Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2010. Том 51, № 5

УДК 512.554.32

ОГРАНИЧЕНИЯ МОДУЛЯРНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ СПЕЦИАЛЬНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ГРУПП НА ПОДГРУППЫ ТИПА $A_1 \times A_1$

А. А. Осиновская

Аннотация. Изучаются ограничения инфинитезимально неприводимых модулярных представлений алгебраических групп типа A_n на подсистемные подгруппы типа $A_1 \times A_1$, при некоторых ограничениях на старший вес представления найдены их композиционные факторы.

Ключевые слова: специальная линейная группа, представление, ограничение на подгруппу.

1. Введение

Исследование ограничений представлений на подгруппы (правил ветвления) — одна из важнейших задач теории представлений и теории линейных групп. В положительной характеристике ситуация значительно сложнее, чем в нулевой, хотя бы из-за отсутствия свойства полной приводимости представлений полупростых алгебраических и конечных групп. Поэтому целесообразно разрабатывать асимптотические методы изучения модулярных представлений, рассматривая ограничения на подгруппы малых рангов. При этом во многих ситуациях необходима информация об ограничении представления на произведение коммутирующих подгрупп, а не на сами подгруппы. В частности, с помощью этого подхода получены оценки максимальных кратностей весов модулярных представлений [1]. В то же время еще не исследован простейший случай ограничения модулярных представлений алгебраических групп на подгруппы типа $A_1 \times A_1$. Для характеристики 0 эта задача для представлений специальных линейных групп решена Т. М. Железной [2]. В данной статье рассматривается случай положительной характеристики.

Пусть K — алгебраически замкнутое поле характеристики $p > 0$, G — односвязная алгебраическая группа типа A_n над K, $n > 2$; $\omega_1, \dots, \omega_n$ и $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ — фундаментальные веса и базис системы корней группы G; $V(\omega)$ — неприводимый рациональный G-модуль со старшим весом $\omega = a_1\omega_1 + \dots + a_n\omega_n$. Множество весов группы типа $A_1 \times A_1$ можно отождествить с множеством пар целых чисел при помощи отображения $x_1\omega_1 + x_2\omega_2 \mapsto (x_1, x_2)$, множество доминантных весов — с множеством пар $\mathbb{N}^2$ неотрицательных целых чисел. Для произвольной алгебраической группы Γ будем обозначать через $\operatorname{Irr} V$ ($\operatorname{Irr} \psi$) множество старших весов композиционных факторов Γ-модуля V (представления ψ группы Γ),

Работа выполнена в рамках Государственной программы фундаментальных исследований «Математические модели 03».

а через $V|\Pi$ ($\psi|\Pi$) — ограничение Γ-модуля V (представления ψ группы Γ) на подгруппу $\Pi \subset \Gamma$. Если $\beta_1, \dots, \beta_s$ — корни группы G, то $G(\beta_1, \dots, \beta_s)$ обозначает подгруппу в G, порожденную корневыми подгруппами, ассоциированными с корнями $\pm\beta_1, \dots, \pm\beta_s$. При рассмотрении подгрупп такого вида корни $\beta_1, \dots, \beta_s$ выбираются так, что они составляют базис системы корней подгруппы $G(\beta_1, \dots, \beta_s)$, и фундаментальные веса этой подгруппы рассматриваются относительно данного базиса. Такие подгруппы $G(\beta_1, \dots, \beta_s)$ называются *подсистемными*. Положим

$$G(i_1, \dots, i_s) = G(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_s}).$$

Для целого k, $1 < k < n$, определим подгруппы $S(k)_1 = G(1, \dots, k-1)$, $S(k)_2 = G(k+1, \dots, n)$ и $H(k)_i = A_1(K) \subset S(k)_i$ для $i = 1, 2$. Когда индекс k фиксирован, пишем просто S_i, H_i ($i = 1, 2$). Пусть $H = H_1 \times H_2$ — подсистемная подгруппа группы G типа $A_1 \times A_1$. Чаще всего будем рассматривать $H = G(1) \times G(n)$ либо $G(k-1) \times G(k+1)$. Учитывая сделанное выше отождествление, можно записать $\mathrm{Irr}(V(\omega)|H) \subset \mathbb{N}^2$. Мы предполагаем, что модуль $V(\omega)$ реализуется в представлении ϕ. Всюду ниже считаем, что вес ω p-ограничен, т. е. $a_i < p$ для $1 \le i \le n$.

Теорема 1. *Пусть $n > 6$ и $a_i + a_{i+1} < p$ для всех $1 \le i \le n-1$. Тогда*

$$\mathrm{Irr}(\phi|H) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2 \mid 0 \le x_1, x_2 \le a_1 + \dots + a_n,\\ x_1 + x_2 \le a_1 + 2a_2 + \dots + 2a_{n-1} + a_n\}.$$

Заметим, что множество $\mathrm{Irr}(\phi|H)$ совпадает с соответствующим множеством в характеристике 0, полученным Т. М. Железной в [2].

2. Построение векторов специального вида

Введем сначала некоторые обозначения. Далее $\mathbb{N}$ — множество неотрицательных целых чисел, $W(\mu)$ — модуль Вейля группы Γ со старшим весом μ, $v^+ \in V$ — ненулевой вектор старшего веса Γ-модуля V, $\langle \lambda, \alpha \rangle$ — значение веса λ группы Γ на корне α и $\lambda|\Pi$ — ограничение веса λ группы Γ на подгруппу Π. Для корня α группы Γ и $k \in \mathbb{N}$ обозначим символами X_α, $\mathscr{X}_\alpha$ и $X_{\alpha,k}$ корневой элемент алгебры Ли группы Γ и корневую подгруппу группы Γ, ассоциированные с α, и элемент гипералгебры алгебры Ли группы Γ, ассоциированный с парой (α, k) соответственно. Если $\alpha = \alpha_{\pm i}$, то пишем $X_{\pm i}$, $\mathscr{X}_{\pm i}$ и $X_{\pm i,k}$. Для весов λ и μ группы Γ пишем $\mu \ge \lambda$, если $\mu - \lambda$ — это сумма некоторых положительных корней группы G.

Пусть Π — подсистемная подгруппа группы Γ и V — Γ-модуль. Для весового вектора $v \in V$ обозначим символом $\omega(v)$ его вес относительно Γ. Напомним, что вектор $v \in V$ называется *примитивным* относительно Π, если v — ненулевой весовой вектор и $\mathscr{X}_\alpha$ фиксирует v для произвольного положительного корня α подгруппы Π.

Определение 1. Пусть Γ — простая алгебраическая группа, $U(\mu)$ — неразложимый Γ-модуль со старшим весом $\mu = \sum\limits_{i=1}^{r} m_i\omega_i$. Положим $y_s = -\langle \alpha_{s-1}, \alpha_s \rangle$, $z_s = -\langle \alpha_{s+1}, \alpha_s \rangle$. Пусть $1 \le i, j \le r$ и все корни α_t для t из интервала с концами i и j образуют цепочку на схеме Дынкина группы Γ. Фиксируем вектор старшего веса v^+. Если $m_j < p$, то для целого числа d при $0 < d \le m_j$ определим вектор $v(i, j, d) = v(i, j, d, v^+)$ следующим образом. Положим $d_j = d$. Если $i > j$, положим $d_s = m_s + d_{s-1}y_s$ для $i \geq s > j$. Если $i < j$, положим $d_s = m_s + d_{s+1}z_s$ для $i \leq s < j$. Теперь

$$v(i, j, d, v^+) = X_{-i,d_i} \dots X_{-s,d_s} \dots X_{-j,d_j} v^+.$$

Лемма 1 [3, лемма 2.9]. *Пусть модуль $U(\mu)$ такой, как в определении 1. Тогда $v(i, j, d)$ не равен 0 и примитивен относительно подгрупп $\mathscr{X}_l$, $l \neq i$.*

Определение 2. Рассмотрим неразложимый G-модуль $U(\omega)$. Пусть $1 \leq i < k < j \leq n$, $0 \leq d_i \leq a_i < p$ и $0 \leq d_j \leq a_j < p$. Введем вектор $u(i, k, j, d_i, d_j)$ следующим образом. Для G-модуля $U(\omega)$ положим $v = v(k+1, j, d_j, v^+)$. Вектор v порождает неразложимый $G(1, \dots, k)$-модуль $M \subset U(\omega)|G(1, \dots, k)$ со старшим весом

$$a_1\omega_1 + \dots + a_{k-1}\omega_{k-1} + (a_k + \dots + a_{j-1} + d_j)\omega_k.$$

Тогда для группы $G(1, \dots, k)$ и модуля M положим

$$u(i, k, j, d_i, d_j) = v(k, i, d_i, v).$$

Лемма 2. *Вектор $u(i, k, j, d_i, d_j)$ не равен 0, примитивен относительно подгруппы $S(k)_1 \times S(k)_2$ и имеет относительно $H_1 \times H_2$ вес $b_1\omega_1 + b_2\omega_2$, где $b_1 = a_k + \dots + a_{j-1} + d_j$ при $i < k-1$ и $b_1 = a_i - d_i + a_k + \dots + a_{j-1} + d_j$ при $i = k-1$, $b_2 = d_i + a_{i+1} + \dots + a_k$ при $j > k+1$ и $b_2 = d_i + a_{i+1} + \dots + a_k + a_j - d_j$ при $j = k+1$*

Доказательство. Примитивность вектора $u(i, k, j, d_i, d_j)$ следует из леммы 1. Его вес относительно группы G равен

$$\begin{aligned}\lambda = \omega - d_i\alpha_i - (d_i + a_{i+1})\alpha_{i+1} - \dots - (d_i + a_{i+1} + \dots + a_{k-1})\alpha_{k-1} \\ - (d_i + a_{i+1} + \dots + a_{j-1} + +d_j)\alpha_k - (a_{k+1} + \dots + a_{j-1} + d_j)\alpha_{k+1} - \dots \\ - (a_{j-1} + d_j)\alpha_{j-1} - d_j\alpha_j.\end{aligned}$$

Положим $H = G(k-1) \times G(k+1)$. Тогда, вычисляя значение веса λ на корне α_{k-1}, получаем, что $b_1 = a_k + \dots + a_{j-1} + d_j$ при $i < k-1$ и $b_1 = a_i - d_i + a_k + \dots + a_{j-1} + d_j$ при $i = k-1$. Аналогично находятся формулы для b_2. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть $\omega = a_1\omega_1 + \dots + a_n\omega_n$ — p-ограниченный доминантный вес группы $G = A_n(K)$ и ψ — неразложимое представление группы G с этим старшим весом. Предположим, что $a_2 + \dots + a_{n-1} < p$ при $n > 3$. Тогда*

$$T_2 \cup T_3 \subset \operatorname{Irr}(\psi|H),$$

где

a) *при $n = 3$*

$$T_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2 \mid x_1 = a_1 + a_2 + a_3,\ 0 \leq x_2 \leq a_2,\ x_1 + x_2 \equiv a_1 + a_3 (\operatorname{mod} 2)\},$$

$$T_3 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2 \mid 0 \leq x_1 \leq a_2,\ x_2 = a_1 + a_2 + a_3,\ x_1 + x_2 \equiv a_1 + a_3 (\operatorname{mod} 2)\};$$

b) *при $n > 3$*

$$T_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2 \mid x_1 = a_1 + a_2 + \dots + a_n,\ 0 \leq x_2 \leq a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1}\},$$

$$T_3 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2 \mid 0 \leq x_1 \leq a_2 + \dots + a_{n-1},\ x_2 = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n\}.$$

Доказательство. Согласно теоремам 1.1 и 1.2 из [2] это включение справедливо при $p = 0$. Значит, оно верно при $p > 0$, если представление ψ реализуется в модуле Вейля $W(\omega)$. Пусть теперь ψ реализуется в модуле $M \neq W(\omega)$. По [4, ч. II, предложение 8.19] все композиционные факторы модуля $W(\omega)$, не совпадающие с $V(\omega)$, содержатся в множестве

$$\{V(\mu) \mid \mu = \omega - (\langle \omega + \rho, \alpha \rangle - kp)\alpha,\ \alpha > 0,\ 0 < kp < \langle \omega + \rho, \alpha \rangle\}.$$

Так как вес ω p-ограничен, в предыдущей формуле $\alpha \neq \alpha_i$ для $1 \leq i \leq n$. Поскольку $a_2 + \dots + a_{n-1} < p$, то также $\alpha \neq \alpha_i + \dots + \alpha_j$, где $1 < i < j < n$. Положим $\mu = m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + \dots + m_n\omega_n$. Из вышеприведенных рассуждений следует, что $m_1 + \dots + m_n < a_1 + \dots + a_n$. Отсюда получаем искомое. Лемма доказана.

Из доказательства предыдущей леммы вытекает

Следствие 1. *Пусть $G = A_4(K)$ и $a_2 + a_3 < p$. Тогда существуют векторы u_r $(0 \leq r \leq a_2 + a_3)$ и v_s $(0 \leq s \leq a_2 + a_3)$, примитивные относительно H, с весами $\mu_r = (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)\omega_1 + r\omega_2$ и $\nu_s = s\omega_1 + (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)\omega_2$ соответственно.*

3. Большие композиционные факторы

Обозначим $a = a_1 + \dots + a_n$.

Предложение 1. *Пусть $n > 3$ и $m = \max\limits_{2 \leq i \leq n-1} a_i$. Тогда $T \subset \mathrm{Irr}(\phi|H)$, где*

$$T = \{(x_1, x_2) \mid m \leq x_1, x_2 \leq a,\ a + m \leq x_1 + x_2 \leq a_1 + 2(a_2 + \dots + a_{n-1}) + a_n\}.$$

Если $a_i + a_{i+1} < p$ для любого $1 < i < n-1$, то $S \subset \mathrm{Irr}(\phi|H)$, где

$$S = \{(x_1, x_2) \mid a_1 + a_2 \leq x_1 \leq a,\ a_{n-1} + a_n \leq x_2 \leq a,\\ x_1 + x_2 \leq a_1 + 2(a_2 + \dots + a_{n-1}) + a_n\}.$$

При этом для любого веса из множеств T и S существует вектор этого веса, примитивный относительно H.

Доказательство. I. Предположим сначала, что $a_i + a_{i+1} < p$ для любого $1 < i < n-1$, и будем доказывать, что $S \subset \mathrm{Irr}(\phi|H)$.

Мы можем считать, что $H_1 = G(1)$, $H_2 = G(n)$. Обозначим $G_1 = G(3, \dots, n)$.

1. Положим $v = v(2, n, d_n, v^+)$, где $0 \leq d_n \leq a_n$. Вектор v примитивен относительно подгруппы G_1 и имеет относительно нее вес

$$\mu = \omega(v)|G_1 = a_2\omega_1 + \dots + a_{n-2}\omega_{n-3} + (a_{n-1} + a_n - d_n)\omega_{n-2}.$$

Для $1 \leq k \leq n-3$, $0 \leq s_{k+1} \leq a_{k+1}$ и группы G_1 положим $w = v(n-3, k, s_{k+1}, v)$. Применяя лемму 1 дважды, получаем, что w примитивен относительно H. Его вес относительно H равен

$$(a_1 + \dots + a_{n-1} + d_n)\omega_1 + (s_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_{n-1} + a_n - d_n)\omega_2.$$

Следовательно,

$$S_1 = \{a_1 + \dots + a_{n-1} \leq x_1 \leq a,\\ a + a_2 \leq x_1 + x_2 \leq a_1 + 2a_2 + \dots + 2a_{n-1} + a_n\} \subset \mathrm{Irr}(\phi|H).$$

Рассуждая аналогично, получаем, что

$$S_2 = \{a_2 + \dots + a_n \le x_2 \le a,\\ a + a_{n-1} \le x_1 + x_2 \le a_1 + 2a_2 + \dots + 2a_{n-1} + a_n\} \subset \mathrm{Irr}(\phi|H).$$

Значит, осталось доказать, что

$$S' = \{a_1 + a_2 \le x_1 \le a_1 + \dots + a_{n-1},\ a_{n-1} + a_n \le x_2 \le a_2 + \dots + a_n\} \subset \mathrm{Irr}(\phi|H),$$

если такие (x_1, x_2) существуют.

2. Пусть $S' \ne \varnothing$. Положим $v = v(2, n-1, d_{n-1}, v^+)$, где $0 \le d_{n-1} \le a_{n-1}$. Вектор v примитивен относительно подгруппы G_1 и имеет вес

$$\mu = \omega(v)|G_1 = a_2\omega_1 + \dots + a_{n-3}\omega_{n-4} + (a_{n-2} + a_{n-1} - d_{n-1})\omega_{n-3} + (a_n + d_{n-1})\omega_{n-2}.$$

Для $1 \le k \le n-3$, $0 \le s_{k+1} \le a_{k+1}$ при $k \ne n-3$, $0 \le s_{k+1} \le a_{n-2} + a_{n-1} - d_{n-1}$ при $k = n-3$ и группы G_1 положим $w = v(n-3, k, s_{k+1}, v)$. Отметим, что при $k = n-3$ мы воспользовались тем фактом, что $a_{n-2} + a_{n-1} < p$. Применяя лемму 1 дважды, получаем, что w примитивен относительно H. Его вес относительно H равен

$$(a_1 + \dots + a_{n-2} + d_{n-1})\omega_1 + (s_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_{n-1} + a_n)\omega_2,$$

при $k \ne n-3$ и

$$(a_1 + \dots + a_{n-2} + d_{n-1})\omega_1 + (s_{k+1} + a_n + d_{n-1})\omega_2$$

при $k = n-3$. Следовательно,

$$S_3 = \{a_1 + \dots + a_{n-2} \le x_1 \le a_1 + \dots + a_{n-1},\ a_{n-1} + a_n \le x_2 \le a_2 + \dots + a_n\}\\ \subset \mathrm{Irr}(\phi|H).$$

Аналогично получаем, что

$$S_4 = \{a_1 + a_2 \le x_1 \le a_1 + \dots + a_{n-1},\ a_3 + \dots + a_n \le x_3 \le a_2 + \dots + a_n\} \subset \mathrm{Irr}(\phi|H).$$

Если $n = 4$, то все доказано. В противном случае осталось доказать, что

$$S'' = \{a_1 + a_2 \le x_1 \le a_1 + \dots + a_{n-2},\ a_{n-1} + a_n \le x_2 \le a_3 + \dots + a_n\} \subset \mathrm{Irr}(\phi|H),$$

если такие (x_1, x_2) существуют.

3. Пусть $S'' \ne \varnothing$. Положим $v = v(2, n-2, d_{n-2}, v^+)$, где $0 \le d_{n-2} \le a_{n-2}$. Вектор v примитивен относительно G_1 и имеет вес

$$\mu = \omega(v)|G_1 = a_2\omega_1 + \dots + a_{n-4}\omega_{n-5} + (a_{n-3} + a_{n-2} - d_{n-2})\omega_{n-4}\\ + (a_{n-1} + d_{n-2})\omega_{n-3} + a_n\omega_{n-2}.$$

Для $1 \le k \le n-3$, $0 \le s_{k+1} \le a_{k+1}$ при $k \ne n-4, n-3$, $0 \le s_{k+1} \le a_{n-3} + a_{n-2} - d_{n-2}$ при $k = n-4$, $0 \le s_{k+1} \le a_{n-1} + d_{n-2}$ при $k = n-3$ и группы G_1 положим $w = v(n-3, k, s_{k+1}, v)$. Применяя лемму 1 дважды и учитывая, что $a_{n-3} + a_{n-2}$ и $a_{n-2} + a_{n-1} < p$, получаем, что w примитивен относительно H. Его вес относительно H равен

$$(a_1 + \dots + a_{n-3} + d_{n-2})\omega_1 + (s_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_{n-1} + a_n)\omega_2$$

при $k < n-4$,

$$(a_1 + \dots + a_{n-3} + d_{n-2})\omega_1 + (s_{k+1} + a_{n-1} + a_n + d_{n-2})\omega_2$$

при $k = n - 4$ и

$$(a_1 + \dots + a_{n-3} + d_{n-2})\omega_1 + (s_{k+1} + a_n)\omega_2$$

при $k = n - 3$. Следовательно,

$$S_5 = \{a_1 + \dots + a_{n-3} \le x_1 \le a_1 + \dots + a_{n-2},\ a_n \le x_2 \le a_3 + \dots + a_n\} \subset \mathrm{Irr}(\phi|H).$$

Аналогично получаем, что

$$S_6 = \{a_1 \le x_1 \le a_1 + \dots + a_{n-2},\ a_4 + \dots + a_n \le x_3 \le a_3 + \dots + a_n\} \subset \mathrm{Irr}(\phi|H).$$

Если $n = 5$, то все доказано. В противном случае осталось доказать, что

$$S''' = \{a_1 + a_2 \le x_1 \le a_1 + \dots + a_{n-3},\ a_{n-1} + a_n \le x_2 \le a_4 + \dots + a_n\} \subset \mathrm{Irr}(\phi|H),$$

если такие (x_1, x_2) существуют. Рассуждая далее по индукции, получаем искомое.

II. Чтобы доказать, что $T \subset \mathrm{Irr}(\phi|H)$, рассуждаем, как в ч. I доказательства, но в пп. 2 и 3 полагаем $k < n-3$ и $k < n-4$ соответственно. Предложение доказано.

Следствие 2. *Пусть $\omega = a_3\omega_1 + \dots + a_{n-2}\omega_n$ — доминантный p-ограниченный вес группы $G = A_n(K)$, $n \ge 4$. Если $a_i + a_{i+1} < p$ для любого $2 < i < n-2$, то $\mathrm{Irr}(\phi|H)$ равно $\{(x_1, x_2) \mid 0 \le x_1 \le a,\ 0 \le x_2 \le a,\ x_1 + x_2 \le 2a\}$, т. е. совпадает с соответствующим множеством в характеристике 0. При этом для любого веса из $\mathrm{Irr}(\phi|H)$ существует вектор этого веса, примитивный относительно H.*

4. Малые композиционные факторы

Предложение 2. *Пусть $n > 3$ и $a_i + a_{i+1} < p$ для всех $1 < i < n-1$. Тогда $T \subset \mathrm{Irr}(\phi|H)$, где*

$$T = \{0 \le x_1, x_2 \le a,\ x_1 + x_2 \le a + a_2 + \dots + a_{n-1}\} \setminus (T_1 \cup T_2),$$

$$T_1 = \{0 \le x_1 < a_{n-3} + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n,\ 0 \le x_2 < a_{n-1} + a_n\},$$

$$T_2 = \{0 \le x_1 < a_1 + a_2,\ 0 \le x_2 < a_1 + a_2 + a_3 + a_4\}.$$

Доказательство. Положим $\Pi = G(1,2,3,4)$, $H = G(1) \times G(4)$ и $M_1 = K\Pi v^+$. По теореме Смита [5] M_1 — неприводимый Π-модуль со старшим весом $\tau_1 = a_1\omega_1 + a_2\omega_2 + a_3\omega_3 + a_4\omega_4$, являющийся прямым слагаемым ограничения $V(\omega)|\Pi$. Согласно предложению 1 и следствию 1 существуют векторы u_r ($0 \le r \le a_2 + a_3$) и w_t ($-a_1 \le t \le a_4$), примитивные относительно подгруппы H, с весами $\mu_r = r\omega_1 + (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)\omega_2$ и $\lambda_t = (a_1 + a_2 + a_3 + t)\omega_1 + (a_2 + a_3 + a_4 - t)\omega_2$ соответственно.

Для $5 \le k \le n$, $0 \le d_k \le a_k$ положим

$$u(r, k, d_k) = X_{-5, a_5 + \dots + a_{k-1} + d_k} \dots X_{-(k-1), a_{k-1} + d_k} X_{-k, d_k} u_r$$

и

$$w(s, k, d_k) = X_{-5, a_5 + \dots + a_{k-1} + d_k} \dots X_{-(k-1), a_{k-1} + d_k} X_{-k, d_k} w_s.$$

По лемме 1 векторы $v(r, k, d_k)$ и $w(r, k, d_k)$ не равны нулю. Они примитивны относительно подгруппы H, так как она коммутирует с операторами $X_{-j,t}$ для $j \ge 5$. Рассматривая веса этих векторов относительно H, получаем, что

$$U_1 = \{0 \le x_1 \le a_2 + a_3,\ a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \le x_2 \le a_1 + \dots + a_n\} \subset \mathrm{Irr}(\phi|H),$$

$$V_1 = \{a_2 + a_3 \le x_1 \le a_1 + a_2 + a_3 + a_4,\ a_2 + a_3 \le x_2 \le a_1 + \dots + a_n,$$
$$a_1 + 2a_2 + 2a_3 + a_4 \le x_1 + x_2 \le a_1 + 2a_2 + 2a_3 + a_4 + \dots + a_n\} \subset \mathrm{Irr}(\phi|H).$$

Отсюда следует, что

$$W_1 = \{0 \le x_1 \le a_1 + a_2 + a_3 + a_4,\ a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \le x_2 \le a,$$
$$x_1 + x_2 \le a_1 + 2a_2 + 2a_3 + a_4 + \dots + a_n\} \subset \mathrm{Irr}(\phi|H).$$

Аналогично

$$W_2 = \{a_{n-3} + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \le x_1 \le a,\ 0 \le x_2 \le a_{n-3} + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n,$$
$$x_1 + x_2 \le a_1 + \dots + a_{n-3} + 2a_{n-2} + 2a_{n-1} + a_n\} \subset \mathrm{Irr}(\phi|H).$$

Теперь использование предложения 1 завершает доказательство.

Следствие 3. *Пусть $n > 3$ и $a_i + a_{i+1} < p$ для всех $1 \le i \le n-1$. Тогда*

$$\{0 \le x_1, x_2 \le a,\ x_1 + x_2 \le a + a_2 + \dots + a_{n-1}\} \setminus U \subset \mathrm{Irr}(\phi|H),$$

где

$$U = \{0 \le x_1 < a_1 + a_2 + a_3 + a_4,\ 0 \le x_2 < a_{n-3} + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n\}.$$

Доказательство. Можно считать, что $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \le a_{n-3} + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$. Тогда достаточно доказать, что

$$\{0 \le x_1, x_2 \le a,\ x_1 + x_2 \le a + a_2 + \dots + a_{n-1}\} \setminus W \subset \mathrm{Irr}(\phi|H),$$

где $W = \{0 \le x_1, x_2 < a_1 + a_2 + a_3 + a_4,\ x_1 + x_2 < a_1 + 2a_2 + 2a_3 + a_4\}$. Обозначим через t индекс, для которого достигается максимум

$$m = \max_{1 \le i \le n-3} (a_i + a_{i+1} + a_{i+2} + a_{i+3}).$$

Если таких индексов t несколько, то выбираем те из них, для которых сумма $a_{t+1} + a_{t+2}$ максимальна. Из предложения 2 следует, что

$$\{0 \le x_1, x_2 \le a,\ x_1 + x_2 \le a + a_2 + \dots + a_{n-1}\} \setminus V \subset \mathrm{Irr}(\phi|H),$$

где

$$V = \{0 \le x_1, x_2 < m,\ x_1 + x_2 < a_t + 2a_{t+1} + 2a_{t+2} + a_{t+3}\}.$$

Значит, если $t = 1$, то все доказано. Пусть это не так. Положим $\Pi_1 = G(1, 2, 3, 4)$, $v = v(5, 5, d_5, v^+)$ и $w = v(5, 4, d_4, v^+)$ для $0 \le d_4 \le a_4$ и $0 \le d_5 \le a_5$. По лемме 1 векторы v и w примитивны относительно Π_1. Их веса относительно этой подгруппы равны соответственно $a_1\omega_1 + a_2\omega_2 + a_3\omega_3 + (a_4 + d_5)\omega_4$ и $a_1\omega_1 + a_2\omega_2 + (a_3 + d_4)\omega_3 + (a_4 - d_4 + a_5)\omega_4$. Эти веса p-ограничены. Используя предложение 1 и следствие 1, получаем, что

$$\{0 \le x_1, x_2 \le a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5,\ x_1 + x_2 \le a_1 + 2a_2 + 2a_3 + 2a_4 + a_5\} \setminus Q_1 \subset \mathrm{Irr}(\phi|H),$$

где

$$Q_1 = \{0 \le x_1, x_2 < a_1 + a_2 + a_3 + a_4,\ x_1 + x_2 < a_1 + 2a_2 + 2a_3 + a_4\}.$$

Положим теперь $\Pi_2 = G(2, 3, 4, 5)$ и $v = v(1, 1, d_1, v^+)$, $w = v(1, 2, d_2, v^+)$ для $0 \le d_1 \le a_1$, $0 \le d_2 \le a_2$. Согласно лемме 1 векторы v и w примитивны относительно Π_2. Их веса относительно этой подгруппы равны соответственно $(d_1 + a_2)\omega_1 + a_3\omega_2 + a_4\omega_3 + a_5\omega_4$ и $(a_1 + a_2 - d_2)\omega_1 + (d_2 + a_3)\omega_2 + a_4\omega_3 + a_5\omega_4$. Эти веса p-ограничены. Используя предложение 1 и следствие 1, получаем, что

$$\{0 \le x_1, x_2 \le a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5,\ x_1 + x_2 \le a_1 + 2a_2 + 2a_3 + 2a_4 + a_5\} \setminus Q_2 \subset \mathrm{Irr}(\phi|H),$$

где

$$Q_2 = \{0 \le x_1, x_2 < a_2 + a_3 + a_4 + a_5,\ x_1 + x_2 < a_2 + 2a_3 + 2a_4 + a_5\}.$$

Отсюда получаем требуемое при $t = 2$. При $t > 2$ рассуждаем по индукции. Следствие доказано.

5. Доказательство теоремы

Лемма 4. $\mathrm{Irr}(\phi|H) \subset \{0 \le x_1, x_2 \le a,\ x_1 + x_2 \le a + a_2 + \dots + a_{n-1}\}$.

Доказательство. Обозначим

$$\mathfrak{S} = \{0 \le x_1, x_2 \le a,\ x_1 + x_2 \le a + a_2 + \dots + a_{n-1}\}$$

и докажем, что $\mathrm{Irr}(W(\omega)|H) \subset \mathfrak{S}$, откуда будет следовать, что $\mathrm{Irr}(\phi|H) \subset \mathfrak{S}$. Согласно теореме 1.2 из [2] $\mathrm{Irr}(\phi|H) = \mathfrak{S}$ при $p = 0$. Из конструкции модуля Вейля следует, что если $\mu = m_1\omega_1 + m_2\omega_2 \subset \mathrm{Irr}(\phi|H)$ в характеристике 0, то $W(\mu)$ является фактором (необязательно неприводимым) ограничения $W(\omega)|H$ в характеристике p. Нам надо доказать, что все композиционные факторы модуля $W(\mu)$ принадлежат $\mathfrak{S}$. Если $\lambda \in \mathrm{Irr}\, W(\mu)$, то $\lambda \le \mu$, т. е. $\lambda = \mu - k_1\alpha_1 - k_2\alpha_2$, где k_1, $k_2 \in \mathbb{N}$. Положим $\lambda = n_1\omega_1 + n_2\omega_2$. Тогда $n_i = m_i - 2k_i$ для $i = 1, 2$ и, очевидно, $\lambda \in \mathfrak{S}$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Из леммы 4 следует, что достаточно доказать включение

$$\{0 \le x_1, x_2 \le a,\ x_1 + x_2 \le a + a_2 + \dots + a_{n-1}\} \subset \mathrm{Irr}(\phi|H).$$

Пусть $n = 7$. Положим $k = 4$, $S_i = S(4)_i$ $(i = 1, 2)$, $H_1 = G(1)$, $H_2 = G(7)$. Согласно лемме 2 вектор $u(3, 4, 5, a_3, a_5)$ примитивен относительно $S_1 \times S_2$ и имеет относительно этой подгруппы p-ограниченный вес

$$\lambda = a_1\omega_1 + (a_2 + a_3)\omega_2 + (a_4 + a_5)\omega_3 + (a_3 + a_4)\omega_4 + (a_6 + a_5)\omega_5 + a_7\omega_6.$$

Тогда по теореме 1.2 из [6] получаем, что

$$\{0 \le x_1 \le a_1 + \dots + a_5,\ 0 \le x_2 \le a_3 + \dots + a_7\} \subset \mathrm{Irr}(\phi|H).$$

Если $n > 7$, то положим

$$S_1 = G(1, 2, 3), \quad S_2 = G(n-2, n-1, n), \quad H_1 = G(1), \quad H_2 = G(n).$$

Рассмотрим вектор $v = X_{-(n-3), a_{n-3}} X_{-4, a_4} v^+$. Применяя лемму 1 дважды, получаем, что вектор v примитивен относительно $S_1 \times S_2$. Он имеет относительно этой подгруппы p-ограниченный вес

$$\lambda = a_1\omega_1 + a_2\omega_2 + (a_3 + a_4)\omega_3 + (a_{n-3} + a_{n-2})\omega_4 + a_{n-1}\omega_5 + a_n\omega_6.$$

Тогда из теоремы 1.2 в [6] следует, что

$$\{0 \le x_1 \le a_1 + \dots + a_4,\ 0 \le x_2 \le a_{n-3} + \dots + a_n\} \subset \mathrm{Irr}(\phi|H).$$

Объединяя этот результат со следствием из [3], получаем искомое. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Баранов А. А., Осиновская А. А., Супруненко И. Д.* Модулярные представления классических групп с малыми кратностями весов // Современная математика и ее приложения. 2008. Т. 60. С. 163–175.
2. *Железная Т. М.* Об ограничениях неприводимых представлений алгебраических групп типа A_n в характеристике 0 на подгруппы типа $A_1 \times A_1$ // Тр. Ин-та математики / НАН Беларуси, Минск. 2007. Т. 15, № 1. С. 56–67.
3. *Suprunenko I. D.* On Jordan blocks of elements of order p in irreducible representations of classical groups with p-large highest weights // J. Algebra. 1997. V. 191. P. 589–627.

4. *Jantzen J. C.* Representations of algebraic groups. Second edition. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2003.
5. *Smith S.* Irreducible modules and parabolic subgroups // J. Algebra. 1982. V. 75. P. 286–289.
6. *Osinovskaya A. A.* Restrictions of irreducible representations of classical algebraic groups to root A_1-subgroups // Commun. Algebra. 2003. V. 31, N 5. P. 2357–2379.

Статья поступила 18 сентября 2009 г.

Осиновская Анна Александровна
Институт математики НАН Беларуси,
ул. Сурганова, 11, Минск 220072, Беларусь
anna@im.bas-net.by