Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2010. Том 51, № 6

УДК 513.813, 519.46

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ БУЗЕМАНА

В. Н. Берестовский

Аннотация. Дается решение задачи, поставленной Буземаном: определить такие некомпактные G-пространства Буземана, что для любых их двух геодезических существует движение, переводящее первую во вторую. Доказывается, что каждое такое пространство изометрично евклидову пространству или одному из некомпактных римановых симметрических пространств ранга 1 (отрицательной секционной кривизны).

Ключевые слова: G-пространство Буземана, геодезическая, асферичное однородное риманово многообразие, группа Ли с левоинвариантной метрикой, геодезически орбитальное пространство, однородное изотропное риманово многообразие, евклидово пространство, риманово симметрическое пространство ранга один.

Введение

В работе [1] Буземан доказал, что если для двух геодезических компактного G-пространства Буземана [2] существует движение (изометрия), переводящая первую из них во вторую, то пространство изометрично одному из компактных римановых симметрических пространств ранга 1: сфере $S^n, n \geq 1$, вещественному проективному пространству $P^n(\mathbb{R})$, $n \geq 2$, комплексному проективному пространству $P^n(\mathbb{C})$, $n \geq 2$, кватернионному проективному пространству $P^n(\mathbb{Q})$, $n \geq 2$, или проективной плоскости Кэли $P^2(\mathbf{Cay})$ [3, 4]. Он поставил следующую задачу в [2, п. 54].

Задача 1. *Определить такие некомпактные G-пространства Буземана, что для любых их двух геодезических существует движение, переводящее первую во вторую.*

В данной работе доказывается, что каждое такое пространство изометрично евклидову пространству или одному из некомпактных римановых симметрических пространств ранга 1 (отрицательной секционной кривизны): пространству Лобачевского (вещественному гиперболическому пространству) $H^n(\mathbb{R})$, $n \geq 2$, комплексному гиперболическому пространству $H^n(\mathbb{C})$, $n \geq 2$, кватернионному гиперболическому пространству $H^n(\mathbb{Q})$, $n \geq 2$, или гиперболической плоскости Кэли $H^2(\mathbf{Cay})$ [4].

Аксиомы G-пространства Буземана приводятся в [2, с. 54, 55]. Коротко такое пространство можно определить как метрически полное локально компактное пространство с внутренней метрикой со свойствами локальной продолжаемости кратчайших (отрезков) и их неналегания. Последнее означает, что из двух продолжений нетривиальной кратчайшей за один и тот же конец одно содержит другое.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 08–01–00067) и проекта «Квазиконформный анализ и геометрические аспекты теории операторов».

Отметим, что основное условие из задачи 1: *условие транзитивности группы движений на множестве геодезических*, существенно слабее, чем условие *двухточечной однородности* [4] или, в другой терминологии, *двойной транзитивности группы движений* [2]. При последнем условии результаты являются классическими. Их доказали Ван-Сян-Чжун для всех компактных и нечетномерных некомпактных G-пространств Буземана [5, 6] и Титс для четномерных некомпактных пространств Буземана [7]. Автор не использует их результаты в этой работе.

1. Однородность

Лемма 1. *Всякое локально изометричное отображение* (*конечного или бесконечного*) *интервала или отрезка числовой прямой в G-пространство Буземана (M, ρ) допускает единственное продолжение до локально изометричного отображения $\gamma = \gamma(s)$, $s \in \mathbb{R}$, в (M, ρ).*

Доказательство следует из свойств локальной продолжаемости кратчайших, неналегания кратчайших и полноты G-пространства Буземана. □

Образ отображения γ из леммы 1 Буземан называет *геодезической*.

Далее всегда рассматривается (метрическое) пространство (M, ρ), удовлетворяющее всем условиям задачи 1, и G обозначает группу всех движений пространства (M, ρ). Напомним, что *орбита точки $x \in M$* относительно группы G есть множество $O(G, x) = \{g(x) \mid g \in G\}$. Если пространство (M, ρ) одномерно и некомпактно, то оно изометрично числовой прямой $\mathbb{R}$ со стандартной метрикой $\rho(x, y) = |x - y|$. Поэтому в дальнейшем предполагается, что (M, ρ) имеет топологическую размерность, не меньшую двух. Но заранее конечномерность не предполагается.

Предложение 1. *Верно одно из следующих трех утверждений*:

1) *каждая геодезическая Γ допускает в точности две параметризации γ_1, γ_2 длиной дуги таких, что для некоторого движения f пространства (M, ρ)*

$$f(\gamma_1(s)) = \gamma_1(-s), \quad f(\gamma_2(s)) = \gamma_2(-s) \quad \textit{для всех } s \in \mathbb{R};$$

2) *существует нетривиальный сдвиг геодезической Γ, т. е. движение f такое, что $f(\gamma(s)) = \gamma(s + s_0)$ для некоторой параметризации γ геодезической Γ длиной дуги, некоторого $s_0 \neq 0$ и всех $s \in \mathbb{R}$;*

3) *пространство (M, ρ) однородно.*

Доказательство. Предположим, что утверждения 1 и 2 неверны.

Возьмем произвольную точку $x_0 \in M$. Вследствие (существования и) локальной единственности кратчайших в G-пространстве Буземана существует положительное число $r = r(x_0)$ такое, что любые две точки x, y из замкнутого шара $B(x_0, r)$ можно соединить единственной кратчайшей (сегментом) $[x, y]$ в (M, ρ). Мы будем различать сегменты $[x, y]$ и $[y, x]$, если $x \neq y$, т. е. рассматривать (невырожденные) ориентированные сегменты.

Вследствие леммы 1 и транзитивности группы G на множестве всех геодезических, каждый сегмент $[x_0, x]$, где x — точка на сфере $S(x_0, r)$, можно отобразить на некоторый сегмент вида $[\gamma(s_1), \gamma(s_1 + r)] \subset \Gamma$ или $[\gamma(s_2), \gamma(s_2 - r)] \subset \Gamma$ посредством некоторого движения $f_1 \in G$ или $f_2 \in G$. Если хотя бы для одной точки $x \in S(x_0, r)$ выполняется и то и другое, то для движения $f = f_2 \circ f_1^{-1}$ получаем $f(\gamma(s)) = \gamma(s_0 - (s - s_0))$, где $s_0 = (s_1 + s_2)/2$ и, вводя параметризацию $\gamma_1(s) = \gamma(s - s_0)$, — что $f(\gamma_1(s)) = \gamma_1(-s)$. При этом не существует движения $h \in G$ и числа $t_0 \neq 0$ таких, что $h(\gamma_1(s)) = \gamma(t_0 - (s - t_0))$ для всех $s \in \mathbb{R}$. Иначе

$(f \circ h)(\gamma_1(s)) = \gamma_1(s - 2(t_0))$ для всех $s \in \mathbb{R}$ и то же для параметризации γ, что противоречит предположению.

Если хотя бы для одной точки $x \in S(x_0, r)$ сегмент $[x_0, x]$ можно отобразить на сегменты вида $[\gamma(s_1), \gamma(s_1 + r)] \subset \Gamma$ и $[\gamma(s_2), \gamma(s_2 + r)] \subset \Gamma$ (или $[\gamma(s_1), \gamma(s_1 - r)] \subset \Gamma$ и $[\gamma(s_2), \gamma(s_2 - r)] \subset \Gamma$), где $s_1 < s_2$, посредством некоторых движений $f_1 \in G$ и $f_2 \in G$, то $f = f_1 \circ f_2^{-1}$ сдвигает геодезическую Γ по себе посредством формулы $f(\gamma(s)) = \gamma(s - (s_2 - s_1))$; опять получим противоречие с предположением.

Значит, для каждой точки $x \in S(x_0, r)$ существует единственный ориентированный сегмент $[\gamma(s(x)), \gamma(s(x) + r)]$ (или $[\gamma(s(x)), \gamma(s(x) - r)]$) геодезической Γ, являющийся образом ориентированного сегмента $[x_0, x]$ для некоторой изометрии пространства (M, ρ), и тем самым определена функция $s : S(x_0, r) \to \mathbb{R}$.

Обозначим через X^+ (соответственно через X^-) множество всех $x \in S(x_0, r)$ таких, что $f([x_0, x]) = [\gamma(s(x)), \gamma(s(x) + r)]$ (соответственно $f([x_0, x]) = [\gamma(s(x)), \gamma(s(x) - r)]$) для некоторого движения $f \in G$. Вследствие сделанных предположений для каждой точки $x \in S(x_0, r)$ существует единственная «диаметрально противоположная» точка $x' = \mathrm{inv}(x) \in S(x_1, r)$ такая, что $\rho(x, x') = 2r$ и $x_0 \in [x, x']$. Ясно тогда, что $s(x') = s(x)$ и $x' \in X^-$ (соответственно $x' \in X^+$), если $x \in X^+$ (соответственно $x \in X^-$). Следовательно, множества X^+ и X^- непусты, не пересекаются, и их объединение совпадает с $S(x_0, r)$.

Известно, что всякое G-пространство Буземана конечно компактно, т. е. всякое его ограниченное замкнутое подмножество компактно. Утверждается, что множество $s(S(x_0, r))$ не ограничено. Иначе вследствие конечной компактности пространства (M, ρ) из всякой последовательности движений $g_n \in G$, для которой множество расстояний $\rho(x_0, g_n(x_0))$ ограничено, можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $g_{n(k)} \in G$ (в том смысле, что для каждой точки $x \in M$ последовательность точек $g_{n(k)}(x)$ сходится). Тогда нетрудно показать, что функция $s = s(x)$, $x \in S(x_0, r)$, непрерывна и оба множества X^+ и X^- замкнуты. Этого не может быть, так как они непусты, не пересекаются, их объединение совпадает с $S(x_0, r)$, а множество $S(x_0, r)$ компактно, связно и локально связно, т. е. является локально связным континуумом, если топологическая размерность пространства (M, ρ) больше единицы.

Рассуждая, как в предыдущем абзаце, нетрудно показать, что функция $s = s(x)$, $x \in S(x_0, r)$, *собственная*, т. е. прообраз всякого компактного подмножества числовой прямой относительно этой функции компактен. Поэтому функция $s(x)$ непрерывна на прообразе каждого ограниченного подмножества числовой прямой.

Существует хотя бы одна точка $x \in X^+$ (соответственно $x \in X^-$), являющаяся предельной точкой множества X^- (соответственно X^+); при этом вследствие рассуждений, аналогичных рассуждениям из предыдущего абзаца, для каждого натурального числа n существует окрестность $O_n(x)$ точки x в $S(x_0, r)$ такая, что для каждой точки $z \in O_n(x) \cap X^-$ (соответственно $z \in O_n(x) \cap X^+$) выполнено неравенство $|s(z)| \geq n$. Аналогично доказывается, что если точка $x \in X^+$ (соответственно $x \in X^-$) является неизолированной точкой множества X^+ (соответственно X^-), то для каждого натурального числа n существует окрестность $O_n(x)$ точки x в $S(x_0, r)$ такая, что для каждой точки $z \in O_n(x) \cap X^+$ (соответственно $z \in O_n(x) \cap X^-$) выполнено $|s(z)| \geq n$ или $s(x) - 1/n \leq s(z) \leq s(x) + 1/n$.

Ясно, что $x, y \in X^+$ (соответственно $x, y \in X^-$) и $s(x) = s(y)$ тогда и только тогда, когда существует элемент g из стабилизатора G_{x_0} точки x_0 в группе G такой, что $g(x) = y$. Определенное выше отображение $\mathrm{inv} : S(x_0, r) \to$

$S(x_0, r)$ непрерывно, $\mathrm{inv} \circ \mathrm{inv}$ — тождественное отображение, $g \circ \mathrm{inv} = \mathrm{inv} \circ g$ и $g(x) \neq \mathrm{inv}(x)$ для любых элементов $g \in G_{x_0}$, $x \in S(x_0, r)$. Поэтому формула $(g, 0)(x) = g(x)$ (соответственно $(g, 1)(x) = (g \circ \mathrm{inv})(x))$ определяет действие группы $H := G_{x_0} \times Z_2$ на сфере $S(x_0, r)$. Группа H компактна относительно метрики

$$d(h_1, h_2) = \max_{x \in S(x_0, r)} \rho(h_1(x), h_2(x)),$$

а отображение $\sigma : (H, d) \times S(x_0, r) \to S(x_0, r)$, где $\sigma(h, x) = h(x)$, непрерывно. Поэтому каждая орбита $O(H, x) = \sigma(H, x)$, $x \in S(x_0, r)$, компактна. Пусть $p : S(x_0, r) \to S(x_0, r)/H = Z$ — соответствующее фактор-отображение на пространство орбит. Тогда формула

$$\rho_1(z_1, z_2) = \min_{x_1 \in p^{-1}(z_1),\ x_2 \in p^{-1}(z_2)} \rho(x_1, x_2)$$

задает метрику на Z с топологией, совпадающей с фактор-топологией на фактор-множестве Z, и отображение $p : (S(x_0, r), \rho) \to (Z, \rho_1)$ непрерывно.

Нам потребуются некоторые определения и результаты из книги [8]. Топологическое пространство называется *дугообразно связным* (*д.с.*), если любую пару его точек можно соединить *дугой*, т. е. подпространством, гомеоморфным конечному замкнутому отрезку числовой прямой. Оно называется *локально дугообразно связным* (*л.д.с.*), если для каждой его точки любая ее окрестность содержит л.д.с. окрестность той же точки. Теорема Мазуркевича — Мура — Менгера [8, с. 259, теорема 1] утверждает, что всякое полное локально связное метрическое пространство является л.д.с. Теорема 5 [8, с. 262] утверждает, что непрерывный образ локально связного континуума есть локально связный континуум. Поэтому полное метрическое пространство локально дугообразно связно тогда и только тогда, когда оно линейно связно. Ясно, что связное л.д.с. — пространство д.с. Из теоремы Мазуркевича — Мура — Менгера и упомянутой теоремы 5 следует, что непрерывный (метрический) образ $Z = p(S(x_0, r))$ локально связного континуума $S(x_0, r)$ есть локально дугообразно связный континуум.

Существует единственное *инъективное* отображение $\bar{s} : Z \to \mathbb{R}$ такое, что $\bar{s} \circ p = s$. На основании сказанного выше ограничение отображения $\bar{s}$ на (компактный) прообраз $\bar{s}^{-1}(K)$ произвольного компактного подмножества $K \subset \mathbb{R}$ является гомеоморфизмом на образ $\bar{s}(\bar{s}^{-1}(K))$. Поэтому существует непрерывное *биективное* отображение $\phi = \bar{s}^{-1} : \bar{s}(Z) = C_0 \to Z$ замкнутого неограниченного подмножества $C_0 \subset \mathbb{R}$ на локально дугообразно связный, дугообразно связный континуум Z, ограничение которого на каждое компактное подмножество является гомеоморфизмом.

Отсюда нетрудно вывести, что если функция $s(x_0, \cdot)$ не ограничена снизу (соответственно сверху), то $s(x_0, S(x_0, r))$ содержит бесконечный идущий влево (соответственно вправо) интервал, причем существует единственная точка $c_0 \in C_0$ такая, что образ $\bar{s}(O(\phi(c_0)))$ всякой достаточно малой связной окрестности $O(\phi(c_0))$ точки $\phi(c_0)$ в Z имеет вид

$$\bar{s}(O(\phi(c_0))) = (-\infty, b_0) \cup ((c_0 - \varepsilon, c_0 + \varepsilon) \cap C_0), \quad -\infty < b_0 < c_0 - \varepsilon < c_0,$$

соответственно существует единственная точка $d_0 \in C_0$ такая, что образ $\bar{s}(O(\phi(d_0)))$ всякой достаточно малой связной окрестности $O(\phi(d_0))$ точки $\phi(d_0)$ в Z имеет вид

$$\bar{s}(O(\phi(d_0))) = (a_0, +\infty) \cup ((d_0 - \varepsilon, d_0 + \varepsilon) \cap C_0), \quad d_0 < d_0 + \varepsilon < a_0.$$

Следовательно, если одновременно функции $s(x_0,\cdot)$ и $s(x_1,\cdot)$, где $x_1\in M$, не ограничены снизу (соответственно сверху), то аналогичное множеству C_0 множество C_1 содержит интервал $(-\infty,b_1)$ (соответственно $(a_1,+\infty)$), так что $C_0\cap C_1$ непусто. Если $c\in C_0\cap C_1$, то по построению существуют движения $f_0,f_1\in G$ такие, что $f_0(x_0)=\gamma(c)=f_1(x_1)$. Тогда $\left(f_1^{-1}\circ f_0\right)(x_0)=x_1$ и $O(G,x_0)=O(G,x_1)$. Следовательно, пространство (M,ρ) имеет не более двух орбит группы G. Так как пространство (M,ρ) связно, а каждая орбита замкнута, то все пространство (M,ρ) является одной орбитой группы G, т. е. пространство (M,ρ) однородно. $\square$

Теорема 1. *Пространство (M,ρ) однородно.*

Доказательство. Предположим, что верно утверждение 2 из предложения 1, но первое его утверждение не верно. Тогда утверждение 2 верно для любого числа $s_0\in\mathbb{R}$ (и вследствие транзитивности группы G на множестве всех геодезических пространство (M,ρ) однородно). Иначе существует наименьшее положительное число s_0 из утверждения 2. Тогда аналогично доказательству предложения 1 для каждой точки $x_0\in M$ и некоторого числа $r>0$ корректно определены функция $s(x_0,x):S(x_0,r)\to\mathbb{R}/s_0\mathbb{Z}$ и непустые непересекающиеся множества X^+ и X^-, покрывающие $S(x_0,r)$. Так как окружность $\mathbb{R}/s_0\mathbb{Z}$ компактна, рассуждая аналогично доказательству предложения 1, получим, что функция $s(x_0,\cdot)$ непрерывна, а множества X^+ и X^- замкнутые, непустые, не пересекаются и покрывают связное пространство $S(x_0,r)$; противоречие.

На основании предложения 1 остается рассмотреть случай, когда верно утверждение 1 предложения 1. Произвольно выберем геодезическую Γ и ее параметризацию $\gamma(s)$, $s\in\mathbb{R}$, совпадающую с одной из параметризаций γ_1,γ_2 из утверждения 1 предложения 1. Из предположения следует, что для каждой точки $x_0\in M$, не лежащей в орбите $O(G,\gamma(0))$, и произвольного числа $r>0$ аналогично доказательству предложения 1 можно корректно определить *положительную* функцию $s(x_0,x):S(x_0,r)\to\mathbb{R}_+$ и непустые непересекающиеся множества X^+ и X^-, покрывающие $S(x_0,r)$. Теперь проходят все дальнейшие рассуждения из доказательства предложения 1 и мы получаем, что если $O(G,\gamma(0))\neq M$, то дополнение к орбите $O(G,\gamma(0))$ в M будет одной орбитой группы G. Но это невозможно, так как обе орбиты замкнуты, а пространство (M,ρ) связно. $\square$

2. Прямые G-пространства Буземана

Лемма 2. *Из каждой точки x некомпактного G-пространства Буземана (M,ρ) исходит геодезический луч пространства, т. е. множество, изометричное замкнутой полупрямой числовой прямой.*

Доказательство. Если пространство некомпактно, то существует последовательность точек $x_n\in M$, для которой $\rho(x,x_n)\to+\infty$. Точки x,x_n можно соединить некоторой кратчайшей (сегментом) $[x,x_n]$ в (M,ρ). Используя конечную компактность пространства и диагональный метод Кантора, можно выбрать подпоследовательность $x_{n(k)}$ последовательности x_n такую, что сегменты $[x,x_{n(k)}]$ сходятся к некоторому геодезическому лучу L пространства (M,ρ) с началом x. Это значит, что для каждого числа $r\geq 0$ и достаточно больших чисел k точки сегментов $[x,x_{n(k)}]$, отстоящие от точки x на расстоянии r, сходятся при $k\to+\infty$ к точке луча L, отстоящей от точки x на расстоянии r, и всякая точка луча L получается таким образом. $\square$

Определение 1. G-пространство Буземана *прямое*, если каждая его геодезическая изометрична числовой прямой.

Теорема 2. *Пространство (M,ρ) прямое.*

Доказательство. Пусть x_0 — произвольная точка из M. Вследствие леммы 2 точка x_0 является началом некоторого луча L. Существует последовательность точек $x_n \in L$ такая, что $r_n = \rho(x_0, x_n) \to \infty$. Вследствие теоремы 1 найдутся элементы $g_n \in G$ такие, что $g_n(x_n) = x_0$. Тогда луч $L_n = g_n(L)$ содержит точку x_0, находящуюся на расстоянии r_n от конца луча L_n. Так как $r_n \to +\infty$, аналогично доказательству леммы 2 из последовательности лучей L_n можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к некоторой прямой пространства (M,ρ). Следовательно, пространство (M,ρ) прямое. $\square$

Таким образом, далее можно говорить «прямая» вместо «геодезическая».

3. Геодезические

В работе [9] доказано, что группа G всех движений любого однородного G-пространства Буземана (M,ρ) является группой Ли (теорема 3) и компонента связности единицы $\widehat{G}$ группы G действует транзитивно на M (теорема 2). Существует гомеоморфизм пространства (M,ρ) на фактор-многообразие G/G_x (или $\widehat{G}/\widehat{G}_x$), где G_x (соответственно $\widehat{G}_x$) — стабилизатор некоторой точки $x \in M$ в группе G (соответственно $\widehat{G}$) такой, что пространство (M,ρ) естественно отождествляется с (вещественно-аналитическим) многообразием $(G/G_x,\rho)$ (соответственно $(\widehat{G}/\widehat{G}_x,\rho)$) с инвариантной относительно канонического левого действия группы G (соответственно $\widehat{G}$) метрикой ρ (теорема 4).

В рассматриваемом нами случае пространство $M = (M,\rho)$ прямое, следовательно, стягиваемое и поэтому все его гомотопические группы $\pi_i(M)$, $i \geq 1$, нулевые. В другой терминологии, M *асферично* ($\pi_i(M) = 0$, $i \geq 2$) и односвязно ($\pi_1(M) = 0$). Известно, что всякая связная группа Ли диффеоморфна прямому произведению любой ее максимальной компактной подгруппы и евклидова пространства [10]. Отсюда и из стягиваемости M следует, что $\widehat{H} := \widehat{G}_x$ — максимальная компактная подгруппа в $\widehat{G}$, а пространство M гомеоморфно вещественно-аналитическому многообразию $\widehat{G}/\widehat{H}$, диффеоморфному евклидову пространству.

Так как группа $H = G_x$ компактна, однородное пространство G/H допускает G-инвариантный метрический тензор μ. Пусть ρ^* — соответствующая G-инвариантная внутренняя метрика на G/H, а $M^* = (G/H,\rho^*)$. Изучение структуры пространства M^* поможет исследованию пространства $M = (G/H,\rho)$. Наша ближайшая цель — доказать, что геодезические пространств M и M^*, рассматриваемые как множества, совпадают.

В предложении 1 статьи [11] В. В. Горбацевич доказал следующее полезное для нас утверждение.

Предложение 2. *Пусть $M^* = \widehat{G}/\widehat{H}$ — односвязное асферичное риманово однородное пространство связной группы Ли $\widehat{G}$, действие которой на M^* предполагается локально эффективным. Тогда существует такая замкнутая подгруппа Ли $G_1 \subset \widehat{G}$, которая просто транзитивна на M^*.*

Введем отношение $\sim$ на множестве P двухточечных подмножеств однородного пространства G/H условием $\{x,y\} \sim \{z,w\}$, если пересечения стабилизаторов $G_x \cap G_y$ и $G_z \cap G_w$ совпадают. Ясно, что $\sim$ — отношение эквивалентности. Определим стандартное действие группы G на P соотношением $g(\{x,y\}) = \{g(x), g(y)\}$ для $g \in G$ и $x, y \in G/H$.

Лемма 3. *Указанное действие группы G на множестве P сохраняет отношение $\sim$. Соответствующее действие группы G на множестве классов эквивалентности $P/\sim$ транзитивно. Любое двухточечное подмножество множества $T \subset G/H$, являющегося объединением всех двухточечных подмножеств из G/H, входящих в некоторый класс $\Theta \in P/\sim$, также является элементом Θ. Различные множества T_1, T_2 указанного вида имеют не более одной общей точки. Наконец, если $g(\Theta_1) = \Theta_2$, то $g(T_1) = T_2$, и группа G действует транзитивно на семействе всех множеств вида T.*

Доказательство. Если $G_x \cap G_y = G_z \cap G_w$, то для любого элемента $g \in G$

$$\begin{aligned} G_{g(x)} \cap G_{g(y)} &= gG_xg^{-1} \cap gG_yg^{-1} = g(G_x \cap G_y)g^{-1} \\ &= g(G_z \cap G_w)g^{-1} = gG_zg^{-1} \cap gG_wg^{-1} = G_{g(z)} \cap G_{g(w)}, \end{aligned}$$

что доказывает первое утверждение.

Пусть $\{x, y\}, \{z, w\}$ — произвольные двухточечные подмножества множества $M = G/H$. Прямую пространства M, соединяющую точки x и y (соответственно z и w), обозначим через $\Gamma(x, y)$ (соответственно через $\Gamma(z, w)$). Вследствие предположений существует движение $g \in G$ такое, что $g(\Gamma(x, y)) = \Gamma(z, w)$. Так как всякое движение, оставляющее на месте произвольную пару точек прямой $\Gamma(z, w)$, оставляет на месте и все ее точки, то $\{g(x), g(y)\} \sim \{z, w\}$, что доказывает второе утверждение.

Пусть $\{x, y\}$ — произвольное двухточечное подмножество упомянутого множества T. Тогда по определению существуют некоторые пары $\{x, z\}, \{y, w\}$ из класса эквивалентности Θ. Тогда

$$(G_x \cap G_z) = (G_x \cap G_z) \cap (G_x \cap G_z) = (G_x \cap G_z) \cap (G_y \cap G_w) \subset G_x \cap G_y.$$

При этом из доказательства второго утверждения следует, что существует элемент $g \in G$ такой, что $\operatorname{Int}(g)(G_x \cap G_y) = g(G_x \cap G_y)g^{-1} = G_x \cap G_z$, где $\operatorname{Int}(g)$ — внутренний автоморфизм группы Ли G, определяемый элементом g. Кроме того, по теореме Картана компактные подгруппы $G_x \cap G_y$, $G_x \cap G_z$ группы Ли G сами являются группами Ли. Таким образом, компактная группа Ли $G_x \cap G_y$ изоморфна компактной группе Ли $G_x \cap G_z$, являющейся ее подгруппой. Тогда $G_x \cap G_y = G_x \cap G_z$, так как изоморфизм групп Ли индуцирует изоморфизм их алгебр Ли и, следовательно, изоморфизм их компонент связности единицы (потому что компоненты связности единицы обеих групп являются образами экспоненциальных отображений и гомоморфизм алгебр Ли коммутирует с экспоненциальными отображениями) и сохраняет (конечное) число компонент связности. Все сформулированные выше утверждения о группах Ли, кроме утверждений о компонентах связности и образе экспоненциального отображения, доказаны в [12, гл. 2]. Следовательно, $\{x, y\} \sim \{x, z\}$ и $\{x, z\} \in \Theta$, поэтому $\{x, y\} \in \Theta$.

Предпоследнее утверждение является очевидным следствием предыдущего, а последнее — второго. $\square$

Предложение 3. *Предположим, что пары $\{x, y\}$ и $\{z, w\}$ не эквивалентны, если содержащие их прямые $\Gamma(x, y)$ и $\Gamma(z, w)$ пространства M не совпадают. Тогда геодезические пространств M и M^*, рассматриваемые как множества, совпадают.*

Доказательство. Так как пространство M^* однородно, его радиус инъективности постоянный и больше некоторого положительного числа r. Пусть $\gamma^*(s)$, $s \in \mathbb{R}$, — произвольная геодезическая Γ^* пространства M^*, параметризованная длиной дуги. Если x, y — произвольные точки на Γ^* такие, что

$0 < \rho^*(x,y) < r$, то Γ^* — единственная геодезическая пространства M^*, содержащая точки x и y. Следовательно, всякое движение $g \in G$ пространства M^*, оставляющее на месте точки x и y, оставляет на месте и все точки на Γ^*. Поэтому если x_1, y_1 — другая пара точек на Γ^* с теми же свойствами, то $\{x_1, y_1\} \sim \{x, y\}$ и вследствие последнего утверждения леммы 3 пара $\{x, x_1\}$ различных точек геодезической Γ^* принадлежит одному и тому же классу Θ независимо от выбора пары и вся геодезическая Γ^* содержится в соответствующем множестве $T \subset G/H$. Ясно, что из условий предложения вытекает, что множество T совпадает с некоторой геодезической Γ пространства M. Таким образом, $\Gamma^* \subset \Gamma$. При этом ясно, что Γ^* есть одновременно замкнутое и открытое подмножество в Γ. Так как Γ связно, должно быть $\Gamma^* = \Gamma$. Предложение доказано. $\square$

Таким образом, остается рассмотреть существенно более сложный (гипотетический) случай, когда условие предложения 3 нарушается.

Лемма 4. *Каждое множество T указанного в лемме 3 вида замкнуто и вполне геодезично относительно метрики ρ (соответственно ρ^*), т. е. если x, y — различные точки из T, то прямая $\Gamma(x,y)$ в M (соответственно каждая геодезическая в M^*, соединяющая точки x и y) также лежит в T. Как следствие, метрическое пространство (T,ρ) (соответственно (T,ρ^*)) само является G-пространством Буземана (соответственно римановым многообразием). При этом каждая прямая (соответственно геодезическая) пространства M (соответственно M^*) лежит в одном из подпространств T. Если условие предложения 3 не выполняется и $H_T = G_x \cap G_y$ для некоторой (а следовательно, любой) пары $\{x,y\} \in \Theta$, то нормализатор $N = N(H_T)$ группы H_T в G есть транзитивная группа изометрий на (T,ρ) и (T,ρ^*), действующая транзитивно и на множестве прямых в (T,ρ). Наконец, любые два пространства (T_1,ρ) и (T_2,ρ) (соответственно (T_1,ρ^*) и (T_2,ρ^*)) изометричны.*

Доказательство. Группа Ли G допускает внутреннюю метрику η, определяемую некоторым левоинвариантным метрическим тензором ν. Метрика η, в свою очередь, задает метрику Хаусдорфа η_H на семействе всех компактных подмножеств группы G по формуле

$$\eta_H(A,B) = \max\{\eta(a,b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Нетрудно видеть, что группа $G_x \cap G_y$ непрерывно зависит от двухточечных множеств $\{x,y\}$: если $\rho_H(\{x_n,y_n\},\{x,y\}) \to 0$, то $\eta_H(G_{x_n} \cap G_{y_n}, G_x \cap G_y) \to 0$. Отсюда вытекает замкнутость множества T. Вполне геодезичность множества T относительно метрик ρ и ρ^* устанавливается рассуждениями, аналогичными доказательству первого утверждения предложения 3. Из вполне геодезичности множества T следует второе утверждение леммы, в частности, тот факт, что T является подмногообразием в G/H.

Следующее утверждение очевидно.

Предположим, что условие предложения 3 не выполняется. Тогда размерность подмногообразия T не меньше двух. Для любых двух прямых $\Gamma(x,y)$ и $\Gamma(z,w)$ в M, определяемых парами $\{x,y\}$ и $\{z,w\}$ из Θ, существует движение $g \in G$ такое, что $g(\Gamma(x,y)) = \Gamma(z,w)$. Тогда, как было показано выше, $\mathrm{Int}(g)(G_x \cap G_y) = G_z \cap G_w$, т. е. $\mathrm{Int}(g)(H_T)) = H_T$ и $g \in N(H_T)$. Очевидно, что $g(T) = T$ и g является изометрией обоих пространств (T,ρ) и (T,ρ^*) для всякого элемента $g \in N(H_T)$. Таким образом, замкнутая(!) группа $N(H_T)$ действует изометриями на обоих пространствах и транзитивно на множестве всех прямых из (T,ρ). Поэтому для группы $N(H_T)$ и пространства (T,ρ) применимы все рассуждения из предыдущих разделов и вследствие теоремы 1 группа $N(H_T)$ действует транзитивно на T.

Последнее утверждение леммы следует из последнего утверждения леммы 3. $\square$

Лемма 5. *Всякое нетривиальное движение группы N на (T,ρ) (и (T,ρ^*)) имеет не более одной неподвижной точки.*

Доказательство. Пусть движение $g \in N$ имеет две неподвижные точки $x, y \in T$, т. е. $g \in G_x \cap G_y$. Тогда вследствие леммы 3 для любой точки $z \in T$, отличной от x, $g \in G_x \cap G_y = G_x \cap G_z$. Следовательно, $g(z) = z$. $\square$

Лемма 6. *Если стабилизатор N_x некоторой точки $x \in T$ имеет элемент порядка два, то пространства (T,ρ) и (T,ρ^*) симметрические (относительно группы N).*

Доказательство. Пусть $g \in N_x$ — элемент порядка два. Тогда вследствие леммы 5 g не имеет неподвижных точек в T, отличных от x. Пусть $\gamma(s)$, $s \in \mathbb{R}$, — произвольная параметризованная длиной дуги прямая пространства (T,ρ) такая, что $\gamma(0) = x$. Утверждается, что $g(\gamma(s)) = \gamma(-s)$ для любого $s \in \mathbb{R}$. Иначе $g(\gamma(s_0)) \neq \gamma(-s_0)$ для некоторого числа $s_0 \neq 0$ (причем число s_0 может быть сколь угодно близко к нулю) и для точек $y = \gamma(s_0)$, $z = g(y)$

$$g(y) = z, \quad g(z) = y. \tag{3.1}$$

Вследствие неналегания кратчайших и неравенства $g(y) \neq \gamma(-s_0)$ единственный сегмент $[y,z]$ не проходит через точку x и на основании (3.1) $g(w) = w \neq x$, где w — середина сегмента $[y,z]$. Это противоречит тому, что x — единственная неподвижная точка для g в T. Так как (T,ρ) однородно вследствие леммы 4, оно симметрическое. Аналогичное доказательство проходит для (T,ρ^*), если взять число s_0 достаточно близким к нулю. $\square$

Лемма 7. *Пространства (T,ρ) и (T,ρ^*) симметрические (относительно группы N) или стабилизатор N_x каждой точки $x \in T$ конечен и не имеет элементов порядка два.*

Доказательство. Если стабилизатор N_x некоторой точки $x \in T$ бесконечен, то вследствие компактности компонента связности K единицы группы N_x содержит более одного элемента и, следовательно, является компактной группой Ли положительной размерности. Тогда K содержит максимальный тор τ, который, в свою очередь, содержит 1-параметрическую подгруппу σ, изоморфную группе $SO(2)$. Подгруппа σ содержит элемент порядка два, и тогда вследствие леммы 6 пространства (T,ρ) и (T,ρ^*) симметрические. Поэтому если они не симметрические, то стабилизатор N_x каждой точки $x \in T$ конечен и на основании леммы 6 не имеет элементов порядка два. $\square$

Лемма 8. *Пространства (T,ρ) и (T,ρ^*) симметрические (относительно группы N).*

Доказательство. Предположим, что утверждение леммы неверно. Тогда вследствие леммы 7 стабилизатор N_x каждой точки $x \in T$ конечен и не имеет элементов порядка два.

Сначала разберем случай, когда размерность пространства-многообразия T более двух. Рассмотрим произвольную сферу $S(x,r)$, $r > 0$, в (T,ρ). Не существует точки $y \in S(x,r)$ такой, что $g(y) = \operatorname{inv}(y)$ для некоторого элемента $g \in N_x$ (см. доказательство предложения 1). Иначе

$$g(g(y)) = g(\operatorname{inv}(y)) = \operatorname{inv}(g(y)) = \operatorname{inv}(\operatorname{inv}(y)) = y \tag{3.2}$$

и вследствие леммы 5 g — элемент порядка два в N_x, чего не может быть. Отсюда следует, что *если говорить только о движениях группы* N, то утверждение 1 предложения 1 неверно. Но утверждение 2 должно быть верным. Иначе из доказательства предложения 1 вытекает, что аналогичное рассматриваемому там фактор-пространство $Z = S(x,r)/N_x \times Z_2$ должно иметь размерность один (фактически быть кривой). С другой стороны, так как на основании леммы 5 группа N_x действует свободно на $S(x,r)$ и соотношения (3.2) не имеют места, фактор-отображение $p : S(x,r) \to S(x,r)/N_x \times Z_2$ является накрытием. Поэтому $\dim(Z)$ равна $\dim(S(x,r))$ и не может быть меньше $n-1 \geq 2$, так как $S(x,r)$ разбивает пространство (T,ρ) на две непересекающиеся непустые компоненты связности [13].

Теперь из утверждения 2 предложения 1 для группы N аналогично первому абзацу из доказательства теоремы 1 (с заменой группы G группой N и пространства M пространством T) следует, что для произвольной параметризованной длиной дуги прямой γ пространства (T,ρ) и для всякого числа $s_0 \in \mathbb{R}$ существует элемент $g \in N$ такой, что $g(\gamma(s)) = \gamma(s+s_0)$ для всех $s \in \mathbb{R}$. Отсюда и из транзитивности группы N на множестве всех геодезических (лемма 4) пространства (T,ρ) следует, что группа N_{x_0} действует транзитивно на сфере $S(x_0,r)$ вопреки конечности N_{x_0}.

Предположим теперь, что размерность пространства T равна двум. Вследствие леммы 4, результатов, полученных в предыдущих разделах, и начала этого раздела, пространство T односвязно и асферично. Поэтому на основании предложения 2 T можно рассматривать как двумерную односвязную группу Ли N_1 с левоинвариантной метрикой ρ, причем (N_1,ρ) — пространство Буземана. С точностью до изоморфизма существует только две двумерных односвязных группы Ли: коммутативная и некоммутативная.

В коммутативном случае получаем, что (N_1,ρ) — двумерное нормированное векторное пространство V, определяемое некоторой нормой F. При этом $(N_1,\rho) = (V,F)$ является G-пространством тогда и только тогда, когда норма F строго выпуклая. В этом случае геодезические пространства (V,F) — обычные прямые и все орбиты любой 1-параметрической подгруппы в N_1 — геодезические пространства $(V,F) = (T,\rho)$. Отсюда и из транзитивности группы N на геодезических в (T,ρ) получаем, что стабилизатор N_x действует транзитивно на каждой сфере $S(x,r)$, $r>0$, что противоречит конечности группы N_x.

В некоммутативном случае получаем так называемую *квазигиперболическую геометрию* [2] или, лучше сказать, *квазигиперболическую плоскость* (N_1,ρ) [2, теорема (52.9)]. Детально она изучена в статьях [14, 15]. В п. (d) при доказательстве теоремы (52.9) установлено, что одна из орбит некоторой 1-параметрической подгруппы группы N_1 является прямой пространства $(N_1,\rho) = (T,\rho)$. Тогда из транзитивности группы N на геодезических в (T,ρ) получаем, что стабилизатор N_x действует транзитивно на каждой сфере $S(x,r)$, $r>0$, что противоречит конечности группы N_x. $\square$

Теорема 3. *Геодезические пространств $M = (M,\rho)$ и $M^* = (M,\rho^*)$ совпадают как множества.*

Доказательство. Вследствие предложения 3 достаточно рассмотреть случай, когда его условия не выполняются. Если $\Gamma(x,y)$ и $\Gamma^*(x,y)$ — произвольные геодезические в M и M^* соответственно и расстояние $\rho^*(x,y)$ достаточно мало, то они лежат в одном из множеств вида T, причем (T,ρ) и (T^*,ρ^*) — вполне геодезические подпространства размерности, не меньшей 2 (леммы 3 и 4). В лемме 8 доказано, что пространства (T,ρ), (T^*,ρ^*) симметрические. Пусть $s_x \in N_x$ обозначает геодезическую симметрию пространств (T,ρ) и (T^*,ρ^*) в точке $x \in T$. Ясно, что произведение двух различных симметрий $s_y \circ s_x$ является сдвигом геодезической $\Gamma(x,y)$ в (T,ρ) (соответственно $\Gamma^*(x,y)$ в (T^*,ρ^*), если расстояние $\rho^*(x,y)$ мало) по себе, сохраняющим (произвольную) ориентацию и геодезической, и всего пространства T. Подгруппа Tr, порожденная всеми изометриями вида $s_y \circ s_x$, $x,y \in T$, известна как *группа трансвекций*; она связна. Очевидно, что если $g \in N$, то $s_{g(x)} = g \circ s_x \circ g^{-1}$. Следовательно, группа Tr — нормальная подгруппа группы N. Если $s_y(x) = z$, то

$$s_z \circ s_y = s_{s_y(x)} \circ s_{s_y(y)} = s_y \circ (s_x \circ s_y) \circ (s_y)^{-1} = s_y \circ s_x,$$

$$(s_y \circ s_x)^2 = (s_z \circ s_y) \circ (s_y \circ s_x) = s_z \circ s_x.$$

Кроме того, если $x_n \to x$, то $s_{x_n} \circ s_x \to s_x \circ s_x$, что является тождественным отображением множества T. Отсюда легко вывести, что обе геодезические $\Gamma(x,y)$ и $\Gamma^*(x,y)$ — орбиты точки x относительно одной и той же 1-параметрической подгруппы в Tr. Тогда $\Gamma(x,y)$ и $\Gamma^*(x,y)$ совпадают как множества. $\square$

4. Доказательство основного результата

Теорема 4. *Пусть M — некомпактное G-пространство Буземана такое, что для любых его двух геодезических существует движение, переводящее первую во вторую. Тогда M изометрично евклидову пространству или одному из некомпактных римановых симметрических пространств ранга* 1 (*отрицательной секционной кривизны*)*: пространству Лобачевского* (*вещественному гиперболическому пространству*) $H^n(\mathbb{R})$, $n \geq 2$, *комплексному гиперболическому пространству* $H^n(\mathbb{C})$, $n \geq 2$, *кватернионному гиперболическому пространству* $H^n(\mathbb{Q})$, $n \geq 2$, *или гиперболической плоскости Кэли* $H^2(\mathbf{Cay})$.

Доказательство. На основании результатов, установленных к началу предыдущего раздела, M можно рассматривать как однородное пространство G/H группы Ли G по ее компактной подгруппе H, снабженное G-инвариантной метрикой Буземана ρ, причем M односвязно и асферично. Пусть M^*, как и раньше, однородное пространство G/H с произвольной G-инвариантной римановой метрикой ρ^*. Вследствие теоремы 3 геодезические пространств M и M^* совпадают как множества. Из предложения 2 следует, что M^* можно рассматривать как некоторую подгруппу Ли $G_1 \subset \widehat{G} \subset G$ с левоинвариантной римановой метрикой ρ^*. Тогда на основании теоремы 1.1 статьи [16] В. В. Кайзера некоторая 1-параметрическая подгруппа $\theta = \theta(t)$, $t \in \mathbb{R}$, в (G_1, ρ^*) будет геодезической. Другими словами, некоторая геодезическая Γ пространства M^*, а следовательно, и пространства M будет орбитой 1-параметрической подгруппы движений θ пространств M^* и M. Отсюда вытекает, в частности, что если $\gamma(s)$, $s \in \mathbb{R}$; $\gamma^*(s^*)$, $s^* \in \mathbb{R}$, — произвольные параметризации геодезической Γ длиной дуги в M и M^* соответственно, то $s(s^*) = (\gamma^{-1} \circ \gamma^*)(s^*)$ — аффинная функция. Кроме того, вследствие исходных условий на M группа движений G действует транзитивно на множестве всех геодезических пространства M, а следовательно, и пространства M^*. Поэтому $\rho = c\rho^*$ для некоторого вещественного положительного числа c и M — однородное прямое риманово многообразие с транзитивным действием стабилизатора G_x на сфере $S(x,r)$ для всех $x \in M$ и всех положительных вещественных чисел r. Другими словами, пространство M — прямое *однородное изотропное риманово многообразие* или, что эквивалентно, прямое *двухточечно однородное риманово многообразие* [4]. Сабо в статье [17], не используя классификационных результатов о действиях групп Ли, доказал, что такое многообразие должно быть (прямым) симметрическим римановым многообразием. Тогда на основании теоремы 8.12.2 из книги Вольфа [4] пространство M изометрично евклидову пространству или одному из некомпактных римановых симметрических пространств ранга 1, указанных в формулировке нашей теоремы. $\square$

Замечание. Здесь уместно изложить кратко интересную и долгую историю различных доказательств утверждения, что всякое однородное изотропное риманово многообразие — симметрическое риманово многообразие, и связанные с этим результаты и проблемы. Ван и Титс в работах [5–7] использовали весьма технически сложную классификацию групп Ли, действующих транзитивно на сферах (Монтгомери, Самельсон [18], Борель [19]). Позже доказательства предложили Сингх Варма [20] и Фрейденталь [21]. Оба существенно используют классификационные теоремы. Доказательство Вольфа, приведенное в книге [4], основано на полученной независимо О. В. Мантуровым [22] и Вольфом [23] классификации односвязных *однородных римановых строго изотропно неприводимых многообразий*. Первоначальные списки таких многообразий у обоих авторов содержали пропуски. Полный список получен в статье Крамера [24]. Заметим, что относительно несложно можно доказать, что всякое некомпактное однородное риманово строго изотропно неприводимое многообразие — односвязное симметрическое многообразие (см. [4, теорема 8.13.1]). Ван и Циллер получили полную классификацию односвязных *однородных римановых изотропно неприводимых многообразий* [25]. В работе [26] они дали прямое доказательство утверждения Уолла (Wall) о соответствии между компактными односвязными симметрическими пространствами с одной стороны и компактными строго изотропно неприводимыми пространствами классических групп — с другой; упрощение доказательства дано в статье [27]. Соответствие имеет исключения: некоторые грассманианы и изотропно неприводимое пространство $SO(7)/G_2$, диффеоморфное пространству $P^7(\mathbb{R})$. Все изотропно неприводимые однородные пространства G/H входят в класс *однородных пространств с интегрируемыми инвариантными распределениями*, введенный в работе автора [28]. В работах [29, 30] получены еще неполные, но достаточно продвинутые результаты по их структуре и классификации. Доказательство Сабо [17] дает положительный ответ на вопрос Вольфа в книге [4]: *можно ли доказать, вовсе не используя классификационных теорем, что двухточечно однородные римановы пространства являются симметрическими?*

Автор благодарит профессора Ю. Г. Никонорова за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Busemann H.* Groups of motions transitive on sets of geodesics // Duke Math. J. 1956. V. 24. P. 539–544.
2. *Буземан Г.* Геометрия геодезических. М.: Физматгиз, 1962.
3. *Бессе А.* Многообразия с замкнутыми геодезическими. М.: Мир, 1981.
4. *Вольф Дж.* Пространства постоянной кривизны. М.: Наука, 1982.
5. *Wang-Hsien-Chung.* Two theorems on metric spaces // Pacific J. Math. 1951. V. 1. P. 473–480.
6. *Wang-Hsien-Chung.* Two-point homogeneous spaces // Ann. Math. 1952. V. 55. P. 177–191.
7. *Tits J.* Etudes de certains éspaces métriques // Bull. Soc. Math. Belgique. 1952. P. 44–52.
8. *Куратовский К.* Топология. М.: Мир, 1969. Т. 2.
9. *Берестовский В. Н.* Однородные G-пространства Буземана // Сиб. мат. журн. 1982. Т. 23, № 2. С. 3–15.
10. *Iwasawa K.* On some types of topological groups // Ann. Math. 1949. V. 50. P. 507–558.
11. *Горбацевич В. В.* Транзитивные группы изометрий асферичных римановых многообразий // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 6. С. 1244–1258.

12. *Адамс Дж.* Лекции по группам Ли. М.: Наука, 1979.
13. *Александров П. С., Пасынков Б. А.* Введение в теорию размерности. М.: Наука, 1978.
14. *Busemann H.* Quasihyperbolic geometry // Rend. Circ. Mat. Palermo. 1955. V. 4, N 2. P. 556–269.
15. *Грибанова И. А.* Квазигиперболическая плоскость // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 2. С. 288–301.
16. *Кайзер В. В.* Сопряженные точки левоинвариантных метрик на группах Ли // Изв. вузов. Математика. 1990. № 11. С. 27–37.
17. *Szabo Z. I.* A short topological proof for the symmetry of 2 point homogeneous spaces // Invent. Math. 1991. V. 106. P. 61–64.
18. *Montgomery D., Samelson H.* Transformation groups of spheres // Ann. Math. 1943. V. 44. P. 454–470.
19. *Borel A.* Some remarks about Lie groups transitive on spheres and tori // Bull. Amer. Math. Soc. 1949. V. 55. P. 580–587.
20. *Singh V.* Two point homogeneous manifolds // Nederl. Akad. van Wetenshappen. Proc. Ser. A. 1965. V. 68. P. 746–753.
21. *Freudenthal H.* Zweifache Homogenitat und Symmetrie. // Nederl. Akad. van Wetenshappen. Proc. Ser. A. 1967. V. 70. P. 18–22.
22. *Мантуров О. В.* Однородные римановы многообразия с неприводимой группой изотропии // Тр. сем. вект. тенз. анал. 1966. Т. 13. С. 68–145.
23. *Wolf J. A.* The geometry and structure of isotropy irreducible homogeneous spaces // Acta Math. 1968. V. 120. P. 59–148. Correction: Acta Math. 1984. V. 152. P. 141, 142
24. *Krämer M.* Eine Klassification bestimmter Untergruppen zusammenhangender Liegruppen // Comm. Algebra. 1975. V. 3. P. 691–737.
25. *Wang M., Ziller W.* On isotropy irreducible Riemannian manifolds // Acta Math. 1991. V. 166. P. 223–261.
26. *Wang M., Ziller W.* Symmetric spaces and strongly isotropy irreducible spaces // Math. Ann. 1993. V. 296. P. 285–326.
27. *Heintze E., Ziller W.* Isotropy irreducible spaces and *s*-representations // Differ. Geom. Appl. 1996. V. 6. P. 181–188.
28. *Берестовский В. Н.* Однородные многообразия с внутренней метрикой. II // Сиб. мат. журн. 1989. Т. 30, № 2. С. 14–28.
29. *Берестовский В. Н.* Компактные однородные многообразия с интегрируемыми инвариантными распределениями и скалярная кривизна // Мат. сб. 1995. Т. 186, № 7. С. 15–24.
30. *Горбацевич В. В.* О финслеровых инвариантных внутренних метриках на однородных пространствах и сильных подалгебрах в алгебрах Ли // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 1. С. 43–60.

Статья поступила 15 октября 2009 г.

Берестовский Валерий Николаевич
Омский филиал Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
ул. Певцова, 13, Омск 644099
berestov@ofim.oscsbras.ru