Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2010. Том 51, № 5

УДК 512.541

О КОММУТАТОРНО ИНВАРИАНТНЫХ ПОДГРУППАХ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

А. Р. Чехлов

Аннотация. Дано описание коммутаторно инвариантных подгрупп нередуцированной абелевой группы. Выяснено, когда все коммутаторно инвариантные подгруппы сепарабельной группы и алгебраически компактной группы без кручения вполне инвариантны, а также описаны E-центры и E-коммутанты этих и некоторых других групп.

Ключевые слова: кольцо эндоморфизмов, вполне инвариантная подгруппа, коммутатор эндоморфизмов, E-центр, E-коммутант.

Пусть A — абелева группа, через $E(A)$ будем обозначать кольцо ее эндоморфизмов, $A^1 = \bigcap_{n=1}^{\infty} nA$, $r(A)$ — ее ранг. Если не оговорено противное, то A_p — p-компонента, $t(A)$ — периодическая часть, $A[p^k] = \{a \in A \mid p^k a = 0\}$, причем если A — p-группа, то $A[p^\infty] = A$. Если a — элемент порядка p^k, то через $e(a) = k$ обозначим его *экспоненту*. Запись $H \leqslant A$ означает, что H — подгруппа в A, запись $H \leqslant fi\, A$ — что H — вполне инвариантная подгруппа в A, т. е. $\varphi H \subseteq H$ для каждого $\varphi \in E(A)$. Если $f \in \mathrm{Hom}\,(A, B)$, то $f|H$ — ограничение f на $H \subseteq A$. Если B, G — группы, $\varnothing \neq X \subseteq B$, то через $\mathrm{Hom}\,(B, G)X = \sum_{f \in \mathrm{Hom}(B,G)} fX$ обозначим подгруппу группы G, порожденную всеми гомоморфными образами подмножества X. Через 1_A обозначим тождественный автоморфизм группы A. Если A — однородная группа без кручения, то $t(A)$ — ее тип. $\mathbb{N}$ — множество всех натуральных чисел, $\mathbb{Z}$ — кольцо или группа целых чисел, $\mathbb{Q}$ — поле или группа всех рациональных чисел, $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ — кольцо или группа целых p-адических чисел, P — множество всех простых чисел.

Подгруппа $G \leqslant A$ называется *чистой* (*сервантной*) в A, если $G \cap nA = nG$ для каждого натурального числа n. Абелева p-группа называется *коциклической*, если она является циклической или изоморфна группе Z_{p^∞}.

Если R — кольцо, то операция $\varphi \circ \psi = \varphi\psi - \psi\varphi$ (где $\varphi, \psi \in R$) называется *коммутированием*, а элемент $[\varphi, \psi] = \varphi\psi - \psi\varphi$ — *коммутатором* элементов φ и ψ.

Свойства 1, 2 проверяются непосредственно:

1) $[\alpha, \beta]\gamma = \alpha[\beta, \gamma] + [\alpha\gamma, \beta]$, $[\alpha, \beta]\gamma = [\alpha, \beta\gamma] + \beta[\gamma, \alpha]$;

2) $\gamma[\alpha, \beta] = [\gamma, \alpha]\beta + [\alpha, \gamma\beta]$, $\gamma[\alpha, \beta] = [\gamma\alpha, \beta] + [\beta, \gamma]\alpha$;

3) *в кольце R операция коммутирования ассоциативна тогда и только тогда, когда любой коммутатор кольца R лежит в его центре.*

Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (гос. контракт П937 от 20 августа 2009 г.).

Действительно, $[[a,b],c] = abc - bac - cab + cba$, $[a,[b,c]] = abc - acb - bca + cba$. Приравнивая правые части, получаем $0 = bac + cab - acb - bca = [[c,a],b]$, откуда $[c,a] \in Z(R)$.

Подгруппу $H \leqslant A$ назовем *коммутаторно инвариантной*, кратко *ki-подгруппой*, если $[\varphi,\psi]h \in H$ для любых $h \in H$ и $\varphi,\psi \in E(A)$. В группе с коммутативным кольцом эндоморфизмов всякая подгруппа является *ki-подгруппой*.

Лемма 1. *Пусть $A = \bigoplus_{i\in I} A_i$, $\pi_i : A \to A_i$ — соответствующие проекции и $H \leqslant A$. Тогда*

1) $H \leqslant ki\, A$ в том и только в том случае, когда $\operatorname{Hom}(A_i, A_j)\pi_i H \subseteq H \cap A_j$ и $[\varphi_i,\psi_i]\pi_i H \subseteq H \cap A_i$ для любых $\varphi_i,\psi_i \in E(A_i)$, где $i,j \in I$ и $j \neq i$;

2) если $B_i \leqslant ki\, A_i$, то $B = \bigoplus_{i\in I} B_i \leqslant ki\, A$ в том и только в том случае, когда $\operatorname{Hom}(A_i, A_j)B_i \subseteq B_j$ для всех $i,j \in I$, где $j \neq i$;

3) если $A_i \leqslant fi\, A$ и $B_i \leqslant A_i$, то $B = \bigoplus_{i\in I} B_i \leqslant ki\, A$ в том и только в том случае, когда $B_i \leqslant ki\, A_i$ для всех $i \in I$;

4) ki-подгруппа H группы A является ее fi-подгруппой в том и только в том случае, когда $\pi_i H = H \cap A_i$ и $H \cap A_i \leqslant fi\, A_i$ для каждого $i \in I$.

Доказательство. 1. Необходимость. Пусть $G_i = \bigoplus_{j\in I\setminus\{i\}} A_j$. Продолжим $f \in \operatorname{Hom}(A_i, A_j)$ до $\bar f \in E(A)$, полагая $\bar f \mid A_i = f$, $\bar f \mid G_i = 0$. Тогда если $a_i + g_i \in H$ $(a_i \in A_i,\ g_i \in G_i)$, то $[\bar f, \pi_i](a_i + g_i) = f a_i \in H \cap A_j$. Необходимость включения $[\varphi_i,\psi_i]\pi_i H \subseteq H \cap A_i$ очевидна.

Достаточность. Пусть $\theta : A \to G_i$ — проекция, $1 - \theta = \pi$ $(\pi = \pi_i)$, $\alpha,\beta \in E(A)$ и $a = \pi h$ для некоторого $h \in H$. Тогда

$$\begin{aligned}[][\alpha,\beta]a &= [(\pi+\theta)\alpha, (\pi+\theta)\beta]a = [\pi\alpha,\pi\beta]a + [\pi\alpha,\theta\beta]a + [\theta\alpha,\pi\beta]a + [\theta\alpha,\theta\beta]a \\ &= [\pi\alpha,\pi\beta]a + (\pi\alpha\theta\beta - \pi\beta\theta\alpha)a + (\theta\alpha\pi\beta + \theta\alpha\theta\beta - \theta\beta\pi\alpha - \theta\beta\theta\alpha)a.\end{aligned}$$

Здесь $[\pi\alpha,\pi\beta]a \in [\pi\alpha,\pi\beta]\pi H \subseteq H \cap A_i$,

$$(\pi\alpha\theta\beta - \pi\beta\theta\alpha)a \in \operatorname{Hom}(G_i, A_i)\theta H = \sum_{j\in I\setminus\{i\}} \operatorname{Hom}(A_j, A_i)\pi_j H \subseteq H \cap A_i,$$

$$\begin{aligned}(\theta\alpha\pi\beta + \theta\alpha\theta\beta - \theta\beta\pi\alpha - \theta\beta\theta\alpha)a &\in \operatorname{Hom}(A_i, G_i)\pi H \\ &= \sum_{j\in I\setminus\{i\}} \operatorname{Hom}(A_i, A_j)\pi H \subseteq \sum_{j\in I\setminus\{i\}} (H \cap A_j).\end{aligned}$$

Поскольку $h = \pi_1 h + \dots + \pi_n h$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$ $(\pi_j = \pi_{i_j},\ i_j \in I,\ j = 1,\dots,n)$, то $[\alpha,\beta]h \in H$.

Пп. 2–4 следуют из п. 1.

Из п. 1 леммы 1 непосредственно вытекает, что ki-прямые слагаемые вполне инвариантны.

Доказательство следующей леммы проводится непосредственно.

Лемма 2. *Пусть $H \leqslant ki\, A$. Тогда*

1) если B — прямое слагаемое группы A и π — проекция A на B, то $H \cap B$, $\pi H \leqslant ki\, B$;

2) если $A = \oplus A_i$, $\pi_i : A \to A_i$ — соответствующие проекции и $\underline{H} = \bigoplus (H \cap A_i)$, $\overline{H} = \bigoplus (\pi_i H)$, то $\underline{H}, \overline{H} \leqslant ki\, A$, $\underline{H} \leqslant H \leqslant \overline{H}$ и $\underline{H} = \overline{H}$, если и только если $H = \bigoplus (H \cap A_i)$;

3) *если* $A = B \oplus G$, *где* $G \leqslant fi\, A$ *и* $H \leqslant ki\, B$, *то* $H \oplus \mathrm{Hom}(B, G)H \leqslant ki\, A$.

С помощью лемм 1 и 2 легко строятся примеры ki-подгрупп, не являющихся fi-подгруппами.

Пример 1. Пусть $o(a) = p$, $o(b) = p^3$, $A = \langle a \rangle \oplus \langle b \rangle$ и $H = \langle a + pb \rangle$. Для подгруппы H выполнены условия п. 1 леммы 1, поэтому $H \leqslant ki\, A$. Однако $H \nleqslant fi\, A$.

Несложно проверяется, что если $H \leqslant fi\, G$ и $G \leqslant ki\, A$, то $H \leqslant ki\, A$; если $H \leqslant ki\, G$ и $G \leqslant fi\, A$, то $H \leqslant ki\, A$. Как показывает следующий пример, может случиться так, что $H \leqslant ki\, G$, $G \leqslant ki\, A$, но $H \nleqslant ki\, A$.

Пример 2. Пусть $o(a) = p$, $o(b) = p^3$, $o(c) = p^8$, $A = \langle a \rangle \oplus \langle b \rangle \oplus \langle c \rangle$, $x = a + pb$, $y = p^2 c$ и $G = \langle x \rangle \oplus \langle y \rangle$. Если $\pi_a : A \to \langle a \rangle$, $\pi_b : A \to \langle b \rangle$, $\pi_c : A \to \langle c \rangle$ — проекции, то $\pi_a(G) = \langle a \rangle$, $\pi_b(G) = \langle pb \rangle$, $\pi_c(G) = \langle p^2 c \rangle$. Поэтому

$$\mathrm{Hom}(\langle a \rangle, \langle b \rangle)(\pi_a(G)) = \langle p^2 b \rangle \subseteq G \cap \langle b \rangle = \langle p^2 b \rangle,$$

$$\mathrm{Hom}(\langle a \rangle, \langle c \rangle)(\pi_a(G)) = \langle p^7 c \rangle \subseteq G \cap \langle c \rangle = \langle p^2 c \rangle,$$

$$\mathrm{Hom}(\langle b \rangle, \langle a \rangle)(\pi_b(G)) = 0 = G \cap \langle a \rangle,$$

$$\mathrm{Hom}(\langle b \rangle, \langle c \rangle)(\pi_b(G)) = \langle p^6 c \rangle \subseteq G \cap \langle c \rangle = \langle p^2 c \rangle,$$

$$\mathrm{Hom}(\langle c \rangle, \langle a \rangle)(\pi_c(G)) = 0 = G \cap \langle a \rangle,$$

$$\mathrm{Hom}(\langle c \rangle, \langle b \rangle)(\pi_c(G)) = \langle p^2 b \rangle \subseteq G \cap \langle b \rangle = \langle p^2 b \rangle.$$

Следовательно, по лемме 1 $G \leqslant ki\, A$. Если теперь $H = \langle x + p^2 y \rangle$, то аналогично проверяется, что $H \leqslant ki\, G$. Однако $H = \langle a + pb + p^4 c \rangle \nleqslant ki\, A$, поскольку $\pi_a(H) = \langle a \rangle$ и $\mathrm{Hom}(\langle a \rangle, \langle b \rangle)\langle a \rangle = \langle p^2 b \rangle \nsubseteq H$.

Теорема 1. *В группе A каждая ее подгруппа является ki-подгруппой тогда и только тогда, когда $E(A)$ — коммутативное кольцо.*

Доказательство. Необходимость. Из леммы 1 следует, что прямые слагаемые группы A вполне инвариантны, поэтому ее p-компоненты A_p являются коциклическими. Значит, для каждого $m \in \mathbb{N}$ имеет место разложение $A = A_{p_1} \oplus \dots \oplus A_{p_m} \oplus B_m$, где $B_m[p_j] = 0$ при $j = 1, \dots, m$ и $(p_1 \dots p_m)B_m = B_m$. Если a — элемент конечного порядка, то $a \in A_{p_1} \oplus \dots \oplus A_{p_m}$ для некоторого m, а поскольку кольцо $E(A_{p_1} \oplus \dots \oplus A_{p_m})$ коммутативно, то $[\varphi, \psi]a = 0$ для любых $\varphi, \psi \in E(A)$. Пусть теперь a — элемент бесконечного порядка. Имеем $[\varphi, \psi]a \in \langle a \rangle$. Поэтому $[\varphi, \psi]a = na$ для некоторого $n \in \mathbb{Z}$, $\varphi[\varphi, \psi]a = n\varphi a$. Так как $\varphi[\varphi, \psi] = [\varphi, \varphi\psi]$, то $n\varphi a \in \langle a \rangle$, т. е. $n\varphi a = sa$ для некоторого $s \in \mathbb{Z}$. Аналогично $n\psi a = ka$, где $k \in \mathbb{Z}$. Можно считать, что $a \in B_m$, где m такое натуральное число, что B_m не содержит элементов, порядки которых делятся на простые делители числа n. Поэтому равенство $n^2[\varphi, \psi]a = 0$ влечет $[\varphi, \psi]a = 0$, это доказывает коммутативность $E(A)$.

Достаточность очевидна.

Лемма 3. *Если $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$, где $|\, I\,| > 1$, и $A_i \cong A_j$ при $i, j \in I$, то каждая ki-подгруппа группы A является вполне инвариантной.*

Доказательство. Если $H \leqslant ki\, A$, то в данном случае $H = \oplus(H \cap A_i)$. Действительно, если π — проекция A на A_i и $\pi h = a \neq 0$ для некоторого $h \in H$, то при условии, что $\varphi : A_i \to A_j$ и $\psi : A_j \to A_i$ — взаимно обратные изоморфизмы, в силу леммы 1 имеем $b = \varphi a \in H \cap A_j$ и $a = \psi b \in H \cap A_i$.

Аналогично показывается, что $fa \in H \cap A_i$ для любого $f \in E(A_i)$. Этого в силу п. 4 леммы 1 достаточно для вполне инвариантности H.

Из леммы 3 вытекает, что в делимой группе $D = t(D) \oplus D_0$ каждая ki-подгруппа H либо является периодической вполне инвариантной подгруппой в D, либо имеет вид $H = t(D) \oplus H_1$ для некоторой подгруппы $0 \neq H_1 \leqslant D_0$, причем $H_1 = D_0$, если группа D_0 разложима.

Если D — делимая часть p-группы $A = B \oplus D$, $H \leqslant ki\, A$, $\theta : A \to D$ — проекция и $r(D) > 1$, то из леммы 3 следует, что $H \cap D = \theta H$. Если же $r(D) = 1$, то возможен случай, когда $H \cap D \neq \theta H$. Например, если $B = \langle b \rangle$ — циклическая группа, $e(b) = k \geqslant 1$, $d \in D$, $e(d) = n \geqslant 2k$ и $H = \langle b + d \rangle$, то $\mathrm{Hom}(B, D)B = D[p^k] = \langle p^{n-k} d \rangle \subseteq H \cap D = \langle p^k d \rangle$. Поэтому по п. 1 леммы 1 $H \leqslant ki\, A$. Однако $\theta H = \langle d \rangle \neq H \cap D = \langle p^k d \rangle$. Подобная ситуация рассматривается в следующей лемме.

Лемма 4. *Пусть $A = B \oplus D$, где B — редуцированная, а D — делимая группы, $\pi : A \to B$ — проекция, $H \leqslant A$ и πH — периодическая группа. Тогда*

1) *если $D \cong \mathbb{Q}$, то $H \leqslant ki\, A$, если и только если $[\varphi, \psi]H \subseteq H \cap B$ для любых $\varphi, \psi \in E(A)$;*

2) *если $D = \bigoplus_{p \in \Pi} D_p$ — периодическая группа такая, что $r(D_p) = 1$ для каждого $p \in \Pi$ (Π — некоторое множество простых чисел), то $H \leqslant ki\, A$, если и только если $[\varphi, \psi]H \subseteq (H \cap B) \oplus (H \cap D)$ для любых $\varphi, \psi \in E(A)$.*

Доказательство. Необходимость. Поскольку $D \leqslant fi\, A$ и в обоих случаях $E(D)$ — коммутативное кольцо, то $[\varphi, \psi]H = [\varphi, \psi](\pi H)$. Следовательно, в п. 1 $[\varphi, \psi]H$ — периодическая группа и, значит, она содержится в $H \cap B$.

2. Пусть $h = b + d \in H$, где $b \in B$, $d \in D$ и $\theta = 1 - \pi$. Имеем

$$[\varphi, \psi](b + d) = [\varphi, \psi]b = [(\pi + \theta)\varphi, (\pi + \theta)\psi]b$$
$$= [\pi\varphi, \pi\psi]b + [\pi\varphi, \theta\psi]b + [\theta\varphi, \pi\psi]b + [\theta\varphi, \theta\psi]b.$$

Здесь первое слагаемое содержится в $H \cap B$, а остальные в $H \cap D$ (учтено, что $\pi\varphi\theta\psi b = 0$ и $\pi\psi\theta\varphi b = 0$).

Достаточность пп. 1 и 2 очевидна.

Легко проверить, что если H — периодическая подгруппа группы A, D — периодическая делимая группа, то $\mathrm{Hom}(A, D)H = \bigoplus D_p[p^{m_p}]$, где $m_p = \sup\{e(h) \mid h \in H_p\}$. Здесь $m_p = 0$, если $H_p = 0$, и, значит, $D_p[p^{m_p}] = 0$. Если же D — произвольная делимая группа, $0 \neq H$ — непериодическая подгруппа группы A, то $\mathrm{Hom}(A, D)H = D$.

Теорема 2. *Пусть $A = B \oplus D$, где $D = t(D) \oplus D_0$ — делимая часть группы A и $H \leqslant A$. Тогда $H \leqslant ki\, A$ в том и только в том случае, когда H совпадает с одной из следующих подгрупп:*

1) *$H = F \oplus (\bigoplus_p D_p[p^{k_p}])$, где F — периодическая ki-подгруппа группы B и $k_p \geqslant \sup\{e(b) \mid b \in F_p\}$;*

2) *$H = G \oplus (\bigoplus_{p \in K} D_p[p^{k_p}])$, где G — периодическая ki-подгруппа в группе $B \oplus (\bigoplus_{p \in \Pi} D_p)$ такая, как в п. 2 леммы 4, $k_p \geqslant \sup\{e(g) \mid g \in G_p\}$ и $K \cap \Pi = \varnothing$;*

3) *$H = C \oplus D$, где $C \leqslant ki\, B$;*

4) *$H = E \oplus t(D)$, $r(D_0) = 1$ и E — ki-подгруппа в группе $B \oplus D_0$ такая, как в п. 1 леммы 4.*

Доказательство. Необходимость. Если $\pi : A \to B$, $\theta_p : A \to D_p$, $\theta_0 : A \to D_0$ — проекции, то

$$(H \cap B) \oplus \Big(\bigoplus_p (H \cap D_p)\Big) \oplus (H \cap D_0) \leqslant H \leqslant \pi H \oplus \Big(\bigoplus_p (\theta_p H)\Big) \oplus (\theta_0 H).$$

Так как $\mathrm{Hom}(B, D)\pi H \subseteq H \cap D$ (лемма 1), непериодичность подгруппы πH влечет равенство $H \cap D = D$ (см. абзац перед теоремой), т. е. $D \subseteq H$. Аналогично если $\theta_0 H \neq 0$, то из $\mathrm{Hom}(D_0, t(D))(\theta_0 H) = t(D) = H \cap t(D)$ следует, что $t(D) \subseteq H$. Из леммы 3 при условии $\theta_0 H \neq 0$ и $r(D_0) > 1$ вытекает включение $D_0 \subseteq H$. Для доказательства п. 3 осталось заметить, что если $D \subseteq H$, то $H = C \oplus D$, где $C = H \cap B \leqslant ki\, B$ по лемме 2. Если же $t(D) \subseteq H$ и $\theta_0 H \neq 0$, но $D_0 \nsubseteq H$, то $r(D_0) = 1$ и $H = E \oplus t(D)$, где $E = H \cap (B \oplus D_0) \leqslant ki\, (B \oplus D_0)$, что доказывает п. 4.

Ввиду включения $\mathrm{Hom}(B, D)\pi H \subseteq H \cap D$ условие $\theta_0 H = 0$ влечет периодичность группы πH. Поскольку $\mathrm{Hom}(B, D_p)\pi H \subseteq H \cap D_p$, то $D_p[p^{m_p}] \subseteq H \cap D_p$, где $m_p = \sup\{e(b) \mid b \in (\pi H)_p\}$. Заметим, что если D_p — разложимая группа, то из леммы 3 следует, что $\theta_p H = D_p[p^{k_p}] = H \cap D_p$ для некоторого $k_p \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$ ($k_p \geqslant m_p$). Если $\theta_p H = H \cap D_p$ для каждого простого p, то $H = F \oplus (\bigoplus_p D_p[p^{k_p}])$, где $F = B \cap H = \pi H \leqslant ki\, B$, это доказывает п. 1. В противном случае пусть K — множество всех простых p с условием $\theta_p H = H \cap D_p$, а $\Pi = \{p \in P \setminus K \mid D_p \neq 0\}$. Тогда $H = G \oplus (\bigoplus_{p \in K} D_p[p^{k_p}])$, где $G = H \cap (B \oplus (\bigoplus_{p \in \Pi} D_p)) \leqslant ki\, (B \oplus (\bigoplus_{p \in \Pi} D_p))$, это доказывает п. 2.

Достаточность вытекает из п. 3 леммы 2.

Отметим, что соответствующая теорема для вполне инвариантных подгрупп доказана в [1, теорема 1.4].

Если A — сепарабельная группа без кручения, то обозначим через $\Omega(A)$ множество типов всех прямых слагаемых ранга 1 группы A. Типы $s, t \in \Omega(A)$ будем считать *эквивалентными*, если существуют такие $r_1, \dots, r_n \in \Omega(A)$, что типы r_i, r_{i+1} сравнимы для всех $i = 0, \dots, n$, где $r_0 = s$, $r_{n+1} = t$. Если теперь $\Omega(A) = \bigcup_{k \in K} \Omega_k$ — разбиение множества $\Omega(A)$ на непересекающиеся классы эквивалентности, то $A = \bigoplus_{k \in K} A_k$, где A_k — сепарабельные группы, $\Omega(A_k) = \Omega_k$, слагаемые A_k вполне инвариантны в A [2, § 19, упражнение 7].

Теорема 3. *В разложимой редуцированной сепарабельной группе без кручения A все ki-подгруппы вполне инвариантны тогда и только тогда, когда для каждого прямого слагаемого B ранга 1 группы A в дополнительном прямом слагаемом найдется прямое слагаемое G, изоморфное B.*

Доказательство. Необходимость. Допустим, что в $\Omega(A)$ (см. абзац перед теоремой) все типы несравнимы. Тогда $A = \bigoplus_{t \in \Omega(A)} A_t$, где $r(A_t) = 1$ и типы групп A_t несравнимы. В этом случае кольцо $E(A)$ коммутативно и каждая подгруппа группы A будет ki-подгруппой, однако A имеет не вполне инвариантные подгруппы. Допустим теперь, что $B \oplus G$ — прямое слагаемое в A, $r(B) = r(G) = 1$ и $t(B) < t(G)$. Поскольку A редуцированная, то $pB \neq B$ и $pG \neq G$ для некоторого простого числа p. Если $b \in B$, $g \in G \setminus pG$ и $A = B \oplus C$ ($G \subseteq C$), то пусть $H = \langle pb + g \rangle + E$, где $E = \mathrm{Hom}(B, C)\langle pb \rangle$. Тогда $E \subseteq pC$ и $E \leqslant fi\, C$. Если θ — проекция A на C и в C нет прямых слагаемых, изоморфных

B, то $\mathrm{Hom}(C,B)\theta H=0$. Следовательно, по лемме 1 $H\leqslant ki\,A$. Однако $g\notin H$, значит, $\theta H\nsubseteq H$, т. е. $H\nleqslant fi\,A$.

Достаточность. Пусть $h\in H\leqslant ki\,A$. Тогда $h=a_1+\dots+a_n$, где $a_i\in A_i$, $r(A_i)=1$ и A_i — прямые слагаемые в A. Поскольку для каждого A_i в дополнительном прямом слагаемом найдется прямое слагаемое $A_j\cong A_i$, то так же, как в лемме 3, следует, что $a_i\in H$ и, кроме того, $f(a_i)\in H$ для каждого $f\in E(A)$, т. е. $f(h)\in H$, значит, $H\leqslant fi\,A$.

Теорема 4. *В редуцированной алгебраически компактной группе без кручения A каждая ее ki-подгруппа является вполне инвариантной тогда и только тогда, когда все p-адические компоненты группы A разложимы.*

Доказательство. Необходимость. Группа A представима в виде $A=\prod A_p$, где каждая p-адическая компонента A_p является p-адической алгебраически компактной группой. Можно считать, что $A_p\leqslant A$. Пусть $B=\prod\limits_{p\in K}A_p$ — прямое произведение всех неразложимых групп A_p. Тогда кольцо $E(B)$ коммутативно, а так как $B\leqslant fi\,A$, то каждая подгруппа группы B будет ki-подгруппой в A. Поскольку B содержит не вполне инвариантные подгруппы, это доказывает необходимость.

Достаточность. Пусть $h\in H\leqslant ki\,A$, $f\in E(A)$, $h=(\dots,a_p,\dots)$, где $a_p\in A_p$. Запишем A_p в виде $A_p=B_p\oplus G_p$, где $a_p\in B_p$, $G_p\neq 0$. Тогда $A=B\oplus G$, где $B=\prod B_p$. Имеем $f(h)=b+g$, где $b=(\dots,b_p,\dots)\in B$, $g=(\dots,g_p,\dots)\in G$. По лемме 1 $g\in H\cap G$. Осталось показать, что $b\in H$. Найдутся $\varphi_p,\psi_p\in E(A_p)$ со свойствами $\varphi_p(b_p)\in H\cap G_p$ и $\psi_p(\varphi_p(b_p))=b_p$. Если теперь $\varphi=(\dots,\varphi_p,\dots)$, $\psi=(\dots,\psi_p,\dots)$, то $\varphi\in\mathrm{Hom}(B,G)$, $\psi\in\mathrm{Hom}(G,B)$. По лемме 1 $\varphi b\in H\cap G$ и $b=\psi(\varphi b)\in H\cap B$.

Приведем следующий полезный результат.

Лемма 5 [3, лемма 9.5]**.** *Пусть $A=B\oplus C$ — прямое разложение с проекциями π,θ. Если разложению $A=B\oplus C_1$ соответствуют проекции π_1,θ_1, то $\pi_1=\pi+\pi\varphi\theta$, $\theta_1=\theta-\pi\varphi\theta$ для некоторого эндоморфизма φ группы A. Обратно, для всяких эндоморфизмов π_1,θ_1 приведенного выше вида имеет место разложение $A=B\oplus\theta_1 A$.*

Если $A=B\oplus C$, то в [3, теорема 9.6] доказано, что пересечение всех дополнительных прямых слагаемых к B в группе A есть максимальная вполне инвариантная подгруппа группы A, не пересекающаяся с B. Некоторые свойства пересечений прямых слагаемых рассматривались в [4].

Теорема 5. *Пусть $A=B\oplus C$.*

1. *Наименьшая ki-подгруппа группы A, содержащая C, является fi-подгруппой и совпадает с:*

(а) $\mathrm{Hom}(C,B)C\oplus C$;

(б) *суммой G всех дополнительных прямых слагаемых к B в группе A.*

2. *Наибольшая ki-подгруппа группы A, содержащаяся в C, является fi-подгруппой и совпадает с:*

(а) $K=\bigcap\limits_{\varphi\in\mathrm{Hom}(C,B)}\mathrm{Ker}\,\varphi$;

(б) *пересечением N всех дополнительных прямых слагаемых к B в группе A.*

Доказательство. 1. П. (а) вытекает из п. 1 леммы 1. Поскольку $C\subseteq G$, то $G=(B\cap G)\oplus C$. Если C_1 — дополнительное прямое слагаемое к B, то из леммы 5 следует, что $C + C_1 = \varphi(C) \oplus C$ для некоторого гомоморфизма $\varphi : C \to B$. Отсюда

$$G = \Big(\sum_{\varphi \in \mathrm{Hom}(C,B)} \varphi(C) \Big) \oplus C = \mathrm{Hom}(C,B)C \oplus C,$$

что ввиду п. (а) доказывает п. (б).

2. Вполне инвариантность подгруппы K следует из ее определения. Если теперь $X \leqslant ki\, A$ и $X \subseteq C$, то ввиду п. 1 леммы 1 $X \subseteq \mathrm{Ker}\,\varphi$ для каждого $\varphi \in \mathrm{Hom}(C,B)$. Поэтому $X \subseteq K$, что доказывает п. (а).

Согласно замечанию перед теоремой N является fi-подгруппой в A, поэтому $N \subseteq K$. Если $A = B \oplus C_1$, то $K = (K \cap B) \oplus (K \cap C_1)$, где $K \cap B = 0$, поэтому $K \subseteq C_1$ и, значит, $K \subseteq N$.

Отметим, что в [5, теорема 12] доказана соответствующая теорема для проективно инвариантных подгрупп. О проективно инвариантных подгруппах см. также [6].

Лемма 6. *Пусть A — неограниченная p-группа. Тогда если $0 \neq H \leqslant ki\, A$, то $H \cap p^n A \neq 0$ для каждого $n \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Пусть D — делимая часть группы A. Тогда если $A = C \oplus D$ и $h = c + d \in H[p]$, где $c \in C$, $d \in D$, то в силу инъективности группы D отображение $c \to d$ продолжается до гомоморфизма $C \to D$. Согласно п. 1 леммы 1 $d \in H \cap D$. Осталось заметить, что $D \subseteq p^n A$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Предположим теперь, что группа A редуцированная. Допустим, что $\pi H \neq 0$, где π — проекция на некоторое циклическое прямое слагаемое $\langle a \rangle$. Тогда для всякого элемента c экспоненты $e(c) = n + 1 \geqslant k = e(a)$, принадлежащего дополнительному прямому слагаемому C, отображение $a \to p^{n+1-k}c$ продолжается до гомоморфизма $\langle a \rangle \to C$. Согласно той же лемме 1 (п. 1) отсюда следует, что $H \cap (p^n C) \neq 0$. Допустим теперь, что $\pi H = 0$ для каждого циклического прямого слагаемого группы A и соответствующей проекции π. Тогда если B — базисная подгруппа группы A, то для каждого n имеет место разложение $A = B_1 \oplus \dots \oplus B_n \oplus A_n$, где B_n равно 0 или является прямой суммой циклических групп одного и того же порядка p^n, а $A_n = \left(\bigoplus_{i=n+1}^{\infty} B_i \right) + p^n A$. В силу предположения $H \subseteq A_n$. Поскольку $p^n A$ — существенная подгруппа в A_n [3, § 32, упражнение 9], то $H \cap p^n A \neq 0$.

Исследуем вопрос существования минимальных и максимальных ki-подгрупп в p-группах (в [6] это сделано для проективно инвариантных подгрупп).

1. В неограниченной сепарабельной p-группе нет минимальных ki-подгрупп.

Действительно, если H — минимальная ki-подгруппа, то $H = H \cap p^n A$ для каждого $n \in \mathbb{N}$, откуда $H = H \cap (\bigcap_n p^n A) = 0$. Если p-длина редуцированной p-группы равна $\sigma + 1$ и $p^\sigma A$ — неразложимая группа, то $p^\sigma A$ — минимальная ki-подгруппа. Если же p-группа нередуцированная и D — ее делимая часть, то $D[p]$ — минимальная ki-подгруппа.

2. Если $A = A_1 \oplus \dots \oplus A_m$ — ограниченная p-группа, где A_i — прямые суммы некоторого числа циклических групп порядка p^{k_i}, $k_1 < \dots < k_m$, то $A_m[p]$ — минимальная ki-подгруппа.

3. В неограниченной редуцированной p-группе A нет максимальных ki-подгрупп.

Воспользуемся идеей доказательства А. П. Дика соответствующего утверждения для fi-подгрупп. Действительно, если H — максимальная ki-подгруппа, $y \in A \setminus H$, $e(y) = k$, то $H + A[p^k] = A$. Пусть теперь $\langle x \rangle$ — прямое слагаемое группы A такое, что $e(x) = m > k$. Тогда $x = h + a$ для некоторых $h \in H$, $a \in A[p^k]$. Так как $p^k x = p^k h \neq 0$, то $\langle h \rangle$ — прямое слагаемое группы A, $A = \langle h \rangle \oplus C$. Если $y = g + c$ для некоторых $g \in \langle h \rangle$ и $c \in C$, то $p^k y = p^k g + p^k c = 0$. Поэтому $e(c) < k$, значит, $\langle c \rangle$ является гомоморфным образом группы $\langle h \rangle$. По лемме 1 (п. 1) $\langle c \rangle \subseteq H \cap C$ и, следовательно, $y \in H$; противоречие.

4. Если A — ограниченная p-группа и $p^k A = 0$, где $k \geqslant 2$ и $p^{k-1} A \neq 0$, то $A[p^{k-1}]$ — наибольшая ki-подгруппа.

Действительно, если $A = A_1 \oplus \dots \oplus A_m$, где A_i — прямые суммы некоторого числа циклических групп порядка p^{k_i}, $k_1 < \dots < k_m = k$, то $A[p^{k-1}] = (A_1 \oplus \dots \oplus A_{m-1}) \oplus pA_m$. Поэтому из п. 1 леммы 1 следует, что всякая ki-подгруппа, строго содержащая $A[p^{k-1}]$, совпадает с A. Пусть теперь $H \leqslant ki\, A$ и $h \in H \setminus A[p^{k-1}]$. Тогда $e(h) = k$ и, значит, $\langle h \rangle$ — прямое слагаемое в A, $A = \langle h \rangle \oplus B$. Имеем $\mathrm{Hom}(\langle h \rangle, B)\langle h \rangle = B$. Отсюда ввиду леммы 1 (п. 1) получаем, что $H = A$. Это доказывает, что $A[p^{k-1}]$ — наибольшая ki-подгруппа в A.

5. В нередуцированной p-группе с неограниченной редуцированной частью максимальных ki-подгрупп нет. Если же редуцированная часть нередуцированной p-группы — ограниченная группа, то наибольшая ki-подгруппа совпадает с суммой делимой части и наибольшей ki-подгруппой ее ограниченной части.

6. В делимой p-группе максимальных ki-подгрупп нет.

E-центром группы A назовем следующую ее подгруппу:

$$Z(A) = \{a \in A \mid [\varphi, \psi]a = 0 \ \text{ для всех } \varphi, \psi \in E(A)\}.$$

Если $G \leqslant fi\, A$, то $Z(G) \subseteq Z(A)$; в частности, если кольцо $E(G)$ коммутативно, то $G \subseteq Z(A)$. Если A — группа такая, что все ее ненулевые эндоморфизмы являются мономорфизмами и $E(A)$ — некоммутативное кольцо, то $Z(A) = 0$. Если A — группа без кручения, то $Z(A)$ — чистая подгруппа в A, в общем случае это не так (см., например, следствие 3). Любая подгруппа в $Z(A)$ будет ki-подгруппой в A.

Обозначим через A' подгруппу группы A, порожденную всеми ее подгруппами вида $[\xi, \eta]A$, т. е. $A' = \langle [\xi, \eta]A \mid \xi, \eta \in E(A) \rangle$ (*E-коммутант* группы A). Ясно, что кольцо $E(A)$ коммутативно в точности тогда, когда $A' = 0$, а $Z(A) = A$. Если $a \in A$ и $\xi, \eta \in E(A)$, то через $[\xi, \eta]a$ обозначим *коммутатор* элемента a (соответствующий эндоморфизмам ξ, η). Всякая подгруппа, содержащая A', будет ki-подгруппой в A.

Из свойств 1, 2 коммутаторов следует, что $Z(A)$, $A' \leqslant fi\, A$. Возможен случай, когда $Z(A) = A'$. Например, если B, C — группы с коммутативными кольцами эндоморфизмов и $C \leqslant fi\, A = B \oplus C$, причем $\mathrm{Hom}(B, C)B = C$, то $A' = C = Z(A)$ (см. следствие 1 и лемму 8).

Лемма 7. *Пусть* $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$, *где* $|\,I\,| > 1$, *и* $G_i = \bigoplus_{j \in I \setminus \{i\}} A_j$.

1. *Если для любого* $0 \neq a \in A_i$ *каждой группы* A_i *существует* $\varphi \in \mathrm{Hom}(A_i, G_i)$ *со свойством* $\varphi a \neq 0$, *то* $Z(A) = 0$.

2. $Z(A) = \bigoplus_{i \in I} (Z(A) \cap A_i)$.

3. $\varphi(Z(A) \cap A_i) = 0$ *для любого* $\varphi \in \mathrm{Hom}(A_i, G_i)$.

4. $Z(A) \cap A_i = B_i$, *где* $B_i = Z(A_i) \cap \big(\bigcap_{\varphi \in \mathrm{Hom}(A_i, G_i)} \mathrm{Ker}\, \varphi \big)$. *В частности,*

равенство $Z(A)\cap A_i = Z(A_i)$ имеет место тогда и только тогда, когда $\varphi(Z(A_i)) = 0$ для любого $\varphi \in \mathrm{Hom}(A_i, G_i)$.

Доказательство. 1. Пусть $x = a_1 + \dots + a_n \in A$, где $0 \neq a_j \in A_{i_j}$ ($j = 1, \dots, n$; $i_j \in I$), $\theta : A \to G_{i_1}$ — проекция и $\varphi \in \mathrm{Hom}(A_{i_1}, G_{i_1})$ такой, что $\varphi a_1 \neq 0$. Считаем, что $\varphi \in E(A)$, полагая $\varphi \mid A_{i_1} = \varphi$, $\varphi \mid G_{i_1} = 0$. Тогда $[\varphi, \theta]x = -\varphi a_1 \neq 0$. Следовательно, $x \notin Z(A)$. Поэтому $Z(A) = 0$.

П. 2 следует из вполне инвариантности E-центра. П. 3 вытекает из доказательства п. 1.

4. Имеем $Z(A) = \oplus(Z(A) \cap A_i)$. Включение $Z(A) \cap A_i \subseteq Z(A_i)$ очевидно. Из доказательства п. 1 следует включение $Z(A)\cap A_i \subseteq B_i$. Пусть теперь $a \in B_i$, $\pi : A \to A_i$ и $\theta : A \to G_i$ — проекции. Тогда для любых $\alpha, \beta \in E(A)$ имеем

$$[\alpha, \beta]a = [(\pi + \theta)\alpha, (\pi + \theta)\beta]a = [\pi\alpha, \pi\beta]a + [\pi\alpha, \theta\beta]a + [\theta\alpha, \pi\beta]a + [\theta\alpha, \theta\beta]a.$$

Здесь $(\pi\alpha) \mid A_i$, $(\pi\beta) \mid A_i \in E(A_i)$, поэтому $[\pi\alpha, \pi\beta]a = 0$, а оставшиеся три слагаемые равны 0, поскольку в $[\pi\alpha, \theta\beta]$, $[\theta\alpha, \pi\beta]$, $[\theta\alpha, \theta\beta]$ входят эндоморфизмы $\theta\alpha$, $\theta\beta$, действующие на элементах из A_i как гомоморфизмы из $\mathrm{Hom}(A_i, G_i)$. Итак, $B_i \subseteq Z(A) \cap A_i$.

Из леммы 7, в частности, следует, что для гомоморфизма $f : A \to B$ не обязательно $f(Z(A)) \subseteq Z(B)$. Кроме того, если $A = \oplus A_i$ $\bigl(A = \prod A_i\bigr)$, где $A_i \leqslant fi\, A$, то $Z(A) = \oplus Z(A_i)$ $\bigl(Z(A) = \prod Z(A_i)\bigr)$. Если $A = \oplus A_i$ $\bigl(A = \prod A_i\bigr)$, где $|\, I\,| > 1$ и $A_i \cong A_j$ при $i, j \in I$, то $Z(A) = 0$.

Следствие 1. *Если $A = B \oplus C$ и $C \leqslant fi\, A$, то $Z(A) = G \oplus Z(C)$, где $G = Z(B) \cap (\bigcap\limits_{\varphi \in \mathrm{Hom}(B,C)} \mathrm{Ker}\,\varphi)$.*

Следствие 2. *Пусть $D = t(D) \oplus D_0$ — делимая группа. Тогда*

1) если $t(D) \neq 0$, то $Z(D) = \bigoplus\limits_{p\in\Pi} D_p$, где $\Pi = \{p \in P \mid r(D_p) = 1\}$ и $Z(D) = 0$ при $\Pi = \varnothing$;

2) если $t(D) = 0$, то $Z(D) = D_0$ при условии, что $r(D_0) = 1$, и $Z(D) = 0$ при $r(D_0) > 1$.

Следствие 3. 1. *Если $A = B \oplus D$ — нередуцированная группа без кручения, где D — ее делимая часть, то $Z(D) = D$ при условии $r(D) = 1$, в противном случае $Z(A) = 0$.*

2. *Если $T = t(A)$ и $A = T \oplus R$ — расщепляющаяся группа, то $Z(A) = Z(T)$ при условии, что T — нередуцированная группа, в противном случае $Z(A) = Z(T) \oplus (Z(R) \cap (\bigcap\limits_{p\in\Pi} p^{m_p}R))$, где $\Pi = \{p \in P \mid T_p \neq 0\}$, $m_p = \sup\{e(a) \mid a \in T_p\}$.*

Теорема 6. *Пусть $A = B \oplus D$, где $D = t(D) \oplus D_0$ — ненулевая делимая часть группы A, и пусть $G = Z(B) \cap (\bigcap\limits_{\varphi\in\mathrm{Hom}(B,D)} \mathrm{Ker}\,\varphi)$. Тогда G является периодической подгруппой, $G = \bigoplus\limits_{p\in\Pi} G_p$, а $Z(A)$ совпадает с одной из следующих подгрупп:*

1) если $t(D) \neq 0$, то $Z(A) = G \oplus (\bigoplus\limits_{p\in K} D_p)$, где $K = \{p \in P \mid r(D_p) = 1\}$ и $\Pi \cap K = \varnothing$;

2) если $t(D) = 0$, то либо $Z(A) = G$, либо, если $r(D_0) = 1$, $Z(A) = G \oplus D_0$.

Доказательство. Имеем $Z(A) = (Z(A)\cap B) \oplus (Z(A)\cap t(D)) \oplus (Z(A)\cap D_0)$. Так как $t(D) \leqslant fi\, A$, согласно следствию 1 $Z(A) \cap t(D) = Z(t(D)) = \bigoplus\limits_{p\in K} D_p$, где $K = \{p \in P \mid r(D_p) = 1\}$, причем $Z(A) \cap D_0 = 0$, если $t(D) \neq 0$ или $r(D_0) > 1$. Всякая подгруппа $X \leqslant B$ со свойством $\mathrm{Hom}(B,D)X = 0$ является периодической, причем $X_p = 0$ при $D_p \neq 0$. Оставшиеся утверждения вытекают из леммы 7.

Если $A = \oplus A_i$, то, как следует из следующей леммы, может случиться так, что $A'_i = 0$, но $A' \neq 0$.

Лемма 8. *Пусть* $A = \bigoplus\limits_{i \in I} A_i$, *где* $|\,I\,| > 1$, *и* $G_i = \bigoplus\limits_{j \in I \setminus \{i\}} A_j$. *Тогда*

1) $A' = \langle \mathrm{Hom}(A_i, G_i)A_i, \mathrm{Hom}(G_i, A_i)G_i, A'_i, G'_i \rangle$;

2) $A' = \bigoplus\limits_{i \in I} A'_i$ *в точности тогда, когда* $\mathrm{Hom}(A_i, A_j)A_i \subseteq A'_j$ *для любых* $i, j \in I$, $j \neq i$.

Доказательство. 1. Пусть $\pi : A \to A_i$, $\theta : A \to G_i$ — проекции, $f \in \mathrm{Hom}(A_i, G_i)$ и $a \in A_i$. Тогда если $\varphi \in E(A)$ такой, что $\varphi \mid A_i = f$, $\varphi \mid G_i = 1_{G_i}$, то $[\theta, \varphi]a = fa$. Это доказывает, что $\mathrm{Hom}(A_i, G_i)A_i \subseteq A'$. Если теперь $\xi, \eta \in E(A)$, то

$$\begin{aligned}[\xi, \eta]a &= [(\pi + \theta)\xi, (\pi + \theta)\eta]a \\ &= [\pi\xi, \pi\eta]a + (\pi\xi\theta\eta - \pi\eta\theta\xi)a + (\theta\xi\pi\eta + \theta\xi\theta\eta - \theta\eta\pi\xi - \theta\eta\theta\xi)a.\end{aligned}$$

Здесь $[\pi\xi, \pi\eta]a \in A'_i$, второе слагаемое принадлежит $\mathrm{Hom}(G_i, A_i)G_i$, а третье — $\mathrm{Hom}(A_i, G_i)A_i$. Поскольку аналогичные рассуждения справедливы и для элементов подгруппы G_i, то A' совпадает с указанной подгруппой. Отметим, что $\mathrm{Hom}(G_i, A_i)G_i = \sum\limits_{j \in I \setminus \{i\}} \mathrm{Hom}(A_j, A_i)A_j$.

П. 2 вытекает из п. 1.

Пусть $D = t(D) \oplus D_0$ — делимая группа, где $t(D) = \oplus D_p$ — ее периодическая часть. Тогда из леммы 8 следует, что если $D_0 = 0$, то $D' = \bigoplus\limits_{p \in \Pi} D_p$, где $\Pi = \{p \in P \mid r(D_p) > 1\}$; если $r(D_0) = 1$, то $D' = t(D)$; а если $r(D_0) > 1$, то $D' = D$. Кроме того, если $A = B \oplus C$, где $C \leqslant fi\, A$, то $A' = B' \oplus \langle \mathrm{Hom}(B, C)B, C' \rangle$. В частности, если $A = B \oplus D$ — p-группа или группа без кручения, где D — ее делимая часть, то $A' = B' \oplus D$. Более общим является

Следствие 4. *Пусть* $A = B \oplus D$, *где* $D = t(D) \oplus D_0$ — *ненулевая делимая часть группы* A *и* $B \neq 0$. *Тогда* A' *совпадает с одной из следующих подгрупп:*

1) *если* B — *непериодическая группа, то* $A' = B' \oplus D$;

2) *если* B — *периодическая группа, то* $A' = B' \oplus (\bigoplus\limits_{p \in \Pi} D_p) \oplus (\bigoplus\limits_{p \in K} D_p[p^{m_p}]) \oplus D'_0$, *где* $\Pi = \{p \in P \mid r(D_p) > 1\}$, $K = \{p \in P \mid r(D_p) = 1, B_p \neq 0\}$, $m_p = \sup\{e(b) \mid b \in B_p\}$, *а* $D'_0 = 0$ *при* $r(D_0) = 1$ *и* $D'_0 = D_0$ *при* $r(D_0) > 1$.

Лемма 9. *Если* $A = B \oplus G$ *и для любых* $b \in B$, $g \in G$ *найдутся такие* $x \in G$, $y \in B$ *и* $\varphi \in \mathrm{Hom}(B, G)$, $\psi \in \mathrm{Hom}(G, B)$, *что* $\varphi y = g$, $\psi x = b$, *то каждый элемент группы* A *является коммутатором.*

Доказательство. Продолжим φ, ψ до эндоморфизмов группы A, полагая их действия равными нулевому эндоморфизму на соответствующих дополнительных прямых слагаемых. Тогда если π — проекция A на B, то $[\pi, \varphi + \psi](x - y) = b + g$.

Если $A = Z_p \oplus Z$, то $Z(A) = Z_p \oplus pZ$, а $A' = Z_p$. В данном случае $Z(A)$ — максимальная подгруппа в A. Покажем, что если в A нет прямых слагаемых, изоморфных Z_p для каждого простого числа p, то $Z(A)$ не может быть максимальной подгруппой. Действительно, в противном случае $A/Z(A)$ — группа простого порядка p, и так как $pA \subseteq Z(A)$, то $A_p \neq 0$. Из леммы 7 следует, что A_p — неразложимая группа. Поэтому $A = A_p \oplus B$ для некоторой подгруппы B. Так как $A_p \subseteq Z(A)$, то $Z(A) = A_p \oplus (Z(A) \cap B)$. Здесь $|B/(Z(A) \cap B)| = p$, следовательно, $|A_p| = p$, что противоречит условию.

Приведем описание E-центров и E-коммутантов некоторых редуцированных групп.

1. Если A — неограниченная сепарабельная p-группа, то $Z(A) = 0$ и $A' = A$.

Допустим, что $a \in A$. Тогда a можно вложить в прямое слагаемое B группы A, являющееся ограниченной группой, $A = B \oplus G$. Поскольку G — неограниченная группа, существует гомоморфизм $f : B \to G$ со свойством $fa \neq 0$, что согласно п. 3 леммы 7 влечет $a \notin Z(A)$. А поскольку G — неограниченная группа, то $\mathrm{Hom}(G, B)G = B$. Согласно лемме 8 $B \subseteq A'$.

Для произвольной редуцированной p-группы A возможен случай, когда $Z(A) \neq 0$; действительно, если, например, подгруппа A^1 циклическая, то $Z(A) = A^1$.

2. Пусть A — ограниченная p-группа, $A = B_1 \oplus \dots \oplus B_m$, где B_i — прямые суммы некоторого числа копий группы $Z_{p^{k_i}}$, $k_1 < \dots < k_m$ и $i = 1, \dots, m$. Тогда $Z(A) = p^{k_{m-1}} B_m$ и $A' = A[p^{k_{m-1}}]$, если B_m — циклическая группа и $Z(A) = 0$, $A' = A$ в противном случае.

3. Пусть A — сепарабельная группа без кручения, $\Omega(A)$ — множество типов всех ее прямых слагаемых ранга 1. Тогда $Z(A) = \sum\limits_{t \in C(A)} A(t)$, где $C(A)$ — множество всех таких типов $t \in \Omega(A)$, что $r(A(t)) = 1$, т. е. $Z(A)$ совпадает с суммой всех вполне инвариантных прямых слагаемых ранга 1 группы A, а A' совпадает с суммой тех прямых слагаемых A_i ранга 1, для которых в дополнительном прямом слагаемом есть прямое слагаемое ранга 1 типа $\leqslant t(A_i)$.

4. Пусть $A = \prod\limits_{i \in I} A_i$ — векторная группа, где A_i — группы без кручения ранга 1. Тогда $Z(A) = \prod\limits_{j \in J} A_j$, где J — множество всех таких $j \in I$, что $r(A(t(A_j))) = 1$ при $j \in J$, т. е. $Z(A)$ совпадает с прямым произведением всех вполне инвариантных подгрупп A_j, а $A' = \prod\limits_{k \in K} A_k$, где K — множество всех таких $k \in I$, что в $I \setminus \{k\}$ найдется подгруппа A_s со свойством $t(A_s) \leqslant t(A_k)$.

5. Пусть $A = \prod A_p$ — алгебраически компактная группа без кручения, где A_p — p-адические компоненты группы A. Тогда $Z(A) = \prod\limits_{p \in \Pi} A_p$, где $\Pi = \{p \in P \mid A_p$ — неразложимая группа$\}$, а $A' = \prod\limits_{p \in K} A_p$, где $K = \{p \in P \mid A_p$ — разложимая группа$\}$.

Коммутаторы эндоморфизмов исследовались также в [7]. Некоторые вопросы теории колец эндоморфизмов, связанные с рассматриваемыми, изучались в [8–11].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гриншпон С. Я.* О строении вполне характеристических подгрупп абелевых групп без кручения // Абелевы группы и модули. Томск, 1981. С. 56–92.
2. *Крылов П. А., Михалев А. В., Туганбаев А. А.* Абелевы группы и их кольца эндоморфизмов. М.: Факториал пресс, 2007.
3. *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы. М.: Мир, 1974. Т. 1; 1977. Т. 2.

4. *Чехлов А. Р.* Пересечение прямых слагаемых абелевых p-групп // Абелевы группы и модули. Томск, 1981. С. 240–244.
5. *Чехлов А. Р.* О подгруппах абелевых групп, инвариантных относительно проекций // Фундамент. и прикл. математика. 2008. Т. 14, № 6. С. 211–218.
6. *Чехлов А. Р.* Сепарабельные и векторные группы, проективно инвариантные подгруппы которых вполне инвариантны // Сиб. мат. журн. 2009. Т. 50, № 4. С. 942–953.
7. *Чехлов А. Р.* Об абелевых группах с нормальным кольцом эндоморфизмов // Алгебра и логика. 2009. Т. 48, № 4. С. 520–539.
8. *Чехлов А. Р.* О слабо квазисервантно инъективных группах // Мат. заметки. 2007. Т. 81, № 3. С. 434–447.
9. *Chekhlov A. R., Krylov P. A.* On L. Fuchs' problems 17 and 43 // J. Math. Sci. 2007. V. 143, N 5. P. 3517–3602.
10. *Чехлов А. Р.* О разложимых вполне транзитивных группах без кручения // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 3. С. 714–719.
11. *Чехлов А. Р.* Об одном классе эндотранзитивных групп // Мат. заметки. 2001. Т. 69, № 6. С. 944–949.

Статья поступила 15 февраля 2010 г.

Чехлов Андрей Ростиславович
Томский гос. университет,
механико-математический факультет, кафедра алгебры,
пр. Ленина, 36, Томск 634050
cheklov@math.tsu.ru