Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2010. Том 51, № 6

УДК 512.542

О КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ СВЕРХРАЗРЕШИМОГО ТИПА

А. Ф. Васильев, Т. И. Васильева, В. Н. Тютянов

Аннотация. Исследуются свойства конечных групп, у которых всякую силовскую подгруппу можно соединить с группой цепью подгрупп с простыми индексами. Установлена разрешимость таких групп. Доказано, что класс всех конечных групп с данным свойством силовских подгрупп является наследственной насыщенной формацией. Для таких групп найдены аналоги известных теорем о произведениях нормальных сверхразрешимых подгрупп.

Ключевые слова: конечная группа, $\mathbb{P}$-субнормальная подгруппа, w-сверхразрешимая группа, насыщенная формация.

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Как следует из знаменитой теоремы Хупперта [1], группа G сверхразрешима тогда и только тогда, когда любая подгруппа из G может быть соединена с группой G цепью подгрупп с простыми индексами. Этот результат инициирует следующее

Определение 1. Подгруппа H группы G называется $\mathbb{P}$-*субнормальной* в G, если либо $H = G$, либо существует цепь подгрупп $H = H_0 \subset H_1 \subset \dots \subset H_{n-1} \subset H_n = G$ такая, что $|H_i : H_{i-1}|$ — простое число для любого $i = 1, \dots, n$. Обозначается $H\, \mathbb{P}\text{-}sn\, G$.

Возникает задача изучения групп, у которых каждая подгруппа из заданной системы подгрупп является $\mathbb{P}$-субнормальной. В работе [2] Л. С. Казарин описал неабелевы композиционные факторы конечных групп, у которых единичная подгруппа является $\mathbb{P}$-субнормальной в группе G.

Опорной системой подгрупп группы является множество ее силовских подгрупп, знание строения и свойств вложения которых позволяет во многих случаях вскрыть строение всей группы. Например, отметим следующий хорошо известный результат: группа нильпотентна тогда и только тогда, когда любая ее силовская подгруппа является субнормальной.

Определение 2. Группу G назовем *расширенно сверхразрешимой* (кратко w-*сверхразрешимой*), если любая силовская подгруппа группы G является $\mathbb{P}$-субнормальной в G.

По определению единичная группа является w-сверхразрешимой.

Обозначим через $\mathrm{w}\mathfrak{U}$ класс всех w-сверхразрешимых групп. Заметим, что класс $\mathfrak{U}$ всех сверхразрешимых групп содержится в $\mathrm{w}\mathfrak{U}$. Следующий пример показывает, что обратное включение в общем случае неверно.

© 2010 Васильев А. Ф., Васильева Т. И., Тютянов В. Н.

Пример 1. Пусть S — симметрическая группа степени 3. Согласно [3, гл. В, теорема 10.6] существует точный неприводимый S-модуль U над полем F_7 из 7 элементов. Рассмотрим полупрямое произведение $G = [U]S$. Так как подгруппа S неабелева, группа G не является сверхразрешимой. Из сверхразрешимости G/U следует, что $H_1 = UG_2$, $H_2 = UG_3$ и $H_3 = UG_7 = G_7$ являются $\mathbb{P}$-субнормальными подгруппами группы G, где G_p — силовская p-подгруппа группы G для $p \in \{2,3,7\}$. Заметим, что H_i — сверхразрешимая подгруппа группы G, $i = 1,2,3$. Следовательно, $G_2\,\mathbb{P}\text{-}sn\,H_1$, $G_3\,\mathbb{P}\text{-}sn\,H_2$. Отсюда получаем, что $G_p\,\mathbb{P}\text{-}sn\,G$ для $p \in \{2,3,7\}$, а значит, $G \in \mathrm{w}\mathfrak{U}$.

Изучению свойств групп из класса $\mathrm{w}\mathfrak{U}$ и посвящена настоящая работа.

1. Предварительные результаты

Используются стандартные обозначения и терминология (при необходимости см. [3, 4]). Напомним некоторые понятия, существенные в данной работе.

Через $\pi(G)$ обозначается множество всех различных простых делителей порядка группы G; $\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел; $O_p(G)$ — наибольшая нормальная p-подгруппа группы G для некоторого простого числа p; G_p — силовская p-подгруппа группы G; $G_{p'}$ — дополнение к силовской p-подгруппе в группе G, т. е. холлова p'-подгруппа группы G; $G = [N]M$ — полупрямое произведение подгрупп N и M группы G с $N \lhd G$ и $N \cap M = 1$; $F(G)$ — подгруппа Фиттинга группы G, т. е. произведение всех нормальных нильпотентных подгрупп группы G; $F_p(G)$ — p-нильпотентный радикал группы G, т. е. произведение всех нормальных p-нильпотентных подгрупп группы G.

Группа G порядка $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_n^{\alpha_n}$ называется *дисперсивной по Оре* [4, с. 251], если $p_1 > p_2 > \dots > p_n$ и G имеет нормальную подгруппу порядка $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_i^{\alpha_i}$ для любого $i = 1,2,\dots,n$.

Для некоторого класса групп $\mathfrak{X}$ через $\mathscr{M}(\mathfrak{X})$ обозначается класс всех минимальных не $\mathfrak{X}$-групп, т. е. групп G, у которых классу $\mathfrak{X}$ принадлежат все собственные подгруппы из G, и только они. Используются следующие обозначения для конкретных классов групп: $\mathfrak{S}$ — класс всех разрешимых групп; $\mathfrak{U}$ — класс всех сверхразрешимых групп; $\mathfrak{N}$ — класс всех нильпотентных групп; $\mathfrak{A}(p-1)$ — класс всех абелевых групп экспоненты, делящей $p-1$.

Класс групп $\mathfrak{F}$ называется *формацией*, если выполняются следующие условия: 1) каждая фактор-группа любой группы из $\mathfrak{F}$ также принадлежит $\mathfrak{F}$; 2) из $H/A \in \mathfrak{F}$, $H/B \in \mathfrak{F}$ всегда следует, что $H/A \cap B \in \mathfrak{F}$. По определению пустой класс групп является формацией.

Формация $\mathfrak{F}$ называется: 1) *наследственной*, если $\mathfrak{F}$ вместе с каждой группой содержит и все ее подгруппы; 2) *насыщенной*, если из $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ всегда следует, что $G \in \mathfrak{F}$.

Всякая функция $f : \mathbb{P} \to \{\text{формации}\}$ называется *локальным экраном*. Формация $\mathfrak{F}$ называется *локальной*, если существует локальный экран f такой, что $\mathfrak{F}$ совпадает с классом групп $(G \mid G/F_p(G) \in f(p))$ для любого $p \in \pi(G)$. Обозначается $\mathfrak{F} = LF(f)$.

По теореме Гашюца — Любезедер — Шмида формация насыщена тогда и только тогда, когда она локальна.

Согласно [1, с. 751] *A-группой* называется разрешимая группа, у которой любая силовская подгруппа является абелевой. Класс всех A-групп образует наследственную формацию.

Необходимые в дальнейшем известные свойства сверхразрешимых групп [4, 5] соберем в следующей теореме.

Теорема 1.1. *Справедливы следующие утверждения:*

1) *любая сверхразрешимая группа дисперсивна по Оре;*

2) *коммутант сверхразрешимой группы нильпотентен;*

3) *класс $\mathfrak{U}$ является наследственной насыщенной формацией и имеет локальный экран f такой, что $f(p) = \mathfrak{A}(p-1)$ для любого простого p.*

Неоднократно будут использоваться следующие известные результаты.

Лемма 1.2 [4, лемма 3.9, п. 1]. *Если H/K — главный фактор группы G и $p \in \pi(H/K)$, то $G/C_G(H/K)$ не содержит неединичных нормальных p-подгрупп, причем $F_p(G) \subseteq C_G(H/K)$.*

Лемма 1.3 [4, лемма 4.5]. *Пусть f — локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Группа G тогда и только тогда принадлежит $\mathfrak{F}$, когда $G/F_p(G) \in f(p)$ для любого $p \in \pi(G)$.*

Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация. Через $G^{\mathfrak{F}}$ обозначается $\mathfrak{F}$-корадикал группы G, т. е. наименьшая нормальная подгруппа группы G, для которой $G/G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$.

Подгруппа H группы G называется $\mathfrak{F}$-*субнормальной* в G [4, 6], если либо $H = G$, либо существует цепь подгрупп $H = H_0 \subset H_1 \subset \dots \subset H_{n-1} \subset H_n = G$ такая, что H_{i-1} максимальна в H_i и $H_i^{\mathfrak{F}} \subseteq H_{i-1}$ для всех $i = 1, \dots, n$.

Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{U}$. Как следует из [4, с. 93, замечание 2], всякая $\mathfrak{U}$-субнормальная подгруппа группы G является $\mathbb{P}$-субнормальной, а для разрешимой группы G имеет место и обратное утверждение. Однако в общем случае оно неверно. Например, если $G = \mathrm{Alt}(5)$ — знакопеременная группа степени 5, то подгруппа $H \simeq \mathrm{Alt}(4)$ является $\mathbb{P}$-субнормальной, но не $\mathfrak{U}$-субнормальной в G.

Учитывая свойства $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп (см., например, [6, с. 236, 237]) и отмеченное выше замечание, сформулируем следующие результаты.

Лемма 1.4. *Пусть G — разрешимая группа и H — подгруппа группы G. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если $G^{\mathfrak{U}} \subseteq H$, то H $\mathbb{P}$-sn G;*

2) *H $\mathfrak{U}$-субнормальна в G тогда и только тогда, когда H $\mathbb{P}$-субнормальна в G;*

3) *если H $\mathbb{P}$-sn G, K — подгруппа из G, то $(H \cap K)$ $\mathbb{P}$-sn K;*

4) *если H_i $\mathbb{P}$-sn G, $i = 1, 2$, то $(H_1 \cap H_2)$ $\mathbb{P}$-sn G;*

5) *если H $\mathbb{P}$-sn G, то H^x $\mathbb{P}$-sn G для любого $x \in G$;*

6) *если H $\mathbb{P}$-sn G и $N \trianglelefteq G$, то HN/N $\mathbb{P}$-sn G/N;*

7) *если $N \trianglelefteq G$ и HN/N $\mathbb{P}$-sn G/N, то HN $\mathbb{P}$-sn G;*

8) *если H $\mathbb{P}$-sn K и K $\mathbb{P}$-sn G, то H $\mathbb{P}$-sn G.*

Теорема 1.5 [7]. *Группа G сверхразрешима тогда и только тогда, когда G можно представить в виде произведения двух нильпотентных $\mathbb{P}$-субнормальных подгрупп.*

2. Свойства w-сверхразрешимых групп

Установим разрешимость w-сверхразрешимых групп. Для этого нам потребуется ряд лемм. Следующий результат сообщен нам Д. О. Ревиным.

Лемма 2.1. *Пусть A и B — подгруппы группы G такие, что $|G : A| = p$, $|G : B| = q$, где p и q — различные простые числа. Тогда G — непростая группа.*

Доказательство. Допустим, что G — простая группа. Обозначим через Δ множество правых смежных классов группы G по подгруппе A. Для любого $g \in G$ определим отображение τ_g множества Δ в Δ по правилу $(Ax)\tau_g = Axg$. Легко видеть, что τ_g — биекция. Пусть $S(\Delta)$ — группа всех подстановок на множестве Δ. Тогда $S(\Delta) \simeq S_p$ и отображение $\tau : g \mapsto \tau_g$ является нетривиальным гомоморфизмом групп G и $S(\Delta)$. Ввиду простоты группы G ядро гомоморфизма τ тривиально и, следовательно, G изоморфно вкладывается в S_p. Отсюда получается, что p — наибольшее простое число множества $\pi(G)$. Повторяя рассуждения для подгруппы B, заключаем, что q — наибольшее простое число множества $\pi(G)$. Это противоречит $p \neq q$. Значит, G не является простой группой. Лемма доказана.

Лемма 2.2. *Если G w-сверхразрешима и $N \trianglelefteq G$, то G/N w-сверхразрешима.*

Доказательство. Пусть P/N — силовская p-подгруппа группы G/N. Тогда найдется силовская p-подгруппа G_p группы G такая, что $P/N = G_pN/N$. Если $G/N = G_pN/N$, то G/N w-сверхразрешима. Пусть $G_pN/N \neq G/N$. Из w-сверхразрешимости G следует, что существует цепь подгрупп $G_p = G_0 \subset G_1 \subset \cdots \subset G_{n-1} \subset G_n = G$ с простыми индексами $|G_{i+1} : G_i|$ для любого $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Рассмотрим все $j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, для которых $G_{j+1}N/N \neq G_jN/N$. Тогда

$$|G_{j+1}N/N : G_jN/N| = |G_{j+1} : G_j| : |G_{j+1} \cap N : G_j \cap N| \\ = |G_{j+1} : G_j| : |(G_{j+1} \cap N)G_j : G_j|.$$

Заметим, что $G_j \subseteq (G_{j+1} \cap N)G_j \subseteq G_{j+1}$. Отсюда и из того, что $|G_{i+1} : G_i|$ — простое число и $|G_{j+1}N/N : G_jN/N| \neq 1$, следует, что $(G_{j+1} \cap N)G_j = G_j$. Тогда $|G_{j+1}N/N : G_jN/N| = |G_{j+1} : G_j|$. Отбрасывая из цепи

$$G_pN/N = G_0N/N \subseteq G_1N/N \subseteq \cdots \subseteq G_{n-1}N/N \subseteq G_nN/N = G/N$$

повторения, получим в G/N для G_pN/N цепь с простыми индексами. Итак, $P/N\, \mathbb{P}\text{-}sn\, G/N$ и G/N является w-сверхразрешимой. Лемма доказана.

Теорема 2.3. *Любая* w*-сверхразрешимая группа разрешима.*

Доказательство. Пусть G — группа наименьшего порядка такая, что G w-сверхразрешима, но не разрешима. Отсюда ввиду теоремы Бернсайда о разрешимости бипримарных групп заключаем, что $|\pi(G)| \geq 3$. Тогда из w-сверхразрешимости G следует, что для некоторых p и q из $\pi(G)$ в G найдутся силовская p-подгруппа G_p и силовская q-подгруппа G_q такие, что $G_p \subseteq M$, $G_q \subseteq W$, $|G : M|$ и $|G : W|$ — простые числа, причем $(|G : M|, |G : W|) = 1$. Тогда по лемме 2.1 G является непростой группой. Пусть N — минимальная нормальная подгруппа группы G. По лемме 2.2 G/N w-сверхразрешима, а значит, разрешима по выбору G. Пусть N_r – произвольная силовская r-подгруппа из N. Тогда $N_r = G_r \cap N$ для некоторой силовской r-подгруппы G_r группы G. Для G_r найдется цепь подгрупп $G_r = G_0 \subset G_1 \subset \cdots \subset G_{m-1} \subset G_m = G$ с простыми индексами $|G_{i+1} : G_i|$ для любого $i = 0, 1, \ldots, m-1$. Тогда

$$N_r = G_0 \cap N \subseteq G_1 \cap N \subseteq \cdots \subseteq G_{m-1} \cap N \subseteq G_m \cap N = N.$$

Если $N_r = N$, то G разрешима, что противоречит выбору G. Значит, $N_r \neq N$. Выберем все $j \in \{0, 1, \dots, m-1\}$, для которых $G_{j+1} \cap N \neq G_j \cap N$. Тогда $|G_{j+1} \cap N : G_j \cap N| = |(G_{j+1} \cap N)G_j : G_j|$. Так как $G_j \subseteq (G_{j+1} \cap N)G_j \subseteq G_{j+1}$ и $|G_{i+1} : G_i|$ — простое число, то $(G_{j+1} \cap N)G_j = G_{j+1}$. Итак, $|G_{j+1} \cap N : G_j \cap N| = |G_{j+1} : G_j|$. Отсюда следует, что N w-сверхразрешима. Так как $N \neq G$, то N разрешима по выбору G. Отсюда и из разрешимости G/N следует, что G разрешима. Получили противоречие. Теорема доказана.

Лемма 2.4. *Пусть $G = G_pG_q$, где $G_p \trianglelefteq G$, G_q — элементарная абелева q-группа, причем $q \mid p-1$. Тогда G сверхразрешима.*

Доказательство. Так как $F_p(G) \supseteq G_p$ и $F_q(G) = G$, то $G/F_r(G) \in \mathfrak{A}(p-1)$ для $r \in \{p, q\}$. Отсюда ввиду леммы 1.3 и п. 3 теоремы 1.1 получаем сверхразрешимость G. Лемма доказана.

Напомним [3, с. 519], что *нильпотентной длиной* разрешимой группы G называется наименьшее число k такое, что $F_k = G$, где подгруппа F_i определяется рекурсивно следующим образом: $F_0 = 1$ и $F_i/F_{i-1} = F(G/F_{i-1})$ для всех $i \geq 1$. Обозначается $l(G)$. Поскольку сверхразрешимая группа имеет нильпотентный коммутант, нильпотентная длина сверхразрешимой группы не превосходит 2. Следующее предложение показывает, что нильпотентную длину w-сверхразрешимой группы уже нельзя ограничить фиксированным натуральным числом n.

Предложение 2.5. *Для любого натурального n существует w-сверхразрешимая группа, нильпотентная длина которой равна n.*

Доказательство. Вначале для натурального числа $n \geq 2$ докажем индукцией по n следующее утверждение: можно выбрать n простых чисел $p_1, p_2, \dots, p_n$ таких, что $p_1 < p_2 < \dots < p_n$, $p_i \mid p_j - 1$ для всех $i < j$, где $i = 1, \dots, n-1$, $j = 2, \dots, n$. Для $n = 2$ утверждение выполняется. Например, можно взять $p_1 = 2$, $p_2 = 3$. Предположим, что утверждение верно при $n = k$, $k \geq 2$. Докажем, что оно справедливо и при $n = k+1$. Пусть $p_1, p_2, \dots, p_k$ — набор из k простых чисел с отмеченными выше свойствами. Рассмотрим диафантово уравнение $p_1p_2 \dots p_kx + 1 = 0$. Согласно теореме Дирихле [8, с. 59] найдется натуральное число $x = \alpha_0$ такое, что $p_1p_2 \dots p_k\alpha_0 + 1$ — простое число. Обозначим $p_{k+1} = p_1p_2 \dots p_k\alpha_0 + 1$. Тогда $p_1, p_2, \dots, p_k, p_{k+1}$ — искомый набор чисел, так как $p_1 < p_2 < \dots < p_k < p_{k+1}$ и $p_i \mid p_j - 1$ для всех $i < j$, где $i = 1, \dots, k$, $j = 2, \dots, k+1$.

Теперь докажем предложение индукцией по n. Для $n \in \{1, 2\}$ утверждение очевидно. Для $n = 3$ справедливость предложения устанавливается примером 1.

Пусть $n > 3$ и $p_1, p_2, \dots, p_n$ — набор n простых чисел с отмеченными выше свойствами, т. е. $p_1 < p_2 < \dots < p_n$, $p_i \mid p_j - 1$ для всех $i < j$, где $i = 1, \dots, n-1$, $j = 2, \dots, n$. Полагая, что $G_1 = G_{p_1}$ — циклическая группа порядка p_1, построим рекурсивно группы G_i, $i = 1, \dots, n$, обладающие следующими свойствами: $G_i = [G_{p_i}]([G_{p_{i-1}}](\dots([G_{p_2}]G_{p_1})\dots))$, где G_{p_k} — силовская p_k-подгруппа группы G_i, являющаяся элементарной абелевой p_k-группой ($k = 1, \dots, i$), G_{p_i} — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G_i, $\Phi(G_i) = 1$, G_i w-сверхразрешима и $l(G_i) = i$ для всех $i = 1, \dots, n$.

Предположим, что построена группа G_j с указанными выше свойствами. Пусть $j + 1 \leq n$. Так как $O_{p_{j+1}}(G_j) = 1$ и в G_j имеется единственная минимальная нормальная подгруппа, по [3, гл. B, теорема 10.6] существует точный неприводимый G_j-модуль U над полем $\mathrm{F}_{p_{j+1}}$. Рассмотрим группу $G_{j+1} = [U]G_j$.

Покажем, что G_{j+1} обладает указанными выше свойствами. Заметим, что U — силовская p_{j+1}-подгруппа группы G_{j+1}, являющаяся единственной минимальной нормальной подгруппой в G_{j+1}. Так как U — точный G_j-модуль, то $F(G_{j+1}) = U$. Из $G_{j+1}/U \simeq G_j$ и $l(G_j) = j$ следует, что $l(G_{j+1}) = j + 1$. Очевидно, что $\Phi(G_{j+1}) = 1$. Покажем, что G_{j+1} является w-сверхразрешимой группой. Пусть G_{p_k} — силовская p_k-подгруппа группы G_{j+1}, где $1 \le k \le j+1$. Из w-сверхразрешимости G_{j+1}/U следует, что $G_{p_k}U\,\mathbb{P}\text{-}sn\,G_{j+1}$. Если $k = j+1$, то $G_{p_k}U = U$ и $U\,\mathbb{P}\text{-}sn\,G_{j+1}$. Пусть $k < j+1$. Тогда $G_{p_k}U$ — бипримарная дисперсивная группа, причем G_{p_k} — элементарная абелева p_k-группа. По лемме 2.4 получаем, что $G_{p_k}U$ сверхразрешима, откуда следует, что $G_{p_k}\mathbb{P}\text{-}sn\,G_{p_k}U$. Тогда по п. 8 леммы 1.4 $G_{p_k}\mathbb{P}\text{-}sn\,G_{j+1}$. Следовательно, G_{j+1} w-сверхразрешима. Итак, доказано, что G_n w-сверхразрешима и $l(G_n) = n$. Предложение доказано.

Рассмотрим другие свойства w-сверхразрешимых групп.

Предложение 2.6. *Справедливы следующие утверждения:*

1) *если G — w-сверхразрешимая группа, то всякая подгруппа из G также w-сверхразрешима;*

2) *если G/N_1 и G/N_2 w-сверхразрешимы, то $G/N_1 \cap N_2$ также w-сверхразрешима;*

3) *прямое произведение w-сверхразрешимых групп является w-сверхразрешимой группой;*

4) *класс $\mathrm{w}\mathfrak{U}$ является наследственной формацией.*

Доказательство. Установим справедливость утверждения 1. Пусть K — подгруппа w-сверхразрешимой группы G. По теореме Силова силовская p-подгруппа K_p из K содержится в некоторой силовской p-подгруппе P группы G. Так как G разрешима по теореме 2.3, из $P\mathbb{P}\text{-}sn\,G$ по утверждению 3 леммы 1.4 следует $\mathbb{P}$-субнормальность $K \cap P = K_p$ в K. Утверждение 1 доказано.

Докажем утверждение 2. Пусть G — группа наименьшего порядка такая, что в G существуют нормальные подгруппы N_1 и N_2, для которых G/N_1 и G/N_2 w-сверхразрешимы, а $G/N_1 \cap N_2$ не является w-сверхразрешимой. Из теоремы 2.3 следует, что G/N_1 и G/N_2 разрешимы. Тогда $G/N_1 \cap N_2$ является разрешимой группой.

Если $N_1 \cap N_2 \ne 1$, то в $N_1 \cap N_2$ выберем минимальную нормальную подгруппу N группы G. Тогда $G/N/N_i/N \simeq G/N_i$ w-сверхразрешима для $i = 1, 2$. Из $|G/N| < |G|$ получаем, что $G/N/(N_1/N \cap N_2/N) \simeq G/N_1 \cap N_2$ w-сверхразрешима. Это противоречит выбору G.

Пусть $N_1 \cap N_2 = 1$. Возьмем любую силовскую p-подгруппу R группы G. Так как RN_i/N_i — силовская p-подгруппа в G/N_i и G/N_i w-сверхразрешима, то $RN_i/N_i\,\mathbb{P}\text{-}sn\,G/N_i$, $i = 1, 2$. Ввиду теоремы 6.4 из [3, гл. A] и утверждения 4 леммы 1.4 подгруппа $RN_1 \cap RN_2 = R(N_1 \cap N_2) = R$ $\mathbb{P}$-субнормальна в G. Следовательно, $G/N_1 \cap N_2$ w-сверхразрешима. Полученное противоречие завершает доказательство утверждения 2.

Утверждение 3 непосредственно следует из утверждения 2.

Утверждение 4 вытекает из леммы 2.2 и утверждений 1, 2 данного предложения. Предложение доказано.

Теорема 2.7. *Класс $\mathrm{w}\mathfrak{U}$ является наследственной насыщенной формацией.*

Доказательство. Согласно утверждению 4 предложения 2.6 класс $\mathrm{w}\mathfrak{U}$ является наследственной формацией. Докажем насыщенность $\mathrm{w}\mathfrak{U}$ индукцией по $|G|$. Пусть $\Phi(G) \neq 1$ и $G/\Phi(G) \in \mathrm{w}\mathfrak{U}$. Поскольку по теореме 2.3 $G/\Phi(G)$ разрешима, то G разрешима.

Пусть N — минимальная нормальная подгруппа группы G. Так как $\Phi(G)N/N \subseteq \Phi(G/N)$ и $G/\Phi(G)N \in \mathrm{w}\mathfrak{U}$, то $G/N/\Phi(G/N) \in \mathrm{w}\mathfrak{U}$. Ввиду $|G/N| < |G|$ получаем, что $G/N \in \mathrm{w}\mathfrak{U}$.

Класс $\mathrm{w}\mathfrak{U}$ является формацией, поэтому N — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G. Значит, $N \subseteq \Phi(G)$. Отсюда следует, что N — p-группа для некоторого простого числа p и $O_{p'}(G) = 1$. Пусть Q — произвольная силовская q-подгруппа группы G.

Если $q = p$, то $QN/N\,\mathbb{P}\text{-}sn\,G/N$. Из $N \subseteq Q$ и утверждения 7 леммы 1.4 следует $\mathbb{P}$-субнормальность Q в G.

Пусть $q \neq p$. Рассмотрим два случая.

1. Предположим, что $|\pi(G)| > 2$. Обозначим через H некоторую холловскую $\{p, q\}$-подгруппу группы G, содержащую Q. Тогда $H \neq G$. Ясно, что $N \subseteq H$. Так как G/N w-сверхразрешима, ввиду утверждения 1 предложения 2.6 H/N w-сверхразрешима. Отсюда следует, что любая силовская подгруппа из H/N является $\mathbb{P}$-субнормальной в H/N. По теореме 1.5 H/N сверхразрешима. Ввиду [4, следствие 16.2.3] получаем сверхразрешимость H. Отсюда следует, что QN является сверхразрешимой группой. Значит, $Q\,\mathbb{P}\text{-}sn\,QN$. Из $\mathbb{P}$-субнормальности QN/N в G/N и утверждений 7 и 8 леммы 1.4 вытекает $\mathbb{P}$-субнормальность подгруппы Q в группе G. Следовательно, любая силовская подгруппа из G является $\mathbb{P}$-субнормальной в G, а значит, группа G w-сверхразрешима.

2. Пусть $|\pi(G)| \leq 2$. Рассуждая, как выше, и используя теорему 1.5, получаем сверхразрешимость G/N. Из насыщенности формации всех сверхразрешимых групп следует, что G сверхразрешима, а значит, w-сверхразрешима. Теорема доказана.

Следствие. *Группа G является* w*-сверхразрешимой тогда и только тогда, когда $G/\Phi(G)$ —* w*-сверхразрешимая группа.*

Предложение 2.8. *Любая* w*-сверхразрешимая группа является дисперсивной по Оре.*

Доказательство. Пусть G — w-сверхразрешимая группа. Достаточно показать, что если p — наибольший простой делитель $|G|$, то силовская p-подгруппа G_p группы G нормальна в G. Тогда результат будет получен индукцией по числу различных простых делителей $|G|$. Будем доказывать утверждение индукцией по порядку группы G. Пусть N — минимальная нормальная подгруппа группы G. По индукции $G_pN/N \trianglelefteq G/N$, а значит, $G_pN \trianglelefteq G$. Так как G — разрешимая группа по теореме 2.3, то N — q-группа для некоторого простого числа q. Если $p = q$, то $G_pN = G_p$ и $G_p \trianglelefteq G$. Следовательно, $p > q$. Поскольку G_pN — бипримарная группа, из наследственности формации $\mathrm{w}\mathfrak{U}$ и теоремы 1.5 следует, что G_pN сверхразрешима. Откуда получаем, что $G_p \trianglelefteq G_pN$. Так как G_p — характеристическая подгруппа в G_pN, то $G_p \trianglelefteq G$. Предложение доказано.

Группа, являющаяся регулярным сплетением $Z_5 \wr Z_3$ циклической группы Z_5 порядка 5 с циклической группой Z_3 порядка 3, показывает, что обратное утверждение к предложению 2.8 не выполняется.

Теорема 2.9. *Любая минимальная не* w*-сверхразрешимая группа является бипримарной минимальной несверхразрешимой группой.*

Доказательство. Пусть $G \in \mathscr{M}(\mathrm{w}\mathfrak{U})$. Обозначим через q наименьший простой делитель порядка $|G|$ группы G. Рассмотрим произвольную собственную подгруппу H группы G. Так как H w-сверхразрешима, согласно предложению 2.8 H является дисперсивной по Оре, а значит, q-нильпотентной группой. Согласно теореме 5.4 из [1, гл. IV] группа G является либо q-нильпотентной, либо группой Шмидта.

Предположим, что G — q-нильпотентная группа. Тогда $G = [G_{q'}]G_q$. Так как $G_{q'}$ w-сверхразрешима, по теореме 2.3 $G_{q'}$ разрешима. Отсюда и из разрешимости $G/G_{q'}$ следует разрешимость группы G.

Пусть N — минимальная нормальная подгруппа группы G. Вначале предположим, что $\Phi(G) = 1$. Тогда $G = [N]M$, где M — некоторая максимальная подгруппа группы G. Так как G — минимальная не w-сверхразрешимая группа, то N — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G и N является p-группой для некоторого простого p.

Пусть Q — произвольная силовская q-подгруппа группы G. Так как $G/N \in \mathrm{w}\mathfrak{U}$, то $QN/N\, \mathbb{P}\text{-}sn\, G/N$, а значит, $QN\, \mathbb{P}\text{-}sn\, G$ по утверждению 7 леммы 1.4. Если $QN \neq G$, то в силу выбора группы G подгруппа QN является w-сверхразрешимой, а значит, $Q\, \mathbb{P}\text{-}sn\, QN$. Тогда ввиду утверждения 8 леммы 1.4 получаем, что $Q\, \mathbb{P}\text{-}sn\, G$. Пусть $QN = G$. Если $N \subseteq Q$, то $G \in \mathfrak{N} \subseteq \mathrm{w}\mathfrak{U}$; противоречие. Следовательно, G — бипримарная группа. Тогда ввиду теоремы 1.5 любая собственная подгруппа группы G является сверхразрешимой. Поэтому G — бипримарная минимальная несверхразрешимая группа.

Если $\Phi(G) \neq 1$, то из $|\pi(G/\Phi(G))| \leq 2$ следует, что $|\pi(G)| \leq 2$. Рассуждая, как выше, получаем, что G — бипримарная минимальная несверхразрешимая группа.

Пусть G — группа Шмидта. Так как G не является w-сверхразрешимой, G не сверхразрешима. Поэтому $G \in \mathscr{M}(\mathfrak{U})$. Теорема доказана.

Обозначим через $\mathrm{Syl}(G)$ множество всех силовских подгрупп группы G.

Теорема 2.10. *Формация* $\mathrm{w}\mathfrak{U}$ *является локальной и имеет локальный экран f такой, что $f(p) = (G \in \mathfrak{S} \mid \mathrm{Syl}(G) \subseteq \mathfrak{A}(p-1))$ для любого простого p.*

Доказательство. Проверкой определений устанавливаем, что класс групп $(G \in \mathfrak{S} \mid \mathrm{Syl}(G) \subseteq \mathfrak{A}(p-1)) = f(p)$ является наследственной формацией для любого простого p. Следовательно, f — локальный экран. Обозначим $\mathfrak{U}^* = LF(f)$. Покажем, что $\mathfrak{U}^* = \mathrm{w}\mathfrak{U}$. Допустим противное. Пусть G — группа наименьшего порядка из $\mathfrak{U}^* \backslash \mathrm{w}\mathfrak{U}$. Так как $f(p)$ — наследственная формация, то $\mathfrak{U}^*$ — наследственная формация по теореме 4.7 из [4]. Отсюда в силу выбора G следует, что $G \in \mathscr{M}(\mathrm{w}\mathfrak{U})$. Поскольку $\mathrm{w}\mathfrak{U}$ — насыщенная формация по теореме 2.7, $\Phi(G) = 1$ и в G имеется единственная минимальная нормальная подгруппа N, причем N — элементарная абелева p-группа для некоторого простого p и $N = C_G(N) = F_p(G) = F(G)$. Кроме того, $G = [N]M$, где M — некоторая максимальная подгруппа группы G. Так как по теореме 2.9 G — бипримарная минимальная несверхразрешимая группа, по теореме 26.5 из [4] следует, что N — силовская p-подгруппа, а M — силовская q-подгруппа группы G. Из $G \in \mathfrak{U}^*$ ввиду леммы 1.3 заключаем, что

$$G/F_p(G) = G/N \simeq M \in f(p) = (G \in \mathfrak{S} \mid \mathrm{Syl}(G) \subseteq \mathfrak{A}(p-1)).$$

Отсюда получаем, что $M \in \mathfrak{A}(p-1)$. Но тогда G сверхразрешима, а значит, $G \in \mathrm{w}\mathfrak{U}$. Получили противоречие. Следовательно, $\mathfrak{U}^* \subseteq \mathrm{w}\mathfrak{U}$.

Докажем, что $\mathrm{w}\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{U}^*$. Допустим, что существуют группы, принадлежащие $\mathrm{w}\mathfrak{U}\backslash\mathfrak{U}^*$. Выберем среди них группу G, имеющую наименьший порядок. Так как $G \in \mathrm{w}\mathfrak{U}$, то G разрешима по теореме 2.3. Из наследственности формации $\mathrm{w}\mathfrak{U}$ следует, что $G \in \mathscr{M}(\mathfrak{U}^*)$. Поскольку $\mathrm{w}\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{U}^*$ — насыщенные формации, $\Phi(G) = 1$ и в G имеется единственная минимальная нормальная подгруппа N, причем $N = C_G(N) = F(G)$ и N — p-группа для некоторого простого числа p. Кроме того, $G = [N]M$, где M — некоторая максимальная подгруппа группы G. Поскольку $G \in \mathrm{w}\mathfrak{U}$, то G является дисперсивной по Оре группой согласно предложению 2.8. Из единственности N следует, что p — наибольший простой делитель $|G|$. Пусть G_p — силовская p-подгруппа группы G. Если $N \neq G_p$, то $G_p = G_p \cap [N]M = N(G_p \cap M)$ и $G_p \cap M \neq 1$. Из $G_p \trianglelefteq G$ следует, что $G_p \cap M \trianglelefteq M$. Согласно лемме 1.2 $O_p(M) = 1$. Получили противоречие. Следовательно, $N = G_p$, и M является p'-группой. Пусть M_q — силовская q-подгруппа из подгруппы M. Тогда M_q является силовской q-подгруппой группы G. Предположим, что $M_qN \neq G$. Так как $C_{M_qN}(N) = G_G(N) = N$, то $O_{p'}(M_qN) = 1$. Следовательно, $F_p(M_qN) = N$. Из $M_qN \in \mathfrak{U}^*$ ввиду леммы 1.3 следует, что

$$M_qN/F_p(M_qN) = M_qN/N \simeq M_q \in f(p) = (G \in \mathfrak{S} \mid \mathrm{Syl}(G) \subseteq \mathfrak{A}(p-1)),$$

отсюда $M_q \in \mathfrak{A}(p-1)$ для любого $q \in \pi(M)$. Поэтому

$$M \in f(p) = (G \in \mathfrak{S} \mid \mathrm{Syl}(G) \subseteq \mathfrak{A}(p-1)).$$

Но тогда $G \in \mathfrak{U}^*$. Получили противоречие с выбором G.

Пусть $M_qN = G$. Так как G бипримарна и $G \in \mathrm{w}\mathfrak{U}$, по теореме 1.5 следует, что G сверхразрешима. Тогда по утверждению 3 теоремы 1.1 заключаем, что

$$G/C_G(N) = G/N \in \mathfrak{A}(p-1) \subseteq f(p) = (G \in \mathfrak{S} \mid \mathrm{Syl}(G) \subseteq \mathfrak{A}(p-1)).$$

Значит, $G \in \mathfrak{U}^*$. Получили противоречие с выбором G. Теорема доказана.

Выше отмечалось, что всякая бипримарная w-сверхразрешимая группа является сверхразрешимой. Отметим также следующий результат.

Теорема 2.11. *Группа сверхразрешима тогда и только тогда, когда она метанильпотентна и любую ее силовскую подгруппу можно соединить с группой цепью подгрупп с простыми индексами.*

Доказательство. Необходимость непосредственно вытекает из известных свойств сверхразрешимых групп. Пусть существуют метанильпотентные w-сверхразрешимые группы, не являющиеся сверхразрешимыми. Выберем среди них группу G наименьшего порядка. Пусть N — минимальная нормальная подгруппа группы G. Заметим, что для фактор-группы G/N условия доказываемого утверждения сохраняются. Поэтому в силу выбора группы G получаем сверхразрешимость G/N. Так как класс всех сверхразрешимых групп образует насыщенную формацию, то N — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G и $\Phi(G) = 1$. В этом случае $G = [N]M$, $N = C_G(N) = F(G)$, N — p-группа, p — некоторое простое число, а M — некоторая нильпотентная максимальная подгруппа из G. Поскольку по лемме 1.2 $O_p(M) = 1$, то M является p'-группой. Пусть M_q — произвольная силовская q-подгруппа группы M. Рассмотрим подгруппу $R = M_qN$. Так как G w-сверхразрешима, то R также w-сверхразрешима, значит, по теореме 1.5 сверхразрешима. Из $C_G(N) = N$ и $N \subseteq R$ следует, что $O_{p'}(R) = 1$. Поэтому $F_p(R) = N$. Из сверхразрешимости R

по утверждению 3 теоремы 1.1 получаем, что $R/N \simeq M_q \in \mathfrak{A}(p-1)$. Следовательно, любая силовская подгруппа из M принадлежит формации $\mathfrak{A}(p-1)$. Так как M нильпотентна, то $M \in \mathfrak{A}(p-1)$. Отсюда по утверждению 3 теоремы 1.1 получаем, что G сверхразрешима. Теорема доказана.

Одним из основных свойств сверхразрешимых групп является нильпотентность коммутанта.

Определение 2.12. *Обобщенным коммутантом* группы G назовем наименьшую нормальную подгруппу N группы G такую, что G/N является группой с абелевыми силовскими подгруппами.

Теорема 2.13. *Пусть G — w-сверхразрешимая группа. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *любая метанильпотентная подгруппа группы G является сверхразрешимой;*

2) *любая бипримарная подгруппа группы G является сверхразрешимой;*

3) *обобщенный коммутант группы G нильпотентен.*

Доказательство. Справедливость утверждения 1 следует из наследственности формации $\mathrm{w}\mathfrak{U}$ и теоремы 2.11.

Справедливость утверждения 2 вытекает из наследственности формации $\mathrm{w}\mathfrak{U}$ и теоремы 1.5.

Установим справедливость утверждения 3. Пусть $\mathfrak{X}$ — класс всех групп, обобщенный коммутант которых нильпотентен. Тогда $\mathfrak{X} = \mathfrak{N}\mathscr{A}$, где $\mathscr{A}$ — формация всех A-групп. Согласно [4, с. 36, п. 10] $\mathfrak{X}$ имеет такой локальный экран h, что $h(p) = \mathscr{A}$ для любого простого p. Так как $\mathrm{w}\mathfrak{U}$ имеет локальный экран f такой, что $f(p) = (G \in \mathfrak{S} \mid \mathrm{Syl}(G) \subseteq \mathfrak{A}(p-1))$ для любого простого p, то $\mathrm{w}\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{N}\mathscr{A}$. Утверждение 3 доказано. Теорема доказана.

3. Произведения нормальных w-сверхразрешимых подгрупп

Пример из [5, гл. I, с. 8–9], показывающий, что произведение двух нормальных сверхразрешимых подгрупп группы G не обязательно является сверхразрешимой группой, также устанавливает, что произведение двух нормальных w-сверхразрешимых подгрупп группы G не всегда является w-сверхразрешимой группой. Бэр в [9] доказал, что если группа G есть произведение двух нормальных сверхразрешимых подгрупп и ее коммутант нильпотентен, то G сверхразрешима. В [5, гл. 4, теорема 3.4] приведен следующий результат: если группа G является произведением двух нормальных сверхразрешимых подгрупп взаимно простых индексов, то G сверхразрешима. Ниже устанавливаются аналогичные результаты для w-сверхразрешимых групп.

Теорема 3.1. *Пусть $G = AB$ — произведение нормальных w-сверхразрешимых подгрупп A и B. Если обобщенный коммутант группы G нильпотентен, то G — w-сверхразрешимая группа.*

Доказательство. Пусть G — группа наименьшего порядка, для которой теорема неверна. Группа G является разрешимой. Пусть N — минимальная нормальная подгруппа группы G. Для G/N все условия теоремы выполняются. Тогда G/N — w-сверхразрешимая группа. Заметим, что если N_1 — минимальная нормальная подгруппа группы G, отличная от N, то G/N_1 — w-сверхразрешимая группа, отсюда $G/N \cap N_1 \simeq G \in \mathrm{w}\mathfrak{U}$; противоречие. Значит,

N — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G. В этом случае $\Phi(G) = 1$, $N = C_G(N) = F(G)$, N — p-группа, p — некоторое простое число. Тогда $G = [N]M$, где M — некоторая максимальная подгруппа из G.

Покажем, что p — наибольшее простое число, делящее $|G|$. Заметим, что A и B являются $\mathbb{P}$-субнормальными подгруппами в G. Из предложения 2.8 следует, что A и B — дисперсивные по Оре группы. Пусть q — наибольший простой делитель $|G|$. Не теряя общности рассуждений, можно считать, что $q \in \pi(A)$. Тогда силовская q-подгруппа Q из A является нормальной подгруппой в A. Если $q \neq p$, то $Q \subseteq C_A(N) = N$. Получили противоречие. Следовательно, p — наибольшее простое число, делящее $|G|$.

Пусть G_p — силовская p-подгруппа группы G. Так как $|M| = |G/N| < |G|$, то M является w-сверхразрешимой группой в силу выбора G, а значит, по предложению 2.8 дисперсивной по Оре. Если $p \in \pi(M)$, то силовская p-подгруппа M_p из M является нормальной в M. С другой стороны, $O_p(M) = 1$ ввиду леммы 1.2. Получили противоречие. Следовательно, N — силовская p-подгруппа группы G.

Рассмотрим подгруппу A. Заметим, что $A = A \cap NM = N(A \cap M)$. Так как $N = C_G(N) = C_{AN}(N)$, то $O_{p'}(A) = 1$ и $F_p(A) = N$. Из $A \in \mathrm{w}\mathfrak{U}$ по лемме 1.3 следует, что $A/F_p(A) = A/N \simeq A \cap M \in f(p)$, где f — локальный экран формации $\mathrm{w}\mathfrak{U}$, указанный в теореме 2.10. Аналогично получаем, что $B \cap M \in f(p)$. Заметим также, что $M = (A \cap M)(B \cap M)$. Так как по условию обобщенный коммутант группы G нильпотентен и $F(G) = N$, то M является группой с абелевыми силовскими подгруппами. Пусть $q \in \pi(M)$ и M_q — силовская q-подгруппа из M. Тогда $M_q = (A \cap M)_q(B \cap M)_q$, где $(A \cap M)_q$ и $(B \cap M)_q$ — некоторые силовские q-подгруппы из $A \cap M$ и $B \cap M$ соответственно. Из абелевости M_q, $(A \cap M)_q \in \mathfrak{A}(p-1)$ и $(BN \cap M)_q \in \mathfrak{A}(p-1)$ следует, что $M_q \in \mathfrak{A}(p-1)$. В силу произвольности выбора $q \in \pi(M)$ получаем, что $M \in f(p) = (G \mid \mathrm{Syl}(G) \subseteq \mathfrak{A}(p-1))$. Так как $G/N \in \mathrm{w}\mathfrak{U}$ и $G/F_p(N) = G/N \simeq M \in f(p)$, по лемме 1.3 следует, что $G \in \mathrm{w}\mathfrak{U}$. Получили противоречие. Теорема доказана.

Теорема 3.2. *Пусть $G = AB$ — произведение нормальных* w*-сверхразрешимых подгрупп A и B. Если $(|G : A|, |G : B|) = 1$, то G —* w*-сверхразрешимая группа.*

Доказательство. Пусть $p \in \pi(G)$ и G_p — силовская p-подгруппа группы G. Так как $(|G : A|, |G : B|) = 1$, то либо $G_p^x \subseteq A$, либо $G_p^x \subseteq B$ для некоторого $x \in G$. Не теряя общности рассуждений, будем считать, что $G_p^x \subseteq A$. Поскольку A и B разрешимы по теореме 2.3, то G разрешима. Из нормальности A в G следует, что $A\,\mathbb{P}\text{-}sn\,G$. Ввиду w-сверхразрешимости A получаем, что $G_p^x\,\mathbb{P}\text{-}sn\,A$. Согласно утверждениям 8 и 5 леммы 1.4 заключаем, что $G_p\,\mathbb{P}\text{-}sn\,G$. Следовательно, G — w-сверхразрешимая группа. Теорема доказана.

Авторы выражают признательность доктору физико-математических наук Д. О. Ревину за полезные консультации.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Huppert B.* Endliche Gruppen. I. Berlin: Springer-Verl., 1967.
2. *Казарин Л. С.* О группах с факторизацией // Докл. АН СССР. 1981. Т. 256, № 1. С. 26–29.
3. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992.
4. *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.
5. *Weinstein M. (editor)* Between nilpotent and solvable. Passaic: Polygonal Publ. House, 1982.

6. *Ballester-Bolinches A., Ezquerro L. M.* Classes of finite groups. Dordrecht: Springer-Verl., 2006.

7. *Васильев А. Ф.* Новые свойства конечных динильпотентных групп // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2004. № 2. С. 39–43.

8. *Галочкин А. И., Нестеренко Ю. В., Шидловский А. Б.* Введение в теорию чисел. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984.

9. *Baer R.* Classes of finite groups and their properties // Illinois J. Math. 1957. N 1. P. 115–187.

Статья поступила 29 октября 2009 г.

Васильев Александр Федорович, Тютянов Валентин Николаевич
Гомельский гос. университет им. Ф. Скорины, кафедра алгебры и геометрии,
ул. Советская, 104, Гомель 246019, Беларусь
`formation56@mail.ru`, `tyutyanov@front.ru`

Васильева Татьяна Ивановна
Белорусский гос. университет транспорта, кафедра высшей математики,
ул. Кирова, 34, Гомель 246653, Беларусь
`tivasilyeva@mail.ru`