделанных предположений можно найти сублинейное продолжение линейного оператора T, которое обозначим символом $S : X \to Y$. Имеем $\|S\| \le \lambda$. Так как область определения сублинейного оператора S — пространство X — сепарабельна, он является субдифференцируемым в нуле оператором, т. е. его субдифференциал ∂S или, что то же самое, множество линейных операторов $\widehat{T} : X \to Y$, удовлетворяющих неравенствам $\widehat{T}x \le Sx$ для всех $x \in X$, непустой [13, теорема 4]. Любой оператор $\widehat{T} \in \partial S$ является линейным продолжением оператора T, у которого $\|\widehat{T}\| \le \lambda$.

2. Применяя предложение 3.2, найдем отображение $\Psi : cc(B_{E^*}) \to \lambda \cdot cc(B_{X^*})$, которое продолжает сублинейные функционалы, является слабо* — слабо* непрерывным в топологии Вьеториса аффинным отображением и $\Psi(0) = 0$. Не умаляя общности, считаем, что отображение Ψ нечетно. Рассмотрим далее его сужение на B_{E^*} как слабо* — слабо* непрерывное в топологии Вьеториса многозначное отображение в $\lambda \cdot B_{X^*}$. Автору неизвестна ни одна теорема о непрерывных аффинных селекциях, которую возможно было непосредственно применить в рассматриваемой ситуации. Тем не менее такие непрерывные аффинные селекции на самом деле существуют. Чтобы убедиться в этом, надо повторить доказательство необходимости предложения 3.2. Напомним, что отображение Ψ определено формулой $\Psi(k) = F_{\widehat{BS}}(\delta_k)$, где $k \in K$ и δ_k — точечная мера Дирака, вычисляемая в пространстве аффинных функций $A(M_K)$. Возьмем теперь любой оператор $\widehat{T} \in \partial\widehat{BS}$. Непрерывная аффинная селекция $\psi(k) = F_{\widehat{T}}(\delta_k)$ найдена. Так как значения оператора S являются нечетными функциями, не умаляя общности, можно считать, что и значения оператора $\widehat{T}$ также являются нечетными функции. Таким образом, можно и селекцию считать также нечетным отображением. Так же, как и в теореме 5.1, проверяем, что отображение ψ продолжает линейные функционалы. Завершает доказательство применение предложения 3.1. $\square$

Гомологический вариант теоремы 6.1 не отличается от его аналога — теоремы 5.2. Однако для полноты изложения приведем ее формулировку.

Теорема 6.2. *Если короткая точная последовательность*

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{j} X \xrightarrow{q} Z \longrightarrow 0 \equiv H$$

$(\lambda, \mathscr{L})$-линейно тривиальна, то она и $(\lambda, \mathscr{L})$-сублинейно тривиальна. Если же, сверх того, X сепарабельно, то верно и обратное утверждение.

Из теоремы 6.1 и определений $(\lambda, \mathscr{L})$-линейных и сублинейных свойств продолжений немедленно вытекает

Теорема 6.3. *Если банахово пространство X имеет $(\lambda, \mathscr{L})$-линейное свойство продолжения, то оно имеет и $(\lambda, \mathscr{L})$-сублинейное свойство продолжения. Если же X сепарабельно, то верно и обратное утверждение.* $\square$

Переходим к изучению свойств продолжений для операторов со значениями в пространствах из класса $\mathscr{L}_s$.

Теорема 6.4. *Пусть E сепарабельно. Тогда если пара (E, X) имеет $(\lambda, \mathscr{L}_s)$-линейное свойство продолжения, то она имеет и $(\lambda, \mathscr{L}_s)$-сублинейное свойство продолжения. Если же X сепарабельно, то верно обратное утверждение.*

Доказательство. Следует повторить доказательство теоремы 6.1, заменив в нем ссылку на предложение 3.1 ссылкой на предложение 3.3, а ссылку на предложение 3.2 — ссылкой на предложение 3.4. $\square$

Из теоремы 6.4 немедленно вытекает

Теорема 6.5. *Пусть X сепарабельно. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) *X имеет $(\lambda, \mathscr{L}_s)$-линейное свойство продолжения;*

(ii) *X имеет $(\lambda, \mathscr{L}_s)$-сублинейное свойство продолжения.*

7. Применения

Рассмотрим четыре применения полученных результатов.

7.1. Пространство ℓ_p, $1 < p < \infty$. Пространство ℓ_p, $1 < p < \infty$, и любое его подпространство E обладают свойством продолжения сублинейных операторов со значениями в классе $\mathscr{L}$ с $\lambda = 1$. Точнее, верна следующая

Теорема 7.1. *Пусть даны ℓ_p для $1 < p < \infty$. Тогда ℓ_p имеет $(1, \mathscr{L})$-сублинейное свойство продолжения.*

Доказательство. Пусть E — любое подпространство в ℓ_p для $1 < p < \infty$. Тогда равномерная выпуклость шара в ℓ_q, где $p^{-1} + q^{-1} = 1$, дает единственный функционал $\psi(e^*)$ на ℓ_p, который продолжает ненулевые функционалы $e^* \in B_{E^*}$ с $\|\psi(e^*)\| = \|e^*\|$. Нетрудно заметить, что отображение $\psi : B_{E^*} \to B_{\ell_q}$ с $\psi(0) = 0$ является аффинным и слабо* — слабо* непрерывным и, следовательно, в силу предложения 3.1 (E, ℓ_p) имеет $(1, \mathscr{L})$ линейное свойство продолжения. Применяя далее теорему 6.1, заключаем, что (E, ℓ_p) имеет $(1, \mathscr{L})$-сублинейное свойство продолжения. Так как подпространство E в ℓ_p для $1 < p < \infty$ выбрано произвольно, то ℓ_p для $1 < p < \infty$ имеет $(1, \mathscr{L})$-сублинейное свойство продолжения. $\square$

Замечание. Ранее для линейных операторов и класса $\mathscr{C}$ этот результат отмечен в [1, следствие 1.11; 12, пример 1], а для класса $\mathscr{G}$ пространств Гротендика — в [2, с. 6].

7.2. Сублинейная версия теоремы Линденштраусса и Пелчинского. В [26, теорема 3.1] Линденштраусс и Пелчинский получили следующий результат.

Теорема Линденштраусса и Пелчинского. *Пусть E — подпространство c_0, K — компакт, а T — линейный оператор из E в $C(K)$. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ существует линейное продолжение $\widehat{T} : c_0 \to C(K)$ оператора T с $\|\widehat{T}\| \le (1+\varepsilon)\|T\|$.*

Авторы в [26] отметили, что их результат остается верным, если заменить $C(K)$ пространствами Линденштраусса (доказательство см. в [2]). Следовательно, с учетом теоремы 6.3 теорема Линденштраусса и Пелчинского может быть сформулирована в сублинейной версии как

Теорема 7.2. *Пусть E — подпространство c_0, Y — пространство Линденштраусса, а S — сублинейный оператор из E в Y. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ существует сублинейное продолжение $\widehat{S} : c_0 \to Y$ оператора S с $\|\widehat{S}\| \le (1+\varepsilon)\|S\|$, т. е., иными словами, для каждого $\varepsilon > 0$ пространство c_0 имеет $(1+\varepsilon, \mathscr{L})$-сублинейное свойство продолжения.*

7.3. Сублинейная версия теоремы Джонсона и Циппина. В [27, теорема 4] доказана

Теорема Джонсона и Циппина. *Для каждого $\varepsilon > 0$ и любого линейного непрерывного оператора $T : E \to C(K)$, где E — подпространство $c_0(\Gamma)$, Γ — множество индексов любой мощности, а K — компакт, существует его линейное продолжение $\widehat{T} : c_0(\Gamma) \to C(K)$ такое, что $\|\widehat{T}\| \le (1+\varepsilon)\|T\|$.*

Применяя теорему 6.1, получаем следующий результат.

Теорема 7.3. *Для каждого $\varepsilon > 0$ и любого сублинейного оператора $S : E \to Y$, где E — подпространство пространства $c_0(\Gamma)$, в котором Γ — множество индексов любой мощности, а Y — пространство Линденштраусса, существует его сублинейное продолжение $\widehat{S} : c_0(\Gamma) \to Y$ такое, что $\|\widehat{T}\| \le (1+\varepsilon)\|T\|$, т. е. для каждого $\varepsilon > 0$ пространство $c_0(\Gamma)$ имеет $(1+\varepsilon, \mathscr{L})$-сублинейное свойство продолжения.*

7.4. Сублинейная версия одной теоремы Калтона. В этом пункте используем класс $\mathscr{C}_s$ пространств $C(K)$, когда компакт K метризуем, что равносильно, как известно, сепарабельности $C(K)$. В следующей теореме [3, теорема 7.1] добавлено еще два условия (7) и (8) о продолжении сублинейных операторов. Прежде чем ее формулировать, напомним два понятия: тип банахова пространства [3, разд. 3] и липшицево свойство продолжения [3, разд. 2].

Пусть X — банахово пространство. *Типом* на X называется функция $\tau : X \to [0,\infty)$, имеющая вид $\tau(x) = \lim_d \|x + x_d\|$, где $(x_d)_{d\in D}$ — равномерно ограниченная сеть в X. Если X сепарабельно, то каждый тип может быть представлен последовательностью, т. е. $\tau(x) = \lim_{n\to\infty} \|x + x_n\|$. В общем виде говорят, что τ является *секвенциальным типом*, если он представлен в виде

$$\tau(x) = \lim_{n\in\mathscr{U}\to\infty} \|x + x_n\| \tag{7.1}$$

для некоторого непринципиального или свободного ультрафильтра $\mathscr{U}$.

Тип τ на X^* называется *слабо* нулевым*, если он представлен в виде формулы (7.1) со слабо* сходящей к нулю последовательностью $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.

Пусть $\mathscr{A}$ — класс банаховых пространств. Пусть далее даны метрическое пространство (M,d) и его подпространство C с индуцированной метрикой. Напомним, что отображение $f : M \to A$, где $A \in \mathscr{A}$, называется *липшицевым*, если

$\|f(x)-f(y)\| \le kd(x,y)$ для всех $x, y \in M$ и некоторой константы k. Минимальная константа, удовлетворяющая этому неравенству, называется *липшицевой константой* и, напомним, определяется соотношением

$$\operatorname{Lip}(f) = \sup\left\{\frac{\|f(x)-f(y)\|}{d(x,y)} : x, y \in M,\ x \ne y\right\}.$$

Для заданной константы $\lambda \ge 1$ говорят [3, разд. 2], что пара (C, M) имеет $(\lambda, \mathscr{A})$ *липшицево свойство продолжения*, если для каждого $A \in \mathscr{A}$ и липшицева отображения $f : C \to A$ существует липшицево продолжение $\hat f : C \to A$, для которого верно неравенство $\operatorname{Lip}(\hat f) \le \lambda \cdot \operatorname{Lip}(f)$. Заметим, что все изучаемые сублинейные операторы S липшицевы, при этом $\operatorname{Lip}(S) = \|S\|$.

Из теорем 5.4, 5.5 и [3, теорема 7.1] вытекает

Теорема 7.4. *Пусть X — сепарабельное банахово пространство. Следующие условия для X эквивалентны:*

(1) *для каждого $\varepsilon > 0$ X имеет $(1+\varepsilon, \mathscr{C}_s)$-линейное свойство продолжения;*

(2) *для каждого $\varepsilon > 0$ пара (E, X) имеет $(1+\varepsilon, \mathscr{C}_s)$-линейное свойство продолжения для каждого замкнутого подпространства E коразмерности один;*

(3) *для каждого $\varepsilon > 0$ пара (C, X) имеет $(1+\varepsilon, \mathscr{C}_s)$-липшицево свойство продолжения для каждого замкнутого подпространства C в X;*

(4) *для каждого $\varepsilon > 0$ пара (C, X) имеет $(1+\varepsilon, \mathscr{C}_s)$-липшицево свойство продолжения для каждого замкнутого выпуклого подпространства C в X;*

(5) *для каждого $\varepsilon > 0$ пара (C, X) имеет $(1+\varepsilon, \mathscr{C}_s)$-липшицево свойство продолжения для каждого замкнутого ограниченного выпуклого подпространства C в X;*

(6) *пусть σ и τ — слабо*-нулевые типы на X^*; тогда для $u^*, v^* \in X^*$ существует $0 \le \theta \le 1$ такое, что если $w^* = (1-\theta)u^* + \theta v^*$, то*

$$\max(\sigma(w^*), \tau(w^*)) \le \max(\sigma(u^*), \tau(v^*));$$

(7) *для каждого $\varepsilon > 0$ X имеет $(1+\varepsilon, \mathscr{C}_s)$-сублинейное свойство продолжения;*

(8) *для каждого $\varepsilon > 0$ пара (E, X) имеет $(1+\varepsilon, \mathscr{C}_s)$-сублинейное свойство продолжения для каждого замкнутого подпространства E коразмерности один.*

Доказательство. Эквивалентность условий (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3) $\Leftrightarrow$ (4) $\Leftrightarrow$ (5) $\Leftrightarrow$ (6) доказана в [3, теорема 7.1]. Так как X сепарабельно, эквивалентность условий (1) и (7) установлена в теореме 5.5, а эквивалентность условий (2) и (8) получена в теореме 5.4. $\square$

В заключение приведем примеры пространств, которые удовлетворяют эквивалентным условиям теоремы 7.4. Хорошо известно, что это $X = \ell_p$, где $1 < p < \infty$ [1, следствие 1.11; 12, пример 1] или $X = c_0$ [26, теорема 3.1] (см. также теоремы 7.1 и 7.2). Другие примеры читатель может найти в [3, теорема 7.10, следствия 7.11, 7.12].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Zippin M.* Extension of bounded linear operators // Handbook of the geometry of Banach spaces. Amsterdam: North-Holland, 2003. V. 2. P. 1703–1741.
2. *Castillo J. M. F., Suárez J.* Extending operators into Lindenstrauss spaces // Israel J. Math. 2009. V. 169, N 1. P. 1–27.
3. *Kalton N. J.* Extension of linear operators and Lipschitz maps into $C(K)$-spaces // New York J. Math. 2007. V. 13. P. 317–381.

4. *Kalton N. J.* Extending Lipschitz maps into $C(K)$-spaces // Israel J. Math. 2007. V. 162, N 1. P. 275–315.
5. *Kalton N. J.* Automorphisms of $C(K)$-spaces and extension of linear operators // Illinois J. Math. 2008. V. 52, N 1. P. 279–317.
6. *Moreno Y., Plichko A.* On automorphic Banach spaces // Israel J. Math. 2009. V. 169, N 1. P. 29–45.
7. *Lancien G., Randrianantoanina B.* On the extension of Hölder maps with values in spaces of continuous functions // Israel J. Math. 2005. V. 147, N 1. P. 75–92.
8. *Castillo J. M. F., Moreno Y.* Extensions by spaces of continuous functions // Proc. Amer. Math. Soc. 2008. V. 136, N 7. P. 2417–2423.
9. *Castillo J. M. F., Moreno Y., Suárez J.* On Lindenstrauss–Pelczyński spaces // Stud. Math. 2006. V. 174, N 3. P. 213–231. Available at: arXiv:math/ 0502081v2 [math.FA] 20 Mar 2005.
10. *Castillo J. M. F., García R., Jaramillo J. A.* Extension of bilinear forms on Banach spaces // Proc. Amer. Math. Soc. 2001. V. 129, N 12. P. 3647–3656.
11. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Субдифференциальное исчисление. Теория и приложения. М.: Наука, 2007.
12. *Zippin M.* A global approach to certain operator extension problems // Functional analysis. Berlin: Springer-Verl., 1991. P. 78–84. (Lect. Notes Math.; V. 1470).
13. *Линке Ю. Э.* Сублинейные операторы и пространства Линденштраусса // Докл. АН СССР. 1977. Т. 234, № 1. С. 26–29.
14. *Bessaga C., Pełczyński A.* Selected topics in infinite dimensional topology. Warszawa: PWN, 1975. (Monogr. Mat.; V. 58).
15. *Lindenstrauss J., Wulbert D. E.* On the classification of the Banach spaces whose duals are L_1 spaces // J. Funct. Anal. 1969. V. 4, N 3. P. 332–349.
16. *Lazar A. J., Lindenstrauss J.* Banach spaces whose duals are L_1 spaces and their representing matrices // Acta Math. 1971. V. 126, N 1. P. 165–193.
17. *Olsen G. H.* On the classification of complex Lindenstrauss spaces // Math. Scand. 1974. V. 35, N 2. P. 237–258.
18. *Энгелькинг Р.* Общая топология. М.: Мир, 1986.
19. *Федорчук В. В., Филиппов В. В.* Общая топология, основные конструкции. М.: Физматлит, 2006.
20. *Bazylevych L., Repovš D., Zarichnyi M.* Hyperspace of convex compacta of nonmetrizable compact convex subspaces of locally convex spaces // Topol. Appl. 2008. V. 155, N 8. P. 764–772.
21. *Линке Ю. Э.* Об опорных множествах сублинейных операторов // Докл. АН СССР. 1972. Т. 207, № 3. С. 531–533.
22. *Гельфанд И. М.* Абстрактные функции и линейные операторы // Мат. сб. 1938. Т. 4, № 2. С. 235–286.
23. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Общая теория. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
24. *Шефер Х.* Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1973.
25. *Бурбаки Н.* Топологические векторные пространства. М.: Изд-во иностр. лит., 1959.
26. *Lindenstrauss J., Pełczyński A.* Contributions to the theory of the classical Banach spaces // J. Funct. Anal. 1971. V. 8, N 2. P. 225–249.
27. *Johnson W. B., Zippin M.* Extension of operators from subspaces of $c_0(\Gamma)$ into $C(K)$ spaces // Proc. Amer. Math. Soc. 1989. V. 107, N 3. P. 751–754.

Статья поступила 10 февраля 2010 г.

Линке Юрий Эрниевич
Институт динамики систем и теории управления СО РАН,
ул. Лермонтова, 134, Иркутск 664033
linke@icc.ru