Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2010. Том 51, № 5

УДК 510.53+512.562

ЛИНЕЙНЫЕ ПОРЯДКИ НИЗКОЙ СТЕПЕНИ

А. Н. Фролов

Аннотация. Рассматривается класс так называемых k-квазидискретных линейных порядков. Показывается, что каждый k-квазидискретный порядок низкой степени имеет вычислимое представление. Изучаются оценки сложности всех построенных в работе изоморфизмов.

Ключевые слова: линейный порядок, порядковый тип, вычислимое представление, низкая степень, сложность.

1. Введение

Одним из основных направлений исследований алгоритмических свойств алгебраических структур является описание достаточных (и необходимых) условий существования вычислимого представления структуры. Одним из естественных таких достаточных условий является условие «низкости» (представление структуры называется *низким* или *низкой степени*, если оно вычислимо относительно такого оракула X, что $X' \equiv 0'$). Известно [1], например, что не каждый низкий линейный порядок имеет вычислимое представление (в отличие от булевых алгебр [2]). Однако при рассмотрении дополнительных условий, накладываемых на порядковые типы, условие «низкости» может обеспечить вычислимую представимость линейных порядков. Так Доуни и Мозес [3] установили, что для каждого низкого дискретного порядка существует вычислимая копия (линейный порядок называется *дискретным*, если каждый элемент имеет последователя и предшественника). Естественно возникает вопрос об описании порядковых типов, для которых условие «низкости» достаточно для вычислимой представимости [4].

Ранее автором [5] установлено, что каждый низкий линейный порядок, все блоки которого имеют ограниченную конечную мощность (такие порядки называются *сильно η-схожими*, точные определения этого и других порядковых типов, присутствующих во введении, приводятся ниже), имеет вычислимое представление. Там же было замечено, что для каждого низкого линейного порядка, любая пара соседних элементов которого содержится в бесконечном блоке (такие порядки ниже называются 1-*квазидискретными*, в [5] 1-квазидискретные порядки были названы просто *квазидискретными*), существует вычислимая копия. Описанные выше два класса линейных порядков не имеют нетривиального

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 09–01–97010), Совета по грантам президента РФ (код проекта МК–377.2009.1), программы Рособразования «Развитие научного потенциала высшей школы» (код проекта 2.1.1/5367), а также ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (госконтракт Рособразования П267).

пересечения, а именно, линейными порядками, лежащими в обоих классах, являются плотные линейные порядки (неважно содержащие или нет концевые элементы). Ниже вводится новый класс, содержащий оба указанных класса, для которого условие «низкости» достаточно для существования вычислимого представления. А именно, основным результатом данной работы является доказательство того, что каждый линейный порядок, любой блок которого либо бесконечный, либо имеет мощность, не превосходящую некоторого наперед заданного числа, имеет вычислимую копию. Указанное порядковое условие может претендовать на описание вычислимо представимых низких линейных порядков, если ограничиться только лишь условиями, накладываемыми на мощность блоков. Понятно, что решение упомянутой выше задачи полного описания, которая поставлена Доуни [4], должно быть более тонким и учитывать не только мощность блоков, но и их взаимное расположение. Сложность этой задачи связана еще с тем, что на данный момент времени не известно даже полного описания порядковых типов, имеющих вычислимое представление.

В работе придерживаемся основной терминологии теории вычислимости согласно Соару [6], теории линейных порядков — согласно Розенштейну [7]. Также с необходимым материалом можно познакомиться в [4]. Для каждого линейного порядка L и для любых $x, y \in |L|$ определим

1) *интервал*: $[x, y]_L = \{z \mid (x \leq_L z \leq_L y) \vee (y \leq_L z \leq_L x)\}$,

2) *отношение соседства*: $S_L(x, y) \Leftrightarrow [x, y]_L = \{x, y\}$,

3) *отношение блока*: $F_L(x, y) \Leftrightarrow |[x, y]_L| < \infty$,

4) *блок, содержащий* x: $[x]_L = \{y \mid F_L(x, y)\}$ (нетрудно видеть, что отношение блока является эквивалентностью, а блок — это класс эквивалентности).

Если линейный порядок L определен на всем множестве натуральных чисел $\mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$, то запись подпорядка $(A, <_L)$ означает $(A, <_{L \cap A^2})$. То же самое верно и для аналогичных записей линейных подпорядков с дополнительными выделенными предикатами, например, $(A, <_L, S_L)$ означает $(A, <_{L \cap A^2}, S_L \cap A^2)$.

Определение 1. Линейный порядок L называется *сильно η-схожим* (strongly η-like), если существует такое $k \in \mathbb{N}$, что каждый блок имеет мощность, ограниченную числом k, т. е. $|[x]_L| \leq k$ для любого $x \in |L|$.

Определение 2. Линейный порядок L называется *k-дискретным* порядком, если $k \in \mathbb{N}$ и для любого $x \in |L|$ либо $|[x]_L| \leq k$, либо $[x]_L \cong \omega^* + \omega$.

Определение 3. Линейный порядок L называется *k-квазидискретным* порядком, если $k \in \mathbb{N}$ и для любого $x \in |L|$ либо $|[x]_L| \leq k$, либо $[x]_L$ бесконечно.

Ясно, что линейный порядок дискретен тогда и только тогда, когда он 0-дискретен. Очевидно также, что каждый k-дискретный линейный порядок является k-квазидискретным. Понятно, что любой сильно η-схожий линейный порядок k-квазидискретен для некоторого натурального k. Также нетрудно понять, что объединение классов k-дискретных порядков и η-схожих порядков не исчерпывает класс всех k-квазидискретных линейных порядков.

Как отмечено выше, ранее автором [5] доказано, что каждый низкий сильно η-схожий линейный порядок, а также каждый низкий 1-квазидискретный линейный порядок имеют вычислимые представления. Более того, в обоих случаях найдены оценки сложности изоморфизма, соответственно Δ^0_3 и Δ^0_4, т. е. показано, что изоморфизм f между сильно η-схожим или 1-квазидискретным линейным порядком L низкой степени и его вычислимой копией R принадлежит классам Δ^0_3 или Δ^0_4 соответственно. В аналогичных случаях будем также писать

$L \cong_f R$ или $L \cong_{\Delta^0_n} R$ и говорить, что L и R являются Δ^0_n-*изоморфными.* В [5] также замечено, что если 1-квазидискретный порядок является дискретным, то оценку сложности изоморфизма можно «понизить» с Δ^0_4 до Δ^0_3.

В разд. 2 данной работы, во-первых, улучшается оценка в первом случае, а именно доказывается, что каждый низкий сильно η-схожий линейный порядок Δ^0_2-изоморфен некоторому вычислимому порядку; во-вторых, доказывается, что каждый низкий k-квазидискретный порядок для произвольного натурального k имеет вычислимое представление, оценка сложности изоморфизма в этом случае Δ^0_4; в-третьих, замечается, что если k-квазидискретный порядок является k-дискретным, то оценку сложности изоморфизма можно «понизить» с Δ^0_4 до Δ^0_3.

В разд. 3 доказано, что все приведенные выше оценки изоморфизмов не могут быть улучшены. А именно, низкие сильно η-схожие, k-дискретные или k-квазидискретные линейные порядки не могут иметь вычислимых копий относительно вычислимого (т. е. Δ^0_1-), Δ^0_2- или Δ^0_3-изоморфизма соответственно.

2. Вычислимые представления

Для построения вычислимых представлений линейных порядков необходима следующая техническая теорема, которая обобщает аналогичную теорему 6 из [5].

Теорема 1. *Пусть даны счетные линейные порядки L, R и функция вложения $f : L \to R$ такие, что*

1) *если $S_L(a,b)$, то $|[f(a), f(b)]_R| < \infty$,*

2) *если $x \in |R|$ и $x \notin \mathrm{rang}(f)$, то $|[x]_R| = \infty$ и существуют такие $a, b \in |L|$, что $S_L(a,b)$ и $f(a) <_R x <_R f(b)$.*

Тогда $L \cong_g R$, причем изоморфизм g X-вычислим, если X-вычислимы оба порядка L и R, функция f, а также все предикаты S_T, F_T, P^-_T, P^+_T, EP^-_T и EP^+_T для $T \in \{L, R\}$, где

$$\begin{aligned}
P^-_T(x) &\Leftrightarrow (\forall y)(y <_T x \to (\exists z)(y <_T z <_T x)),\\
P^+_T(x) &\Leftrightarrow (\forall y)(x <_T y \to (\exists z)(x <_T z <_T y)),\\
EP^-_T(x) &\Leftrightarrow (\exists y)(y \le_T x \,\&\, P^-_T(y) \,\&\, F_T(y,x)),\\
EP^+_T(x) &\Leftrightarrow (\exists y)(x \le_T y \,\&\, P^+_T(y) \,\&\, F_T(x,y)).
\end{aligned}$$

Доказательство. Покажем сначала, что фактор-порядки L/F_L и R/F_R изоморфны. Пусть a_i — наименьшее натуральное число $a \in |L|$ такое, что $\neg F_L(a,t)$ для любого $t \in \{a_j \mid j < i\}$ (если $i = 0$, то это множество пусто и a_0 — просто наименьшее число из $|L|$). Пусть теперь $b_i = f(a_i)$, $A = \{a_i \mid i \in \omega\}$ и $B = \{b_i \mid i \in \omega\}$. Из условий 1 и 2 непосредственно следует, что $(A, <_L)$ и $(B, <_R)$ суть некоторые X-вычислимые представления для фактор-порядков L/F_L и R/F_R и $(A, <_L) \cong_f (B, <_L)$.

Построим другие X-вычислимые представления фактор-порядков L/F_L и R/F_R. Предположим, что выполнено $EP^-_L(a_i)$. Тогда выберем $a'_i \in |L|$, удовлетворяющий условиям $F_L(a'_i, a_i)$ и $P^-_L(a'_i)$. Если $\neg EP^-_L(a_i)$, но $EP^+_L(a_i)$, то выберем a'_i, для которого выполнено $F_L(a'_i, a_i)$ и $P^+_L(a'_i)$. Если же $\neg EP^-_L(a_i)$ и $\neg EP^+_L(a_i)$, то положим $a'_i = a_i$. Определим теперь $A_0 = \{a'_i \mid i \in \omega\}$. Полностью аналогичными построениями определим $B_0 = \{b'_i \mid i \in \omega\}$. Понятно, что $(A_0, <_L)$ и $(B_0, <_L)$ являются X-вычислимыми представлениями порядков L/F_L и R/F_R. Также ясно, что существует X-вычислимый изоморфизм $\widetilde{g} : (A_0, <_L) \to (B_0, <_L)$.

Построим X-вычислимый изоморфизм порядков L и R. Зафиксируем $x \in |L|$. Найдем такой a'_i, что $F_L(x, a'_i)$. Выберем $y \in |R|$ так, что $|[x, a'_i]_L| = |[y, b'_i]_R|$ и $x <_L a'_i \Leftrightarrow y <_R b'_i$. Положим $g(x) = y$. Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что g является искомым изоморфизмом. $\square$

Теорема 2. *Для любого натурального числа k, для каждого Δ^0_2-k-квазидискретного линейного порядка L, отношение соседства которого также Δ^0_2, существуют вычислимый линейный порядок R и Δ^0_2-функция вложения $f : L \to R$, для которых верны условия* 1 *и* 2 *теоремы* 1.

Прежде чем перейти к доказательству этой теоремы, покажем, как из нее следуют все основные результаты работы.

Следствие 1. *Для каждого $k \in \mathbb{N}$ любой низкий k-квазидискретный порядок Δ^0_4-изоморфен некоторому вычислимому порядку.*

Доказательство. Отношение соседства любого низкого или вычислимого линейного порядка является Δ^0_2. Следовательно, все отношения S, F, P^-, P^+, EP^-, EP^+ на этих порядках вычислимы относительно Δ^0_4. Теперь справедливость следствия непосредственно вытекает из теорем 2 и 1.

Следствие 2. *Для каждого $k \in \mathbb{N}$ любой низкий k-дискретный порядок Δ^0_3-изоморфен некоторому вычислимому порядку.*

Доказательство. Отношение соседства любого низкого или вычислимого линейного порядка является Δ^0_2. Следовательно, все отношения S, F, P^-, P^+ на этих порядках вычислимы относительно Δ^0_3. Так как L является k-дискретным, отношения EP^- и EP^+ также являются Δ^0_3-вычислимыми. Действительно, для фиксированного c_i равномерно эффективно относительно оракула Δ^0_3 можно либо найти такой c_{i+1}, что $S(c_i, c_{i+1})$, либо определить истинность $P^+(c_i)$. Следовательно, для фиксированного x можно построить Δ^0_3-вычислимую последовательность (конечную или бесконечную) $c_0, c_1, \ldots,$ где $c_0 = x$ и $S(c_i, c_{i+1})$. Если эта последовательность содержит более чем k элементов, то из k-дискретности данного порядка следует $EP^+(x)$. В противном случае имеем $\neg EP^+(x)$. Аналогично для EP^-.

Теперь справедливость следствия непосредственно вытекает из теорем 2 и 1.

Следствие 3. *Каждый низкий строго η-схожий линейный порядок Δ^0_2-изоморфен некоторому вычислимому порядку.*

Доказательство. Отношение соседства любого низкого вычислимого линейного порядка является Δ^0_2. Так как строго η-схожие линейные порядки не содержат бесконечных блоков, функция, построенная в теореме 2, является Δ^0_2-изоморфизмом между L и вычислимым порядком R.

Доказательство теоремы 2. Зафиксируем натуральное число k и k-квазидискретный линейный порядок $(\mathbb{N}, <_L)$ такой, что отношения $<_L$ и S_L являются Δ^0_2-вычислимыми. Тогда существуют вычислимые аппроксимации L_s и S_s такие, что $(\mathbb{N}, <_L, S_L) = \lim\limits_{s\to+\infty} (\mathbb{N}, <_{L_s}, S_s)$. Для построения требуемых линейного порядка R и вложения $f : L \to R$ построим вычислимые последовательности $A_{m,s}$, $f_{m,s}$ и R_s такие, что $R = \lim\limits_{s\to+\infty} R_s$, $(\mathbb{N}, <_L) = \bigcup\limits_{m\in\mathbb{N}} \lim\limits_{s\to+\infty} (A_{m,s}, <_{L_s})$

и $f = \bigcup\limits_{m\in\mathbb{N}} \lim\limits_{s\to+\infty} f_{m,s}$. Также на каждом шаге определяется функция $n(s)$ такая, что последовательности $A_{m,s}$ и $f_{m,s}$ определены только для $m \le n(s)$.

Конструкция порядка R.

Шаг $s = 0$. Положим $A_{0,0} = \{0\}$, $n(0) = 0$, $R_0 = \{0\}$ и $f_{0,0}(0) = 0$. (На самом деле верно $A_{0,s} = \{0\}$ для любого шага s.)

Шаг $s+1$. Предположим, что на шаге s для любого $m \le n(s)$ построены множество $A_{m,s}$, порядки $(A_{m,s}, <_{L_s})$ и R_s и вложение $f_{m,s} : (A_{m,s}, <_{L_s}) \to R_s$ такие, что

a) $m \in A_{m,s}$;

b) не существует такой $d \in R_s$, что $f_{m,s}(a_i) <_{R_s} d <_{R_s} f_{m,s}(a_{i+1})$ для $1 \le i < w$, если $a_1, \dots, a_w \in A_{m,s}$ такие, что

b1) $a_1 <_{L_s} \dots <_{L_s} a_w$;

b2) $S_s(a_i, a_{i+1})$ для $1 \le i < w$;

b3) не существуют такие $b_1, b_2 \in A_{m,s}$, что $b_1 <_{L_s} a_1$ и $\neg S_s(b_1, a_1)$, $a_w <_{L_s} b_2$ и $\neg S_s(a_w, b_2)$, соответственно;

b4) $w \le k$.

Выберем наибольшее такое $p \le n(s)$, что

1) конечная структура $(A'_{p,s}, <_{L_s})$ является линейным порядком;

2) отношение S_s «согласовано» с отношением порядка L_s на $A'_{p,s}$, т. е. из $S_s(x,y)$ для $x, y \in A'_{p,s}$ следует $\neg(x <_{L_s} t <_{L_s} y)$ для всех $t \in A'_{p,s}$;

3) $(A'_{p,s}, <_{L_s}, S_s) = (A'_{p,s}, <_{L_{s+1}}, S_{s+1})$.

4) не существуют такие j и $c_1, \dots, c_m \le s+1$, что

4a) конечная структура $(A''_{p,s}, <_{L_s})$ является линейным порядком;

4b) отношение S_{s+1} «согласовано» с отношением порядка L_{s+1} на $A''_{p,s}$;

4c) $(A''_{p,s}, <_{L_s}, S_s) \ne (A''_{p,s}, <_{L_{s+1}}, S_{s+1})$;

4d) $c_0 <_{L_{s+1}} \dots <_{L_{s+1}} c_{m+1}$;

4e) $S_{s+1}(c_i, c_{i+1})$ для $1 \le i < m$;

4f) либо $c_0 = a^j_{t_j}$, $c_{m+1} = p+1$ и $t_j + m + 1 \le k$, либо $c_0 = p+1$, $c_{m+1} = a^{j+1}_1$ и $1 + m + t_{j+1} \le k$.

Здесь

$$A'_{p,s} = A_{p,s} \cup \{p+1\}; \quad A''_{p,s} = A'_{p,s} \cup \{b \mid b \le \max_{1\le i\le m}(c_i)\}$$

(операция max означает функцию взятия максимума относительно естественного порядка на множестве натуральных чисел);

$$(A_{p,s+1}, <_{L_s}) = T_1 + \dots + T_{r_p}; \quad T_i = \left\{a^i_1 <_{L_{s+1}} \dots <_{L_{s+1}} a^i_{t_i}\right\};$$

$$S_{s+1}\left(a^i_l, a^i_{l+1}\right) \text{ для } 1 \le i \le r_p \text{ и } 1 \le l < t_i;$$

$$\neg S_{s+1}\left(a^i_{t_i}, a^{i+1}_1\right) \text{ для } 1 \le i < r_p.$$

Положим $n(s+1) = p+1$, $A_{m,s+1} = A_{m,s}$ и $f_{m,s+1} = f_{m,s}$ для всех $m \le p$. Если $n(s+1) \in A_{p,s+1}$, то положим $R_{s+1} = R_s$, $A_{n(s+1),s+1} = A_{p,s+1}$ и $f_{n(s+1),s+1} = f_{p,s+1}$ и завершаем работу шага $s+1$.

Пусть $n(s+1) \notin A_{p,s+1}$ и $a^j_{t_j} <_{L_{s+1}} n(s+1) <_{L_{s+1}} a^{j+1}_1$ для некоторого j такого, что $0 \le j < r_p + 1$ (такой j существует в силу выбора p), где для простоты $t_0 = 0$, $a^0_0 = -\infty$, $a^{r_p+1}_1 = +\infty$, $\neg S_{s+1}(-\infty, d)$ и $\neg S_{s+1}(d, +\infty)$ для всех d.

Рассмотрим два возможных события.

Событие 1. Пусть существуют такие $c^1_0, \dots, c^1_{m_1+1} \le s+1$, что

(a*) $(A''_{p,s}, <_{L_s})$ является линейным порядком;

(b*) отношение S_{s+1} «согласовано» с L_{s+1} на $A''_{p,s}$;

(c*) $c^1_0 <_{L_{s+1}} \dots <_{L_{s+1}} c^1_{m_1+1}$;

(d*) $S_{s+1}\bigl(c^1_i, c^1_{i+1}\bigr)$ для $0 \le i \le m_1$;

(e*) $c^1_0 = a^j_{t_j}$ и $c^1_{m_1+1} = n(s+1)$.

Где $A''_{p,s} = A_{p,s} \cup \bigl\{b \mid b \le \max\limits_{1\le i\le m}(c^1_i)\bigr\}$.

Событие 2. Пусть существуют такие $c^2_0, \dots, c^2_{m_2+1} \le s+1$, что выполнены условия, аналогичные условиям (a*)–(d*), и условие (e**) вместо (e*):

(e**) $c^2_0 = n(s+1)$ и $c^2_{m_2+1} = a^{j+1}_1$.

Случай 1. Предположим, что либо выполнены оба эти события (тогда в силу выбора p имеем $t_j + m_1 + 1 + m_2 + t_{j+1} > k$), либо выполнено событие 1 и $t_j + m_1 + 1 > k$, либо выполнено событие 2 и $1 + m_2 + t_{j+1} > k$, либо не выполнено ни одного из приведенных выше событий.

Если множество $\bigl\{d \in |R_s| \mid f_{p,s+1}\bigl(a^j_{t_j}\bigr) <_{R_s} d <_{R_s} f_{p,s+1}\bigl(a^{j+1}_1\bigr)\bigr\}$ непусто, то выберем наименьшее натуральное число $d' \in |R_{s+1}|$ такое, что $f_{p,s+1}\bigl(a^j_{t_j}\bigr) <_{R_{s+1}} d' <_{R_{s+1}} f_{p,s+1}\bigl(a^{j+1}_1\bigr)$, и определим $R_{s+1} = R_s$. В противном случае выберем наименьшее натуральное число $d' \notin |R_s|$ и определим $|R_{s+1}| = |R_s| \cup \{d'\}$ и $f_{p,s+1}\bigl(a^j_{t_j}\bigr) <_{R_{s+1}} d' <_{R_{s+1}} f_{p,s+1}\bigl(a^{j+1}_1\bigr)$. В обоих случаях положим $A_{n(s+1),s+1} = A_{p,s+1} \cup \{n(s+1)\}$, $f_{n(s+1),s+1}(x) = f_{p,s+1}(x)$ для всех $x \in \mathrm{dom}(f_{p,s+1})$ и $f_{n(s+1),s+1}(n(s+1)) = d'$.

Случай 2. Пусть выполнено событие 1 и $t_j + m_1 + 1 \le k$. Тогда выберем наименьший набор $\langle d_1, \dots, d_{m_1+1}\rangle$ различных натуральных чисел таких, что $d_1, \dots, d_{m_1+1} \notin |R_s|$. Положим $|R_{s+1}| = |R_s| \cup \{d_1, \dots, d_{m_1+1}\}$ и определим $f_{p,s+1}\bigl(a^j_{t_j}\bigr) <_{R_{s+1}} d_1 <_{R_{s+1}} \dots <_{R_{s+1}} d_{m_1+1}$ и $d_{m_1+1} <_{R_{s+1}} d$ для всех $d >_{R_{s+1}} f_{p,s+1}\bigl(a^j_{t_j}\bigr)$. Теперь положим $A_{n(s+1),s+1} = A_{p,s+1} \cup \bigl\{c^1_1, \dots, c^1_{m_1+1}\bigr\}$, $f_{n(s+1),s+1}\bigl(c^1_i\bigr) = d_i$ для $1 \le i \le m_1 + 1$ и $f_{n(s+1),s+1}(x) = f_{p,s+1}(x)$ для всех $x \in \mathrm{dom}(f_{p,s+1})$.

Случай 3. Если выполнено событие 2 и $1 + m_2 + t_{j+1} \le k$, то определяем R_{s+1} и f_{s+1} аналогично случаю 2.

Описание конструкции завершено.

Следующие леммы завершают доказательство теоремы.

Лемма 1. *Для любого $p \in \mathbb{N}$ существует предел* $\lim\limits_{s\to+\infty} A_{p,s}$.

Доказательство. Ясно, что $A_{0,s} = \{0\}$ для любого $s \in \mathbb{N}$ и выполнены условия (1)–(4) для $A_{0,s}$ при всех s.

Пусть для любого $p' \le p$ существует такой шаг s', что выполнены условия (1)–(4) для $A'_{p',s}$ при всех $s > s'$, где $A'_{p',s} = A_{p',s} \cup \{p'+1\}$ для любого p'. Тогда существует такой шаг s_0, что для любых $p' \le p$ и $s > s'$ выполнены условия (1)–(4) для $A'_{p',s}$.

Выберем шаг $s_1 > s_0$ такой, что $(A'_{p,s}, <_{L_s}, S_s) = (A'_{p,s}, <_{L_{s_1}}, S_{s_1})$ для всех $s > s_1$. Заметим, что из этого непосредственно следует, что структура $(A'_{p,s}, <_{L_s})$ является линейным порядком и отношение S_s «согласовано» с отношением порядка L_s на $A'_{p,s}$ для всех $s > s_1$.

1. Предположим, что существуют такие j и $c_1, \dots, c_m$, что $c_0 <_L \dots <_L c_{m+1}$, $S(c_i, c_{i+1})$ для $1 \leq i < m$; либо $c_0 = a^j_{t_j}$, $c_{m+1} = p+1$ и $t_j + m + 1 \leq k$, либо $c_0 = p+1$, $c_{m+1} = a_1^{j+1}$ и $1+m+t_{j+1} \leq k$. Здесь $(A_{p,s_1}, <_{L_s}) = T_1 + \dots + T_{r_p}$; $T_i = \{a_1^i <_{L_{s_1}} \dots <_{L_{s_1}} a^i_{t_i}\}$; $S_{s_1}(a^i_l, a^i_{l+1})$ для $1 \leq i \leq r_p$ и $1 \leq l < t_i$; $\neg S_{s_1}(a^i_{t_i}, a_1^{i+1})$ для $1 \leq i < r_p$.

Выберем в этом случае такой шаг $s_2 > s_1$, что для всех $s > s_2$ выполнено $(A''_{p,s}, <_{L_s}, S_s) = (A''_{p,s_2}, <_{L_{s_2}}, S_{s_2})$, где $A''_{p,s'} = A_{p,s'} \cup \{b \mid b \leq \max\limits_{1 \leq i \leq m}(c_i^1)\}$ для всех s'. Ясно теперь, что выполнены все условия (1)–(4) для $A'_{p,s}$ при $s > s_2$ и, следовательно, имеем $A_{p,s} = A_{p,s_2}$ для всех $s > s_2$.

2. Предположим, что не выполнено предыдущее условие. Это означает, что существуют такие j и $c_1, \dots, c_m$, что $c_0 <_L \dots <_L c_{m+1}$; либо $c_0 = a^j_{t_j}$, $c_{m+1} = p+1$ и $1+t_j+m = k+1$, либо $c_0 = p+1$, $c_{m+1} = a_1^{j+1}$ и $1+m+t_{j+1} = k+1$.

Выберем в этом случае такой шаг $s_2 > s_1$, что для всех $s > s_2$ выполнено $(A''_{p,s}, <_{L_s}, S_s) = (A''_{p,s_2}, <_{L_{s_2}}, S_{s_2})$, где $A''_{p,s'} = A_{p,s'} \cup \{b \mid b \leq \max\limits_{1 \leq i \leq m}(c_i^1)\}$ для всех s'. Нетрудно видеть, что выполнены все условия (1)–(4) для $A'_{p,s}$ при $s > s_2$ и, следовательно, имеем $A_{p,s} = A_{p,s_2}$ для всех $s > s_2$. $\square$

Лемма 2. $\lim\limits_{s \to +\infty} n(s) = +\infty$.

Доказательство. В предыдущей лемме на самом деле доказано, что для любого p существует такой шаг s_p, что все условия (1)–(4) выполнены для $A'_{p,s}$ при $s > s_p$. Следовательно, для каждого s_0 существует такой шаг s_1, что условия (1)–(4) выполнены для $A'_{p,s}$ при $p \leq n(s_0) + 1$ и $s > s_1$. Согласно конструкции имеем $n(s) \geq n(s_0) + 1$ для всех $s > s_1$ и тем самым $\lim\limits_{s \to +\infty} n(s) = +\infty$. $\square$

Лемма 3. *Существует вычислимый линейный порядок $R = (\mathbb{N}, <_R)$ такой, что $R = \lim\limits_{s \to +\infty} R_s$.*

Доказательство. Ясно, что последовательность конечных линейных порядков $R_0 \subseteq R_1 \subseteq \dots$ равномерно вычислима. Следовательно, существует предел $R = \lim\limits_{s \to +\infty} R_s$. Более того, R является линейным порядком. В силу предыдущей леммы и того, что каждый раз при добавлении нового элемента в R выбирается наименьшее возможное натуральное число, имеем $|R| = \mathbb{N}$ и, стало быть, R является вычислимым порядком. $\square$

Лемма 4. *Для любого $x \in \mathbb{N}$ существует предел $f_p(x) = \lim\limits_{s \to +\infty} f_{p,s}(x)$. При этом $f = \bigcup\limits_{p \to +\infty} f_p$ является вложением порядка L в порядок R.*

Доказательство. Нетрудно видеть, что $f_{p,s} \neq f_{p,s+1}$ тогда и только тогда, когда $A_{p,s} \neq A_{p,s+1}$. Из леммы 1 непосредственно следует существование предела $f_p(x) = \lim\limits_{s \to +\infty} f_{p,s}(x)$.

Имеем $f_{p,s} \subseteq f_{p+1,s}$ для всех $p \leq n(s)$. Тогда $f_p \subseteq f_{p+1}$ и, значит, существует $f = \bigcup\limits_{p \to +\infty} f_p$.

Так как $f_{p,s}$ является вложением порядка $(A_{p,s}, <_{L_s})$ в порядок R_s, из лемм 1 и 3 и существования предела $f_p(x) = \lim\limits_{s \to +\infty} f_{p,s}(x)$ вытекает, что f является вложением порядка L в R. $\square$

Лемма 5. *Выполнено условие* 1 *теоремы* 1. *А именно, для любых a и b из $S_L(a,b)$ следует, что $[f(a), f(b)]_R$ конечно.*

Доказательство. Выберем шаг s_0 и индекс p такие, что $a, b \in A_{p,s_0}$; $f_{p,s}(x) = f_{p,s_0}(x)$ для всех $s > s_0$ и $x \in A_{p,s_0}$; $(A_{p,s}, <_{L_s}, S_s) = (A_{p,s_0}, <_{L_{s_0}}, S_{s_0})$ для всех $s > s_0$. Тогда согласно конструкции не добавляются новые элементы в R_s между элементами $f_{p,s_0}(a)$ и $f_{p,s_0}(b)$ на шагах $s > s_0$, тем самым $[f(a), f(b)]_R$ конечно. $\square$

Лемма 6. *Выполнено условие* 2 *теоремы* 1. *А именно, для любого $x \in |R|$ из $x \notin \operatorname{rang}(f)$ следуют, во-первых, бесконечность класса $[x]_R$ и, во-вторых, существование элементов a и b таких, что $S_L(a,b)$ и $f(a) <_R x <_R f(b)$.*

Доказательство. Выберем шаг s_0 так, что $(A_{x,s}, <_{L_s}, S_s) = (A_{x,s_0}, <_{L_{s_0}}, S_{s_0})$ и $f_{x,s}(y) = f_{x,s_0}(y)$ для всех $s > s_0$ и $y \in A_{x,s_0}$.

Если $x \in \operatorname{rang}(f_{x,s_0})$, то, очевидно, $x \in \operatorname{rang}(f)$. Пусть $x \notin \operatorname{rang}(f_{x,s_0})$. Тогда согласно конструкции существуют такие $a, b \in A_{x,s_0}$, что $f_{x,s_0}(a) <_R x <_R f_{x,s_0}(b)$ и $S_{s_0}(a,b)$ и, следовательно, $S_L(a,b)$ и $f(a) <_R x <_R f(b)$. При этом $x \notin \operatorname{rang}(f_{x,s_0})$, только если $\left|\left[f^{-1}_{x,s_0}(x)\right]_L\right| > k$. Так как L k-квазидискретен, $[f^{-1}(x)]_L$ бесконечно. Из предыдущей леммы вытекает, что $[x]_R$ также бесконечно. $\square$

3. Оценки изоморфизмов

В этом разделе используется эффективная нумерация всех одноместных A-вычислимых функций $\{\varphi^A_e\}_{e\in\mathbb{N}}$. Пишем $\varphi^A_{e,s}(x) = y$, если y является значением функции $\varphi^A_e(x)$, полученным за s шагов. Если такой y существует, то будем говорить, что $\varphi^A_{e,s}(x)$ *определена*, и писать $\varphi^A_{e,s}(x)\downarrow$, в противном случае $\varphi^A_{e,s}(x)$ не определена и $\varphi^A_{e,s}(x)\uparrow$. Для вычислимых функций, т. е. для $\varnothing$-вычислимых функций, пишем φ_e вместо $\varphi^{\varnothing}_e$. Каждая одноместная A-вычислимая функция $\varphi^A_e(x)$ может быть рассмотрена и как двуместная: $\varphi^A_e(\langle x, y\rangle)$. Например, «$\varphi_e$ является вычислимым линейным порядком» означает, что функция φ_e всюду определена и отношение $x <_{\varphi_e} y \Leftrightarrow \varphi_e(\langle x, y\rangle) = 1$ является отношением линейного порядка.

Все линейные порядки, конструируемые в теоремах данного раздела, строятся по шагам методом конечных расширений с привлечением $\mathbf{0}'$-оракульного построения, где $\mathbf{0}'$ — наибольшая Δ^0_2-степень. Другими словами, определяется $\mathbf{0}'$-вычислимая последовательность конечных линейных порядков $\sigma_0 \subseteq \sigma_1 \subseteq \dots$ такая, что $L = \bigcup\limits_{s\in\mathbb{N}} \sigma_s$ является искомым $\mathbf{0}'$-вычислимым порядком.

Теорема 3. *Существует низкий сильно η-схожий линейный порядок, который не может быть вычислимо изоморфным никакому вычислимому порядку.*

Доказательство. Зафиксируем оракул $\mathbf{0}'$. Построим искомый линейный порядок L порядкового типа $\eta + 2 + \eta + 2 + \dots$. В процессе построения на пару элементов $x <_L y$ накладывается «запрет» на добавление элементов между ними. Для этого определяется отношение S_L, которое на самом деле будет определять отношение соседства на порядке L.

Шаг $s = 0$. Положим $\sigma_0 = \varnothing$.

Шаг $s+1$. Предположим, что на шаге s уже построен конечный линейный порядок σ_s такой, что на некоторых его элементах определено отношение S_L. Назовем порядок $\sigma \supseteq \sigma_s$ *корректным* расширением, если $S_L(x,y)$ для $x, y \in |\sigma_s|$ влечет $\neg(x <_\sigma t <_\sigma y)$ для всех $t \in |\sigma|$.

1. Построим «промежуточное» расширение $\sigma'_{s+1} \supseteq \sigma_s$. Для этого рассмотрим следующее условие, которое, очевидно, является $\mathbf{0}'$-вычислимым:

$$\Gamma(\sigma_s) = (\exists \sigma \supseteq \sigma_s)(\exists s')(\sigma \text{ — \textit{корректное} расширение } \sigma_s \,\&\, \varphi^{\sigma}_{s,s'}(s)\downarrow).$$

Если оно выполнено, то положим $\sigma'_{s+1} = \sigma$, где σ — порядок, удовлетворяющий этому условию. В противном случае положим $\sigma'_{s+1} = \sigma_s$.

2. Нетрудно построить расширение $\sigma''_{s+1} \supseteq \sigma'_{s+1}$ такое, что для любых соседних в σ'_{s+1} элементов $x <_L y$ таких, что $\neg S_L(x,y)$, существует новый элемент $t \in \sigma''_{s+1}$ такой, что $x <_L t <_L y$. В процессе построения добавляются новые элементы, каждый из которых выбирается как наименьшее натуральное еще не добавленное число (что обеспечивает условие $|L| = \mathbb{N}$).

3. Зафиксируем два новых элемента $x_0, y_0 \notin \sigma''_{s+1}$ и определим $\sigma_{s+1} \supseteq \sigma''_{s+1}$ так, чтобы $t <_L x_0 <_L y_0$ для любого $t \in \sigma''_{s+1}$. Предположим, что $s = \langle e_1, e_2\rangle$, и рассмотрим следующие две формулы, которые являются $\mathbf{0}'$-вычислимыми:

$$\Psi = (\exists s')(\varphi_{e_1,s'}(x_0)\downarrow \,\&\, \varphi_{e_1,s'}(y_0)\downarrow),$$

$$\Phi(a,b) = (\exists s')(\exists t)(\varphi_{e_2,s'}(\langle a,t\rangle)\downarrow = 1 \,\&\, \varphi_{e_2,s'}(\langle t,b\rangle)\downarrow = 1).$$

Предположим, что формулы Ψ и $\Phi(a_0,b_0)$ выполнены, где $a_0 = \varphi_{e_1}(x_0)$ и $b_0 = \varphi_{e_1}(y_0)$. Тогда положим $S_L(x_0,y_0)$. В противном случае ничего не делаем. Завершаем шаг $s+1$.

Описание конструкции завершено.

Ясно, что последовательность $\sigma_0 \subseteq \sigma_1 \subseteq \dots$ является $\mathbf{0}'$-вычислимой и, следовательно, линейный порядок $L = \lim\limits_{s\to+\infty} \sigma_s$ является также $\mathbf{0}'$-вычислимым. Из построения σ''_{s+1} видно, что $L \cong \eta + 2 + \eta + 2 + \dots$, стало быть, L сильно η-схожий.

Для доказательства того, что построенный порядок L имеет низкую степень, достаточно показать, что условие $\varphi^L_x(x)\downarrow$ является $\mathbf{0}'$-вычислимым. Для этого проверяем истинность формулы $\Gamma(\sigma_x)$. Если эта формула истинна, то $\varphi^L_x(x)\downarrow$, в противном случае $\varphi^L_x(x)\uparrow$.

Предположим, что L является вычислимо изоморфным некоторому вычислимому порядку. Пусть всюду определенные функции φ_{e_2} — вычислимый линейный порядок на $\mathbb{N}$ и φ_{e_1} — вычислимый изоморфизм такие, что $L \cong_{\varphi_{e_1}} (\mathbb{N}, <_{\varphi_{e_2}})$. Тогда существуют $x_0, y_0 \in \sigma_{\langle e_1,e_2\rangle+1}$ такие, что x_0 и y_0 являются соседними элементами в L тогда и только тогда, когда $\varphi_{e_1}(x_0)$ и $\varphi_{e_1}(y_0)$ не являются соседними элементами в порядке $(\mathbb{N}, <_{\varphi_{e_2}})$; противоречие. $\square$

Ясно, что если линейный порядок L имеет низкую степень, то отношение соседства S_L является $\mathbf{0}'$-вычислимым. Более того, структура $(|L|, <_L, S_L)$ является $\mathbf{0}'$-вычислимой. На самом деле верно и обратное, что доказывается в следующей теореме. При этом данная теорема имеет техническое применение — она будет использоваться в теоремах 5 и 6 для построения выше описанных контрпримеров.

Теорема 4. *Пусть линейный порядок L является $\mathbf{0}'$-вычислимым и отношение соседства на нем S_L также является $\mathbf{0}'$-вычислимым. Тогда существуют низкий линейный порядок R и $\mathbf{0}'$-вычислимый изоморфизм f такие, что $L \cong_f R$.*[1)]

[1)]После того, как данная работа была направлена в печать, автору стало известно, что вышеприведенная теорема была независимо получена Монталбаном (A. Montalban. Notes on the jump of a structure // Math. Theory Comput. Practice. 2009. P. 372–378).

Доказательство. Пусть $\deg(L) \leq \mathbf{0}'$ и $\deg(S_L) \leq \mathbf{0}'$. Построим низкий линейный порядок R так же, как и в доказательстве предыдущей теоремы, в процессе его построения накладывается «запрет» на пару элементов $x <_R y$ на добавление новых элементов между ними. Для этого строится бинарное отношение S_R, на самом деле являющееся отношением соседства. Порядок R, как и раньше, строится по шагам методом конечных расширений, для чего на каждом шаге определяется конечный линейный порядок σ_s. Одновременно с построением σ_s строится вложение $f_s : \sigma_s \to L$ так, что $f_s \subseteq f_{s+1}$ и $f : R \to L$ является изоморфизмом, где $f = \bigcup\limits_{s\to+\infty} f_s$.

Шаг $s = 0$. Положим $\sigma_0 = \varnothing$ и $f_s = \varnothing$.

Шаг $s+1$. Предположим, что на шаге s уже построены конечный линейный порядок σ_s такой, что на некоторых его элементах определены отношение S_R и вложение $f_s : \sigma_s \to L$. Назовем порядок $\sigma \supseteq \sigma_s$ *корректным* расширением σ_s, если $S_R(x, y)$ для $x, y \in |\sigma_s|$ влечет $\neg(x <_\sigma t <_\sigma y)$ для всех $t \in |\sigma|$.

1. Построим «промежуточные» расширения $\sigma'_{s+1} \supseteq \sigma_s$ и $f'_{s+1} \supseteq f_s$. Если $s \in \operatorname{rang}(f_s)$, то положим $\sigma'_{s+1} = \sigma_s$ и $f'_{s+1} = f_s$. Пусть $s \notin \operatorname{rang}(f_s)$. Тогда найдем такие $x, y \in |\sigma_s|$, что $f_s(x) <_L s <_L f_s(y)$ и $\neg(f_s(x) <_L z <_L f_s(y))$ для любого $z \in \operatorname{rang}(f_s)$. Определим $\sigma'_{s+1} \supseteq \sigma_s$, выбрав новый элемент t так, чтобы $x <_R t <_R y$, и положим $f'_{s+1}(t) = s$ и $f'_{s+1}(p) = f_s(p)$ для всех $p \in \operatorname{dom}(f_s)$.

2. Построим «вспомогательные» конечные последовательности конечных линейных порядков $\sigma'_{s+1} \subseteq \tau_1 \subseteq \tau_2 \subseteq \dots$ и $f'_{s+1} \subseteq g_1 \subseteq g_2 \subseteq \dots$ такие, что f_k является вложением τ_k в L. Положим $\tau_0 = \sigma'_{s+1}$ и $g_0 = f'_{s+1}$. Допустим, по индукции, что τ_k и g_k уже построены. Построим $\tau_{k+1} \supseteq \tau_k$ и $g_{k+1} \supseteq g_k$ или определим σ_{s+1} и f_{s+1}. Для этого рассмотрим следующее условие, которое очевидно является $\mathbf{0}'$-вычислимым:

$$\Gamma(\tau_k) = (\exists \tau \supseteq \tau_k)(\exists s')(\tau \text{ — корректное расширение } \tau_k \,\&\, \varphi^{\tau}_{s,s'}(s)\downarrow).$$

Если это условие не выполнено, то положим $\sigma_{s+1} = \tau_k$ и $f_{s+1} = g_k$ и завершаем шаг $s + 1$. Пусть условие $\Gamma(\tau_k)$ выполнено. Тогда найдем $\tau \supseteq \tau_k$, удовлетворяющее этому условию.

Относительно оракула $\mathbf{0}'$ можно определить, существует ли вложение $f \supseteq f_k$ порядка τ в L. Действительно, пусть $\tau_k = \{x_1 <_R \dots <_R x_n\}$, и пусть для простоты $\tau = \{x_1 <_\tau x_2 <_\tau \dots <_\tau x_i <_\tau t_1 <_\tau \dots <_\tau t_m <_\tau x_{i+1} <_\tau x_{i+2} <_\tau x_n\}$. С помощью оракула $\mathbf{0}'$ можно определить, что либо существуют $z_1, \dots, z_m$ такие, что $g_k(x_i) <_L z_1 <_L \dots <_L z_m <_L g_k(x_{i+1})$, либо существуют $z_1, \dots, z_q$ такие, что $q < m$, $g_k(x_i) <_L z_1 <_L \dots <_L z_q <_L g_k(x_{i+1})$ и $S_L(z_j, z_{j+1})$ для $0 \leq j \leq q$, где $z_0 = g_k(x_i)$ и $z_{q+1} = g_k(x_{i+1})$.

В первом случае положим $\sigma_{s+1} = \tau$, $f_{s+1}(t_j) = z_j$ для $1 \leq j \leq m$ и $f_{s+1}(x_p) = f_k(x_p)$ для $1 \leq p \leq n$ и завершаем шаг $s + 1$. Во втором случае построим расширение $\tau_{k+1} \supseteq \tau_k$, добавив новые элементы $t'_1, \dots, t'_q$ так, что $x_i <_R t'_1 <_R \dots t'_q <_R x_{i+1}$. Определим «запрет» $S_R(t'_j, t'_{j+1})$ для $0 \leq j \leq q$, где $t'_0 = x_i$ и $t'_{q+1} = x_{i+1}$. Положим $f_{k+1}(t'_j) = z_j$ для $1 \leq j \leq q$ и $f_{k+1}(x_p) = f_k(x_p)$ для $1 \leq p \leq n$ и переходим к построению σ_{k+2} и f_{k+2}.

Назовем множество

$$I_x = \{y \mid (\exists n)(\exists t_1)\dots(\exists t_n)(\forall t)(S'_R(x, t_1) \,\&\, S'_R(t_1, t_2) \\ \& \dots \& \, S'_R(t_{n-1}, t_n) \,\&\, S'_R(t_n, y))\}$$

классом связанности, где $S'_R(x,y) = S_R(x,y) \vee S_R(y,x)$. Понятно, что количество различных классов связанности порядка τ_{k+1} строго меньше, чем количество различных классов связанности порядка τ_k. Поэтому приведенная выше процедура рано или поздно остановится, σ_{s+1} и f_{s+1} определятся и шаг $s+1$ завершится.

Описание конструкции завершено.

Ясно, что последовательности $\sigma_0 \subseteq \sigma_1 \subseteq \ldots$ и $f_0 \subseteq f_1 \subseteq \ldots$ являются $\mathbf{0}'$-вычислимыми и, следовательно, линейный порядок $R = \lim\limits_{s\to+\infty} \sigma_s$ и функция $f = \lim\limits_{s\to+\infty} f_s$ также $\mathbf{0}'$-вычислимы. Так же, как и в доказательстве предыдущей теоремы, обосновывается, что R имеет низкую степень. Так как f_s является вложением σ_s в L, то f является вложением R в L. В силу случая 1 имеем $s \in \sigma_{s+1}$ и тем самым $\mathrm{rang}(f) = \mathbb{N}$. Отсюда непосредственно следует, что f является изоморфизмом порядков R и L. $\square$

При проведении оракульных конструкций в теоремах 5 и 6 будет использоваться очевидная

Лемма 7. *Следующая формула* $\mathbf{0}'$*-вычислима* (считаем, что $k > 0$):

$$\Phi_{\mathrm{int}}(x,y;e;k) = (\exists s)(\exists a_1,\ldots,a_k)(\varphi_{e,s}(\langle x,a_1\rangle)\downarrow = 1 \,\&\, \varphi_{e,s}(\langle a_1,a_2\rangle)\downarrow = 1 \,\&\, \ldots \,\&\, \varphi_{e,s}(\langle a_{k-1},a_k\rangle)\downarrow = 1 \,\&\, \varphi_{e,s}(\langle a_k,y\rangle)\downarrow = 1).$$

Теорема 5. *Существует низкий дискретный линейный порядок, который не может быть* Δ^0_2*-изоморфным никакому вычислимому порядку.*

Доказательство. Зафиксируем оракул $\mathbf{0}'$. Искомый линейный порядок L будем строить в виде суммы $L = \sum\limits_{e\in\omega} L_e$, где $L_e \cong \omega^* + \omega$ или $L_e \cong \omega^* + \omega + \omega^* + \omega$. Каждый раз при добавлении нового элемента в процессе построения L_e будем добавлять наименьшие натуральные числа вида $\langle e_1,e_2,i\rangle$, где $e = \langle e_1,e_2\rangle$, которые еще не использовались в конструкции, таким образом, чтобы $|L_e| = \{\langle e_1,e_2,i\rangle \mid i \in \mathbb{N}\}$.

Одновременно с построением порядка L будем определять отношение соседства S_L так, чтобы относительно оракула $\mathbf{0}'$ было вычислимо не только отношение порядка $<_L$, но и отношение S_L. Такое построение достаточно для доказательства теоремы, так как порядок L имеет вычислимое представление посредством Δ^0_2-изоморфизма тогда и только тогда, когда низкое представление L, которое строится в теореме 4, также Δ^0_2-изоморфно некоторому вычислимому порядку.

Пусть $e = \langle e_1,e_2\rangle$. Приведем конструкцию L_e.

Шаг $s = 0$. Положим $\sigma_{e,0} = \{p_0 <_L r_0\}$, где $p_0 = \langle e_1,e_2,0\rangle$, $r_0 = \langle e_1,e_2,1\rangle$ и $e = \langle e_1,e_2\rangle$. Определим $S_L(p_0,r_0)$ тогда и только тогда, когда $\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,0}(p_0)\downarrow$, $\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,0}(r_0)\downarrow$ и $\Phi_{\mathrm{int}}\big(\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,0}(p_0), \varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,0}(r_0); e_2; 1\big)$. Последнее условие означает, что $\big|\big\{x \mid \varphi_{e_2}\big(\langle\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1}(p_0),x\rangle\big) = 1 \,\&\, \varphi_{e_2}\big(\langle x,\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1}(r_0)\rangle\big) = 1\big\}\big| \neq |\{x \mid p_0 <_L x <_L r_0\}|$.

Шаг $s+1$. Предположим, что на шаге s уже построено $\sigma_{e,s}$ такое, что

1) $\sigma_{e,s} = \{p_{-k_1} <_L \cdots <_L p_{-1} <_L p_0 <_L p_1 <_L \cdots <_L p_{k_2} <_L r_{-n_1} <_L \cdots <_L r_{-1} <_L r_0 <_L r_1 <_L \cdots <_L r_{n_2}\}$;

2) $S_L(p_i,p_{i+1})$ для $-k_1 \le i < k_2$;

3) $S_L(r_i,r_{i+1})$ для $-n_1 \le i < n_2$;

4) $S_L(p_{k_2}, r_{-n_1})$ тогда и только тогда, когда $\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,s}(p_0)\downarrow$, $\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,s}(r_0)\downarrow$ и $|\{x \mid p_0 <_L x <_L r_0\}| \neq \big|\{x \mid \varphi_{e_2}\big(\langle\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1}(p_0), x\rangle\big) = 1 \,\&\, \varphi_{e_2}\big(\langle x, \varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1}(r_0)\rangle\big) = 1\}\big|$.

Определим «промежуточное» расширение $\sigma'_{e,s+1}$ порядка $\sigma_{e,s}$, положив

$$\sigma'_{e,s+1} = \{p_{-k_1-1} <_L p_{-k_1} <_L \dots <_L p_{k_2} <_L r_{-n_1} <_L \dots <_L r_{n_2} <_L r_{n_2+1}\},$$

$S_L(p_{-k_1-1}, p_{-k_1})$ и $S_L(r_{n_2}, r_{n_2+1})$.

Случай 1. Если $S_L(p_{k_2}, r_{-n_1})$, то положим $\sigma_{e,s+1} = \sigma'_{e,s+1}$ и завершаем шаг $s+1$.

Случай 2. Пусть $\neg S_L(p_{k_2}, r_{-n_1})$ и либо $\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,s+1}(p_0)\uparrow$, либо $\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,s+1}(r_0)\uparrow$. Положим тогда $\sigma_{e,s+1} = \{p_{-k_1-1} <_L \dots <_L p_{k_2} <_L p_{k_2+1} <_L r_{-n_1-1} <_L r_{-n_1} <_L \dots <_L r_{n_2+1}\}$, $S_L(p_{k_2}, p_{k_2+1})$, $S_L(r_{-n_1-1}, r_{-n_1})$ и $\neg S_L(p_{k_2+1}, r_{-n_1-1})$. Завершаем шаг $s+1$.

Случай 3. Пусть $\neg S_L(p_{k_2}, r_{-n_1})$, $\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,s+1}(p_0)\downarrow$ и $\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,s+1}(r_0)\downarrow$.

Если $\Phi_{\mathrm{int}}\big(\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,s+1}(p_0), \varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,s+1}(r_0); e_2; k_2+n_1+2\big)$, то положим

$$\sigma_{e,s+1} = \{p_{-k_1-1} <_L \dots <_L p_{k_2} <_L p_{k_2+1} <_L r_{-n_1} <_L \dots <_L r_{n_2+1}\},$$

$S_L(p_{k_2}, p_{k_2+1})$ и $S_L(p_{k_2+1}, r_{-n_1})$.

Если $\neg\Phi_{\mathrm{int}}\big(\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,s+1}(p_0), \varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,s+1}(r_0); e_2; k_2+n_1+2\big)$, то положим

$$\sigma_{e,s+1} = \{p_{-k_1-1} <_L \dots <_L p_{k_2} <_L p_{k_2+1} <_L r_{-n_1-1} <_L r_{-n_1} <_L \dots <_L r_{n_2+1}\},$$

$S_L(p_{k_2}, p_{k_2+1})$, $S_L(r_{-n_1-1}, r_{-n_1})$ и $S_L(p_{k_2+1}, r_{-n_1-1})$.

Ясно, что в обоих случаях имеем

$$\big|\{x \mid \varphi_{e_2}\big(\langle\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1}(p_0), x\rangle\big) = 1 \,\&\, \varphi_{e_2}\big(\langle x, \varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1}(r_0)\rangle\big) = 1\}\big| \neq |\{x \mid p_0 <_L x <_L r_0\}|.$$

Завершаем шаг $s+1$.

Конструкция завершена.

Положим $\sigma_s = \sum\limits_{e\in\omega} \sigma_{e,s}$. Так как $\sigma_{e,s} \subseteq \sigma_{e,s+1}$, имеем $\sigma_s \subseteq \sigma_{s+1}$. Ясно, что последовательность $\sigma_0 \subseteq \sigma_1 \subseteq \dots$ является $\mathbf{0}'$-вычислимой и, следовательно, линейный порядок $L = \lim\limits_{s\to+\infty} \sigma_s$ является также $\mathbf{0}'$-вычислимым. Очевидно, что отношение S_L, которое строится в конструкции, является отношением соседства и $\mathbf{0}'$-вычислимо.

Ясно, что $L = \sum\limits_{e\in\omega} L_e$, где $L_e = \bigcup\limits_{s\in\mathbb{N}}$ имеет порядковый тип либо $\omega^* + \omega$, либо $\omega^* + \omega + \omega^* + \omega$. Следовательно, порядок L является дискретным.

Предположим, что L Δ^0_2-изоморфен некоторому вычислимому порядку. Пусть всюду определенные функции φ_{e_2} — вычислимое отношение порядка на $\mathbb{N}$ и $\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1}$ — Δ^0_2-изоморфизм такие, что $L \cong_{\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1}} (\mathbb{N}, <_{\varphi_{e_2}})$. Тогда согласно построениям в случае 3 имеем $|\{x \mid \langle e_1, e_2, 0\rangle <_L x <_L \langle e_1, e_2, 1\rangle\}| \neq \big|\{x \mid \varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1}(\langle e_1, e_2, 0\rangle) <_{\varphi_{e_2}} x <_{\varphi_{e_2}} \varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1}(\langle e_1, e_2, 1\rangle)\}\big|$; противоречие. □

Теорема 6. *Существует низкий* 0*-квазидискретный линейный порядок, который не может быть* Δ^0_3*-изоморфным никакому вычислимому порядку.*

Доказательство. Зафиксируем оракул $\mathbf{0}'$. Искомый линейный порядок L будем строить в виде суммы $L = \sum\limits_{e\in\omega} L_e$, где либо $L_e \cong \omega^* + \omega + \omega^* + \omega$, либо $L_e \cong \omega^* + \omega^* + \omega$, либо $L_e \cong \omega^* + \omega + \omega$.

Каждый раз при добавлении нового элемента в процессе построения L_e будем добавлять наименьшие натуральные числа вида $\langle e_1, e_2, i\rangle$, где $e = \langle e_1, e_2\rangle$, которые еще не использовались в конструкции, таким образом, чтобы $|L_e| = \{\langle e_1, e_2, i\rangle \mid i \in \mathbb{N}\}$.

Так же, как в доказательстве предыдущей теоремы, достаточно построить $\mathbf{0}'$-вычислимый линейный порядок L, удовлетворяющий условиям теоремы (не выполняя условие «низкости»), такой, что отношение S_L является также $\mathbf{0}'$-вычислимым.

Пусть $e = \langle e_1, e_2\rangle$. Приведем конструкцию L_e.

Шаг $s = 0$. Положим $\sigma_{e,0} = \{p_0 <_L r_0\}$ и $\neg S_L(p_0, r_0)$, где $p_0 = \langle e_1, e_2, 0\rangle$, $r_0 = \langle e_1, e_2, 1\rangle$. Скажем, что элемент d_0^e не определен, и положим $t_0^e = 0$.

Шаг $s+1$. Предположим, что на шаге s уже построены $\sigma_{e,s}$, t_s^e и d_s^e такие, что

1) $\sigma_{e,s} = \{p_{-k_1} <_L \cdots <_L p_{-1} <_L p_0 <_L p_1 <_L \cdots <_L p_{k_2} <_L r_{-n_1} <_L \cdots <_L r_{-1} <_L r_0 <_L r_1 <_L \cdots <_L r_{n_2}\}$;

2) $S_L(p_i, p_{i+1})$ для $-k_1 \le i < k_2$;

3) $S_L(r_i, r_{i+1})$ для $-n_1 \le i < n_2$;

4) $\neg S_L(p_{k_2}, r_{-n_1})$;

5) $\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,s}(p_0, t)\downarrow$ для любого $t < t_s^e$;

6) d_s^e не определено тогда и только тогда, когда $t_s^e = 0$ и либо $\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,s}(p_0, 0)\uparrow$, либо $\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,s}(r_0, 0)\uparrow$.

Определим «промежуточное» расширение $\sigma'_{e,s+1}$ порядка $\sigma_{e,s}$, положив

$$\sigma'_{e,s+1} = \{p_{-k_1-1} <_L p_{-k_1} <_L \cdots <_L p_{k_2} <_L r_{-n_1} <_L \cdots <_L r_{n_2} <_L r_{n_2+1}\},$$

$S_L(p_{-k_1-1}, p_{-k_1})$ и $S_L(r_{n_2}, r_{n_2+1})$. Рассмотрим два следующих случая, согласно которым определим t^e_{s+1} и d^e_{s+1}.

Случай 1. Предположим, что либо $\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,s+1}(p_0, t_s^e)\uparrow$ или $\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,s+1}(r_0, t_s^e)\uparrow$, либо $t_s^e > 0$, $\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,s+1}(p_0, t_s^e)\downarrow = \varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,s}(p_0, t_s^e - 1)$ и $\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,s+1}(r_0, t_s^e)\downarrow = \varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,s}(r_0, t_s^e - 1)$.

В первом случае, когда $\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,s+1}(p_0, t_s^e)\uparrow$ или $\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,s+1}(r_0, t_s^e)\uparrow$, положим $t^e_{s+1} = t^e_s$. Во втором, когда $t_s^e > 0$, $\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,s+1}(p_0, t_s^e)\downarrow = \varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,s}(p_0, t_s^e - 1)$ и $\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,s+1}(r_0, t_s^e)\downarrow = \varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,s}(r_0, t_s^e - 1)$, положим $t^e_{s+1} = t^e_s + 1$.

Если d_s^e определено, то положим $d^e_{s+1} = d^e_s$. Если же d^e_s не определено (это означает, что $t_s^e = 0$ и либо $\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,s}(p_0, t_s^e)\uparrow$, либо $\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,s}(r_0, t_s^e)\uparrow$ и тем самым $t^e_{s+1} = 0$ и либо $\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,s+1}(p_0, t^e_{s+1})\uparrow$, либо $\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,s+1}(r_0, t^e_{s+1})\uparrow$), то скажем, что также d^e_{s+1} не определен, положим $\sigma_{e,s+1} = \sigma'_{e,s+1}$ и завершаем шаг $s+1$.

Случай 2. Предположим, что $\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,s+1}(p_0, t_s^e)\downarrow$, $\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,s+1}(r_0, t_s^e)\downarrow$ и либо $t_s^e = 0$, либо $\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,s+1}(p_0, t_s^e) \ne \varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,s}(p_0, t_s^e - 1)$ и $\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,s+1}(r_0, t_s^e) \ne \varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,s}(r_0, t_s^e - 1)$. Положим $t^e_{s+1} = t^e_s + 1$.

Если $\neg\Phi_{\mathrm{int}}\big(\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,s+1}(p_0, t_s^e), \varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,s+1}(r_0, t_s^e); e_2; k_2 + 1 + n_1\big)$, то положим $d^e_{s+1} = \varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,s+1}(r_0, t_s^e)$, $\sigma_{e,s+1} = \{p_{-k_1-1} <_L \cdots <_L p_{k_2} <_L p_{k_2+1} <_L r_{-n_1-1} <_L r_{-n_1} <_L \cdots <_L r_{n_2+1}\}$, $S_L(p_{k_2}, p_{k_2+1})$, $S_L(r_{-n_1-1}, r_{-n_1})$ и $\neg S_L(p_{k_2+1}, r_{-n_1-1})$.

Допустим, что $\Phi_{\mathrm{int}}\big(\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,s+1}(p_0, t_s^e), \varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,s+1}(r_0, t_s^e); e_2; k_2 + 1 + n_1\big)$. Тогда выберем элементы $a_1, \ldots, a_{k_2+1+n_1}$ такие, что

$$\varphi_{e_2}\big(\langle \varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,s+1}(p_0, t_s^e), a_1\rangle\big) = 1, \varphi_{e_2}(\langle a_1, a_2\rangle) = 1,$$
$$\ldots, \varphi_{e_2}(\langle a_{k_2+n_1}, a_{k_2+1+n_1}\rangle) = 1, \varphi_{e_2}\big(\langle a_{k_2+1+n_1}, \varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,s+1}(r_0, t_s^e)\rangle\big) = 1,$$

и положим $d^e_{s+1} = a_{k_2+1}$.

Определим теперь $\sigma_{e,s+1}$ в случае, когда шаг $s+1$ еще не завершен.

Случай 3a. Если $\neg\Phi_{\rm int}\big(\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,s}(p_0, t^e_s - 1), d^e_{s+1}; e_2; k_2+1\big)$, то определим

$$\sigma_{e,s+1} = \{p_{-k_1-1} <_L \dots <_L p_{k_2} <_L r_{-n_1-1} <_L \dots <_L r_{n_2+1}\},$$

$S_L(r_{-n_1-1}, r_{-n_1})$ и $\neg S_L(p_{k_2}, r_{-n_1-1})$.

Предположим, что $\Phi_{\rm int}\big(\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,s}(p_0, t^e_s - 1), d^e_{s+1}; e_2; k_2+1\big)$.

Случай 3b. $\neg\Phi_{\rm int}\big(d^e_{s+1}, \varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,s}(r_0, t^e_s - 1); e_2; n_1+1\big)$. Положим тогда $\sigma_{e,s+1} = \{p_{-k_1-1} <_L \dots <_L p_{k_2} <_L p_{k_2+1} <_L r_{-n_1} <_L \dots <_L r_{n_2+1}\}$, $S_L(p_{k_2}, p_{k_2+1})$ и $\neg S_L(p_{k_2+1}, r_{-n_1})$.

Случай 3c. $\Phi_{\rm int}\big(d^e_{s+1}, \varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,s}(r_0, t^e_s - 1); e_2; n_1+1\big)$. Положим тогда

$$\sigma_{e,s+1} = \{p_{-k_1-1} <_L \dots <_L p_{k_2} <_L p_{k_2+1} <_L r_{-n_1-1} <_L r_{-n_1} <_L \dots <_L r_{n_2+1}\},$$

$S_L(p_{k_2}, p_{k_2+1})$, $S_L(r_{-n_1-1}, r_{-n_1})$ и $\neg S_L(p_{k_2+1}, r_{-n_1-1})$.

Во всех случаях завершаем шаг $s+1$. Тем самым описание конструкции завершено.

Положим $\sigma_s = \sum\limits_{e\in\omega} \sigma_{e,s}$. Так как $\sigma_{e,s} \subseteq \sigma_{e,s+1}$, имеем $\sigma_s \subseteq \sigma_{s+1}$. Ясно, что последовательность $\sigma_0 \subseteq \sigma_1 \subseteq \dots$ является $\mathbf{0}'$-вычислимой и, следовательно, линейный порядок $L = \lim\limits_{s\to+\infty} \sigma_s$ является также $\mathbf{0}'$-вычислимым. Очевидно, что отношение S_L, которое строится в конструкции, является отношением соседства и $\mathbf{0}'$-вычислимо.

Ясно, что $L = \sum\limits_{e\in\omega} L_e$, где $L_e = \bigcup\limits_{s\in\mathbb{N}}$ имеет порядковый тип либо $\omega^* + \omega + \omega^* + \omega$, либо $\omega^* + \omega^* + \omega$, либо $\omega^* + \omega + \omega$. Следовательно, порядок L является 0-квазидискретным.

Предположим, что L Δ^0_3-изоморфен некоторому вычислимому порядку. Тогда существуют всюду определенные функции $\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1}$ и φ_{e_2} такие, что для любого x существует конечный предел $f(x) = \lim\limits_{t\to+\infty} \varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1}(\langle x, t\rangle)$ и $L \cong_f (\mathbb{N}, <_{\varphi_{e_2}})$. Пусть $e = \langle e_1, e_2\rangle$, $p_0 = \langle e_1, e_2, 0\rangle$ и $r_0 = \langle e_1, e_2, 1\rangle$. Следующие леммы завершают доказательство теоремы.

Лемма 8. $\lim\limits_{s\to+\infty} t^e_s = +\infty$.

Доказательство. Пусть $t^e_{s_0} = t$. Так как $\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1}$ является всюду определенной, существует такой шаг $s_1 > s_0$, что $\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,s_1}(\langle p_0, t\rangle)\downarrow$ и $\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,s_1}(\langle r_0, t\rangle)\downarrow$. Тогда из конструкции следует, что $t^e_{s_1} \geq t + 1$. Отсюда непосредственно вытекает справедливость леммы. □

Лемма 9. *Существуют такой s_0, что d^e_s определено для любого $s > s_0$, и конечный предел $d^e = \lim\limits_{s\to+\infty} d^e_s$.*

Доказательство. Так как $\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1}$ всюду определенная, существует такой шаг s_0, что $\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,s_0}(\langle p_0, 0\rangle)\downarrow$ и $\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,s_0}(\langle r_0, 0\rangle)\downarrow$. Тогда $d^e_{s_0}$ определено и, стало быть, d^e_s определено для любого $s > s_0$.

Выберем такой шаг s_1, что $t^e_s \geq t^e_{s_1} > 0$, $\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,s_1}(\langle p_0, t^e_{s_1}\rangle)\downarrow$, $\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,s_1}(\langle r_0, t^e_{s_1}\rangle)\downarrow$ и

$$\begin{aligned}&\big(\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,s}(\langle p_0, t^e_s\rangle)\downarrow \;\&\; \varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,s}(\langle r_0, t^e_s\rangle)\downarrow\big)\\ &\qquad\Rightarrow \big(\varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,s}(\langle p_0, t^e_s\rangle) = \varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,s_1}(\langle p_0, t^e_{s_1}\rangle) \,\&\, \varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,s}(\langle r_0, t^e_s\rangle) = \varphi^{\mathbf{0}'}_{e_1,s_1}(\langle r_0, t^e_{s_1}\rangle)\big)\end{aligned}$$

для любого $s > s_1$. Тогда на всех шагах $s > s_1$ будет выполнен только случай 1 и, следовательно, $d_s^e = d_{s_1}^e$ для всех $s > s_1$. Таким образом, существует конечный предел $d^e = \lim\limits_{s\to+\infty} d_s^e$. $\square$

Лемма 10. $(\{x \mid p_0 <_L x <_L r_0\}, <_L) \ncong (\{x \mid f(p_0) <_{\varphi_{e_2}} x <_{\varphi_{e_2}} f(r_0)\}, <_{\varphi_{e_2}})$, *что противоречит выбору* f.

Доказательство. Выберем такой шаг s_0, что $d_s^e = d_{s_0}^e = d^e$,

$$\varphi_{e_1,s_0}^{\mathbf{0}'}(\langle p_0, t_{s_0}^e\rangle)\downarrow = f(p_0), \quad \varphi_{e_1,s_0}^{\mathbf{0}'}(\langle r_0, t_{s_0}^e\rangle)\downarrow = f(r_0),$$

$$\big(\varphi_{e_1,s}^{\mathbf{0}'}(\langle p_0, t_s^e\rangle)\downarrow \,\&\, \varphi_{e_1,s}^{\mathbf{0}'}(\langle r_0, t_s^e\rangle)\downarrow\big) \Rightarrow \big(\varphi_{e_1,s}^{\mathbf{0}'}(\langle p_0, t_s^e\rangle) = f(p_0) \,\&\, \varphi_{e_1,s}^{\mathbf{0}'}(\langle r_0, t_s^e\rangle) = f(r_0)\big)$$

для любого $s > s_0$. Ясно, что $f(p_0) <_{\varphi_{e_2}} d^e \leq_{\varphi_{e_2}} f(r_0)$.

Пусть множество $\{x \mid f(p_0) <_{\varphi_{e_2}} x <_{\varphi_{e_2}} d^e\}$ конечно. Тогда

1) либо существует шаг $s_1 > s_0$ такой, что согласно случаю 2 выполнено условие $\neg\Phi_{\text{int}}\big(\varphi_{e_1,s_1+1}^{\mathbf{0}'}(p_0, t_{s_1}^e), \varphi_{e_1,s_1+1}^{\mathbf{0}'}(r_0, t_{s_1}^e); e_2; k+1+n\big)$, где $|\{x \mid f(p_0) <_{\varphi_{e_2}} x <_{\varphi_{e_2}} f(r_0) = d^e\}| = k+n$;

2) либо существует шаг $s_2 > s_0$ такой, что согласно случаю 3a выполнено условие $\neg\Phi_{\text{int}}\big(\varphi_{e_1,s_2}^{\mathbf{0}'}(p_0, t_{s_2}^e - 1), d_{s_2+1}^e; e_2; k+1\big)$, где $|\{x \mid f(p_0) <_{\varphi_{e_2}} x <_{\varphi_{e_2}} d^e\}| = k$.

Имеем

$$(\{x \mid p_0 <_L x <_L r_0\}, <_L) \ncong (\{x \mid f(p_0) <_{\varphi_{e_2}} x <_{\varphi_{e_2}} f(r_0)\}, <_{\varphi_{e_2}}),$$

так как при работе конструкции в случае 3a соответственно

1) на шагах $s > s_1$ добавляются новые элементы в порядок L так, чтобы $(\{x \mid p_0 <_L x <_L r_0\}, <_L) \cong \omega + \omega^*$, но при этом $(\{x \mid f(p_0) <_{\varphi_{e_2}} x <_{\varphi_{e_2}} f(r_0)\}, <_{\varphi_{e_2}})$ конечно;

2) на шагах $s > s_2$ добавляются новые элементы в порядок L так, чтобы $(\{x \mid p_0 <_L x <_L r_0\}, <_L) \cong k + \omega^*$, но при этом $(\{x \mid f(p_0) <_{\varphi_{e_2}} x <_{\varphi_{e_2}} f(r_0)\}, <_{\varphi_{e_2}}) \cong k+1+R$ для некоторого порядка R.

Случай, когда множество $\{x \mid d^e <_{\varphi_{e_2}} x <_{\varphi_{e_2}} f(r_0)\}$ конечно, рассматривается аналогично п. 2 случая, когда множество $\{x \mid f(p_0) <_{\varphi_{e_2}} x <_{\varphi_{e_2}} d^e\}$ конечно.

Предположим, что $\{x \mid f(p_0) <_{\varphi_{e_2}} x <_{\varphi_{e_2}} d^e\}$ и $\{x \mid d^e <_{\varphi_{e_2}} x <_{\varphi_{e_2}} f(r_0)\}$ бесконечны. Тогда согласно случаю 3c имеем $(\{x \mid p_0 <_L x <_L r_0\}, <_L) \cong \omega + \omega^*$ и, стало быть, $(\{x \mid p_0 <_L x <_L r_0\}, <_L) \ncong (\{x \mid f(p_0) <_{\varphi_{e_2}} x <_{\varphi_{e_2}} f(r_0)\}, <_{\varphi_{e_2}})$, так как $\omega + \omega^*$ не содержит элемента, левее и правее которого расположено бесконечно много элементов. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Jockusch C. G., Soare R. I.* Degrees of orderings not isomorphic to recursive linear orderings // Ann. Pure Appl. Logic. 1991. V. 52. P. 39–61.
2. *Downey R. G., Jockusch C. G.* Every low Boolean algebra is isomorphic to a recursive one // Proc. Amer. Math. Soc. 1994. V. 122, N 3. P. 871–880.
3. *Downey R. G., Moses M. F.* On choice sets and strongly nontrivial self-embeddings of recursive linear orderings // Zeitschrift Math. Logik Grundlagen Mathematik. 1989. V. 35. P. 237–246.
4. *Downey R. G.* Computability theory and linear orderings // Ershov Yu. L., Goncharov S. S., Nerode A., Remmel J. B. (eds.) Handbook of recursive mathematics. Amsterdam: Elsevier, 1998. Ch. 14. P. 823–976. (Stud. Logic Found. Math.; V. 139).

5. *Фролов А. Н.* Δ_2^0 копии линейных порядков // Алгебра и логика. 2006. Т. 45, № 3. С. 354–370.
6. *Соар Р. И.* Вычислимо перечислимые множества и степени. Казань: Казанское мат. о-во, 2000.
7. *Rosenstein J. G.* Linear orderings. New York: Acad. Press, 1982.

Статья поступила 14 апреля 2009 г.

Фролов Андрей Николаевич
НИИ математики и механики Казанского гос. университета,
ул. проф. Нужина, 17, Казань 420008
Andrey.Frolov@ksu.ru