Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2010. Том 51, № 5

УДК 512.54

ГРУППЫ ZC–АВТОМАТНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

А. С. Олийнык, В. И. Сущанский

Аннотация. Изучаются ZC-автоматы и определяемые ими группы преобразований. Устанавливаются связи группы ZC-автоматных преобразований с группой бесконечных унитреугольных целочисленных матриц. Описывается ее ряд коммутантов. Приводятся условия представимости резидуально разрешимых групп ZC-автоматными преобразованиями. Строится континуальное семейство ZC-автоматов с двумя состояниями, каждый из которых порождает свободную полугруппу.

Ключевые слова: автомат, автоматное преобразование, унитреугольная матрица, резидуально разрешимая группа, ряд коммутантов, свободная полугруппа.

1. Введение

Автоматы-преобразователи (синхронные или асинхронные) введены в рассмотрение для моделирования процессов переработки информации. Естественным ограничением при этом является конечность алфавитов, над которыми рассматриваются автоматы. Однако начиная с 60-х гг. прошлого столетия, начинаются исследования групп и полугрупп, порождаемых синхронными автоматами (см. [1–3] и особенно [4]), а асинхронные автоматы применяются (иногда в неявном виде) для построения преобразований канторовских множеств с интересными динамическими и эргодическими свойствами (см. [5]). Теория групп автоматных преобразований может быть представлена на нескольких равноправных языках: алгебраическом (с помощью бесконечно итерированных сплетений), геометрическом (как группы автоморфизмов однородных корневых деревьев) и топологическом (как изометрии метрических пространств канторовского типа). Основными достижениями этой теории являются различные конструкции групп с экстремальными свойствами: бернсайдового типа, промежуточного роста, just infinite и др. С помощью теории автоматов (теории автоморфизмов корневых деревьев) удалось построить теории ветвящихся групп [6], самоподобных групп [7]. Язык автоматных подстановок оказался также удобным при определении групп итерированных монодромий — важного объекта, сопоставляемого голоморфным динамическим системам. Достаточно подробная подборка результатов по этой проблематике имеется в обзоре [5] и монографии [7].

Во всех перечисленных работах рассматриваются автоматы над конечным алфавитом или, на другом языке, автоморфизмы корневых деревьев конечной валентности.

Однако с точки зрения возможных применений в теории групп или динамике это ограничение не выглядит убедительным, а мотивируется скорее традицией и некоторым удобством техники вычислений. С другой стороны, ничем не ограниченное использование автоматов-преобразователей над бесконечными алфавитами приводит к просто необозримым классам групп. Поэтому при переходе к рассмотрению таких автоматов необходимо накладывать ограничения на их вид. Одним из первых результатов в этом направлении была работа [8], в которой ограничения касались состояний автомата, осуществляющих нетривиальную подстановку символов алфавита, а основным результатом была теорема о том, что такие автоматы независимо от того, над конечным или бесконечным алфавитом они рассматриваются, не могут порождать свободную группу.

Отметим также работу [9], в которой вводится в рассмотрение понятие роста автоморфизма корневого дерева счетной валентности и с его помощью определяются интересные классы подгрупп группы автоморфизмов такого дерева.

В данной работе рассматриваются группы, порождаемые автоматами над счетным алфавитом, которые в каждом состоянии реализуют полный цикл на символах алфавита (ZC-автоматы). Содержание статьи следующее.

В разд. 2 мы приводим определения, касающиеся ZC-автоматов и отображений, ими определяемых, а также описываем их простейшие свойства. В разд. 3 вводится в рассмотрение группа $GA_C(Z)$ ZC-автоматных преобразований и доказывается, что она раскладывается в бесконечно итерированное сплетение бесконечных регулярных циклических групп. В разд. 4 исследуются свойства группы $GA_C(Z)$. А именно, показано, что каждая неединичная подстановка из этой группы не имеет нетривиальных циклов конечной длины, а вся группа аппроксимируется разрешимыми группами без кручения. В разд. 5 выделяются стандартные подгруппы в группе $GA_C(Z)$. К ним относятся подгруппа конечно ZC-автоматных преобразований, подгруппы ограниченных и финитарных преобразований, а также подгруппы полиномиальных и линейных преобразований. В разд. 6 изучены связи между группой линейных ZC-автоматных преобразований и группой бесконечных унитреугольных матриц над кольцом целых чисел. Охарактеризована подгруппа конечно ZC-автоматных линейных преобразований. В разд. 7 рассмотрен вопрос о том, какие группы могут быть представлены ZC-автоматными преобразованиями. Поскольку группы таких преобразований резидуально разрешимы, изоморфно представляются ZC-автоматами лишь резидуально разрешимые группы. Приводятся естественные достаточные условия существования таких представлений. В разд. 8 охарактеризован производный ряд группы ZC-автоматных преобразований. Установлено, что последовательные производные совпадают с соответствующими базовыми подгруппами бесконечно итерированного сплетения и имеют вербальную ширину, равную 1. Наконец, в разд. 9 построено континуальное семейство ZC-автоматов с двумя состояниями, каждый их которых порождает свободную полугруппу.

Все обозначения в статье либо оговорены, либо общеприняты. Для ознакомления с неопределяемыми понятиями теории групп мы отсылаем читателя к [10], а теории автоматов — к [11].

2. ZC-автоматы и порождаемые ими отображения

2.1. Пусть Z — бесконечный счетный алфавит, который будем отождествлять с множеством элементов кольца $\mathbb{Z}$ целых чисел. Как обычно, символом Z^* обозначается множество слов над алфавитом Z, символом e — пустое слово, а символом Z^ω — множество всех бесконечных вправо последовательностей (ω-слов) над Z. Длину слова $u \in Z^*$ будем обозначать через $|u|$. *Конкатенацией* слова $u = t_1 \dots t_m$ и слова (либо ω-слова) $v = z_1 \dots z_n \dots$ называется слово (соответственно ω-слово) $u \cdot v = t_1 \dots t_m z_1 \dots z_n \dots$. Относительно конкатенации множество Z^* образует свободный моноид со свободным базисом Z. Слово u называется *подсловом* слова w, если существуют такие слова $v_1, v_2 \in Z^*$, что $w = v_1 u v_2$. Если при этом $v_1 = e$, то слово u называется *префиксом* w, а если $v_2 = e$, то u называется *суффиксом* w. Понятие подслова, префикса и суффикса естественным образом определяется также для ω-слов. При этом префиксом ω-слова всегда будет некоторое слово из Z^*, а суффиксом ω-слова — некоторое ω-слово. На множестве Z^ω всех ω-слов вводится метрика $d : Z^\omega \times Z^\omega \to \mathbb{R}^+$, которую можно определить так. *Общим началом* ω-слов $u, v \in Z^\omega$, $u \neq v$, назовем их общий префикс максимальной длины. Пусть $\kappa(u,v)$ — длина общего начала слов u, v. Очевидно, что при $u \neq v$ справедливо неравенство $0 \leq \kappa(u,v) < \infty$. Зафиксируем теперь некоторое действительное число η, $0 < \eta < 1$, и определим отображение d следующим образом:

$$d(u,v) = \begin{cases} 0, & \text{если } u = v, \\ \eta^{\kappa(u,v)}, & \text{если } u \neq v, \end{cases} \quad u, v \in Z^\omega.$$

Непосредственно проверяется, что d является ультраметрикой на Z^ω (т. е. удовлетворяет усиленному неравенству треугольника). Следующие свойства метрического пространства (Z^ω, d) хорошо известны.

Лемма 1. (a) *Диаметр пространства Z^ω равен* 1*;*

(b) *пространство Z^ω вполне несвязно;*

(c) *пространство Z^ω гомеоморфно границе корневого дерева, валентность каждой вершины которого счетна.*

2.2. Напомним, что *синхронным автоматом* над алфавитом Z называется четверка данных $\mathscr{A} = \langle Z, Q, \varphi, \psi \rangle$, где Q — некоторое непустое множество, множество внутренних состояний автомата $\mathscr{A}$; $\varphi : Z \times Q \to Q$ — функция переходов автомата $\mathscr{A}$; $\psi : Z \times Q \to Z$ — функция выходов автомата $\mathscr{A}$.

Автомат $\mathscr{A}$ называется *конечным*, если множество его внутренних состояний конечно, и *бесконечным* в противном случае.

Функции φ и ψ распространяются на множество $Z^* \times Q$ согласно следующим рекуррентным соотношениям:

$$\varphi(e,q) = q, \ \varphi(uz,q) = \varphi(z, \varphi(u,q)), \quad \psi(e,q) = e, \ \psi(uz,q) = \psi(z, \varphi(u,q)),$$

где $q \in Q$, $z \in Z$ и $u \in Z^*$. По расширенной функции $\psi : Z^* \times Q \to Z^*$ для каждого $q \in Q$ определяется отображение $f_{\mathscr{A},q} : Z^* \to Z^*$ или $f_{\mathscr{A},q} : Z^\omega \to Z^\omega$ следующим образом. Для любого слова $z_1 z_2 \dots z_n \in Z^*$ положим

$$f_{\mathscr{A},q}(z_1 z_2 \dots z_n) = \psi(z_1, q)\psi(z_1 z_2, q) \dots \psi(z_1 z_2 \dots z_n, q).$$

Если же $u = z_1 z_2 \dots$ — ω-слово, то

$$f_{\mathscr{A},q}(u) = \psi(z_1, q)\psi(z_1 z_2, q) \dots .$$

Отображение $f_{\mathscr{A},q}$ называется *преобразованием множества* Z^* (или соответственно Z^ω), определяемым автоматом $\mathscr{A}$ в состоянии q. Функция выходов ψ автомата $\mathscr{A}$ определяет для каждого состояния $q \in Q$ некоторое преобразование алфавита Z, которое будем обозначать через ψ_q, т. е. $\psi_q(z) = \psi(z,q)$, $z \in Z$. Автомат $\mathscr{A}$ называется *групповым* или *подстановочным* автоматом, если для любого состояния $q \in Q$ функция ψ_q является биекцией множества Z.

Определение 1. Подстановочный автомат $\mathscr{A} = \langle Z, Q, \varphi, \psi \rangle$ называется *ZC-автоматом*, если в любом состоянии $q \in Q$ функция ψ_q является сдвигом на некоторое целое число c_q: $\psi_q(z) = z + c_q$, $z \in Z$.

Каждый ZC-автомат однозначно определяется своей диаграммой Мура, которая является вершинно и реберно помеченным ориентированным графом. Множеством ее вершин является множество Q состояний автомата, причем меткой вершины q является число c_q. Вершины q_1 и q_2 соединяются дугой, направленной от q_1 к q_2, если существует по крайней мере один элемент z алфавита Z такой, что $\varphi(z, q_1) = q_2$. Такая дуга, соединяющая q_1 и q_2, получает в качестве метки множество всех тех $z \in Z$, для которых $\varphi(z, q_1) = q_2$.

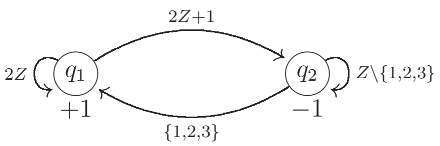

Рис. 1.

Пример ZC-автомата, заданного с помощью диаграммы Мура, приведен на рис. 1. На этом рисунке символами $2Z$ и $2Z+1$ обозначены множества всех четных и нечетных целых чисел соответственно. В состоянии q_1 автомат $\mathscr{A}$ осуществляет сдвиг $z \mapsto z+1$, а в состоянии q_2 — сдвиг $z \mapsto z-1$.

Лемма 2. *Каждое преобразование множества Z^* или Z^ω, задаваемое подстановочным автоматом, обратимо, причем обратное также задается некоторым подстановочным автоматом. Преобразование, обратное к преобразованию, заданному ZC-автоматом, также задается ZC-автоматом.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{A} = \langle Z, Q, \varphi, \psi \rangle$ — некоторый подстановочный автомат. Это означает, что для каждого состояния $q \in Q$ функция $\psi_q : Z \to Z$ обратима. Определим новый автомат $\mathscr{A}_1 = \langle Z, Q, \varphi_1, \psi_1 \rangle$ с тем же множеством внутренних состояний, функции выходов и переходов которого определяются согласно равенствам:

$$\varphi_1(z, q) = \varphi\big(\psi_q^{-1}(z), q\big), \quad \psi_1(z, q) = \psi_q^{-1}(z), \quad z \in Z,\ q \in Q.$$

Заметим, что построенный автомат будет подстановочным, а в случае, если $\mathscr{A}$ является ZC-автоматом, то и $\mathscr{A}_1$ также будет ZC-автоматом. Непосредственная проверка показывает, что для каждого $q \in Q$ обе суперпозиции $f_{\mathscr{A}_1,q}(f_{\mathscr{A},q})$ и $f_{\mathscr{A},q}(f_{\mathscr{A}_1,q})$ являются тождественными преобразованиями, откуда следуют утверждения леммы.

2.3. Преобразование $f : Z^* \to Z^*$ или $f : Z^\omega \to Z^\omega$ будем называть *автоматным преобразованием*, если существуют автомат $\mathscr{A}$ над алфавитом Z и состояние q этого автомата такие, что $f = f_{\mathscr{A},q}$. Если при этом автомат $\mathscr{A}$ конечен, то f называют *конечно автоматным преобразованием.* Как известно (см. [12]), преобразование $f : Z^* \to Z^*$ будет автоматным в том и только том случае, когда оно удовлетворяет таким двум условиям:

(а) f сохраняет длины слов, т. е. для любого слова $u \in Z^*$ имеет место равенство $|f(u)| = |u|$;

(б) f не уменьшает длину общего начала слов, т. е. для любых двух слов $u, v \in Z^*$ выполнено неравенство $\kappa(u, v) \le \kappa(f(u), f(v))$.

Символом Π_n обозначим оператор вычеркивания первых n букв в словах из Z^* или ω-словах из Z^ω. Для автоматного отображения $f : Z^* \to Z^*$ определим его состояние в слове $u \in Z^*$ как отображение $f_u : Z^* \to Z^*$, значение которого на произвольном слове $v \in Z^*$ определяется равенством

$$f_u(v) = \Pi_{|u|} f(uv).$$

Множество всех состояний автоматного отображения f обозначим через $R(f)$. Имеет место следующий критерий конечной автоматности преобразования $f : Z^* \to Z^*$, удовлетворяющего условиям (а), (б) (см. [12]).

Лемма 3. *Отображение* $f : Z^* \to Z^*$, *удовлетворяющее условиям* (а), (б), *конечно автоматно в том и только том случае, когда множество* $R(f)$ *конечно.*

Для автоматности отображения $f : Z^\omega \to Z^\omega$ необходимо и достаточно, чтобы оно не уменьшало длины общих начал ω-слов, т. е. удовлетворяло условию (б) для ω-слов. Для того чтобы задающий f автомат был конечным, необходимо и достаточно выполнение условия леммы 3 (множество состояний $R(f)$ в этом случае определяется полностью аналогично).

Рис. 2.

Состояние $\hat{q}$ называется *достижимым из состояния* q в автомате $\mathscr{A} = \langle Z, Q, \varphi, \psi \rangle$, если существует слово $u \in Z^*$ такое, что $\varphi(u, q) = \hat{q}$. Автомат, в котором каждые два состояния достижимы друг из друга, называется *сильносвязным.* Автоматы $\mathscr{A}_1 = \langle Z, Q_1, \varphi_1, \psi_1 \rangle$ и $\mathscr{A}_2 = \langle Z, Q_2, \varphi_2, \psi_2 \rangle$ называются *равносильными*, если множества отображений $\{f_{\mathscr{A}_1,q} \mid q \in Q_1\}$ и $\{f_{\mathscr{A}_2,q} \mid q \in Q_2\}$ равны. Заметим, что, как и в случае конечного алфавита, не каждый автомат над Z равносилен некоторому сильносвязному автомату. В качестве примера можно рассмотреть автомат, приведенный на рис. 2.

2.4. На множестве всех автоматов над алфавитом Z определим операцию их суперпозиции.

Определение 2. *Суперпозицией* автоматов $\mathscr{A}_1 = \langle Z, Q_1, \varphi_1, \psi_1 \rangle$ и $\mathscr{A}_2 = \langle Z, Q_2, \varphi_2, \psi_2 \rangle$ называется автомат $\mathscr{A}_1 * \mathscr{A}_2 = \langle Z, Q, \varphi, \psi \rangle$ такой, что $Q = Q_1 \times Q_2$, а его функции переходов и выходов определяются равенствами

$$\varphi(z, (q_1, q_2)) = (\varphi_1(z, q_1), \varphi_2(\psi_1(z, q_1), q_2)), \quad \psi(z, (q_1, q_2)) = \psi_2(\psi_1(z, q_1), q_2).$$

Автомат $\mathscr{A}_1 * \mathscr{A}_2$ перерабатывает слова или ω-слова посимвольно так, что вначале символ алфавита Z перерабатывается автоматом $\mathscr{A}_1$, а затем полученный символ — автоматом $\mathscr{A}_2$.

Лемма 4. *Суперпозиция* (*конечных*) ZC*-автоматов является* (*конечным*) ZC*-автоматом.*

Доказательство следует из того, что суперпозиция сдвигов над Z снова будет сдвигом.

Основной интерес операция суперпозиции автоматов представляет в связи со следующим хорошо известным утверждением.

Лемма 5. *Предположим, что автоматы* $\mathscr{A}_1 = \langle Z, Q_1, \varphi_1, \psi_1 \rangle$ *и* $\mathscr{A}_2 = \langle Z, Q_2, \varphi_2, \psi_2 \rangle$ *в состояниях* $q_1 \in Q_1$ *и* $q_2 \in Q_2$ *определяют функции* $f_{\mathscr{A}_1,q_1}$ *и* $f_{\mathscr{A}_2,q_2}$. *Тогда их суперпозиция* $\mathscr{A}_1 * \mathscr{A}_2$ *в состоянии* (q_1, q_2) *определяет функцию* $f_{\mathscr{A}_1 * \mathscr{A}_2,(q_1,q_2)}$, *являющуюся суперпозицией* $f_{\mathscr{A}_2,q_2}(f_{\mathscr{A}_1,q_1})$.

Из лемм 4 и 5 как следствие получается

Лемма 6. *Множество преобразований, определяемых* (*конечными*) ZC*-автоматами, замкнуто относительно операции суперпозиции.*

3. Группа ZC-автоматных преобразований

Из лемм 2, 6 следует, что множество всех ZC-автоматных преобразований на Z^* или Z^ω образует группу. Как абстрактные группы группа ZC-автоматных преобразований множества Z^* и группа ZC-автоматных преобразований множества Z^ω изоморфны между собой. Будем обозначать так определяемую абстрактную группу через $GA_C(Z)$.

Далее образ элемента $x \in X$ под действием подстановки g на множестве X будем обозначать через x^g, т. е. будем придерживаться правосторонней записи действия подстановки на элемент и в произведении g_1g_2 первым действует элемент g_1.

Группа $GA_C(Z)$ может быть получена из бесконечных циклических групп с помощью конструкции бесконечно итерированного сплетения групп подстановок, которая определяется следующим образом (см. [13]).

Определение 3. *Сплетением* по конечной или бесконечной последовательности групп подстановок (G_1, X_1), $(G_2, X_2), \dots$ называется группа всевозможных преобразований g декартова произведения $X = \prod_{i\geq 1} X_i$, которые для каждого $i \geq 1$ удовлетворяют таким двум условиям:

1) i-я координата y_i образа $(x_1, x_2, \dots)^g = (y_1, y_2, \dots)$ зависит только от первых i координат элемента $(x_1, x_2, \dots) \in X$;

2) если зафиксировать первые $i-1$ координат $x_1^0, x_2^0, \dots, x_{i-1}^0$, то преобразование g_i множества X_i, определяемое равенством

$$\big(x_1^0, x_2^0, \dots, x_{i-1}^0, x_i, \dots\big)^g = \big(y_1^0, y_2^0, \dots, y_{i-1}^0, x_i^{g_i}, \dots\big),$$

принадлежит группе G_i.

Сплетение по конечной последовательности групп подстановок (G_1, X_1), $\dots, (G_n, X_n)$ будем обозначать символом $\mathop{\wr}\limits_{i=1}^{n} G_i$, а сплетение по бесконечной последовательности $(G_1, X_1), (G_2, X_2), \dots$ — символом $\mathop{\wr}\limits_{i=1}^{\infty} G_i$.

Сплетение $\mathop{\wr}\limits_{i=1}^{\infty} G_i$ действует точно как на множестве $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$, так и на множестве $\bigcup_{i=1}^{\infty} X_1 \times \dots \times X_i$. Эти два действия имеют совершенно различные подстановочные свойства. Например, группа подстановок $\left(\mathop{\wr}\limits_{i=1}^{\infty} G_i, \prod_{i=1}^{\infty} X_i\right)$ транзитивна тогда и только тогда, когда все группы подстановок $(G_1, X_1), (G_2, X_2), \dots$ транзитивны, в то время, как группа подстановок $\left(\mathop{\wr}\limits_{i=1}^{\infty} G_i, \bigcup_{i=1}^{\infty} X_1 \times \dots \times X_i\right)$ всегда интранзитивна, так как подмножества $\prod_{i=1}^{k} X_i$, $k \geq 1$, основного множества в этом случае будут инвариантны.

Из условий 1 и 2 определения сплетения следует, что любое преобразование $g \in \mathop{\wr}\limits_{i=1}^{\infty} G_i$ определяет бесконечную последовательность $g_1, g_2, \dots,$ где

$g_1 \in G_1, g_i : X_1 \times \dots \times X_{i-1} \to G_i$ $(i \geq 2)$. Обратно, каждая такая последовательность определяет преобразование декартова произведения $\prod\limits_{i=1}^{\infty} X_i$, удовлетворяющее условиям 1 и 2. А именно, последовательности такого вида можно охарактеризовать бесконечными кортежами, которые, следуя пионерским работам Л. А. Калужнина [14, 15], называют также таблицами:

$$g = [g_1, g_2(x_1), g_3(x_1, x_2), \dots], \tag{1}$$

где $g_1 \in G_1, g_i : X_1 \times \dots \times X_{i-1} \to G_i$ $(i \geq 2)$. Таблица (1) действует на последовательность $u = (t_1, t_2, \dots) \in \prod\limits_{i=1}^{\infty} X_i$ согласно правилу

$$u^g = \left(t_1^{g_1}, t_2^{g_2(t_1)}, t_3^{g_3(t_1,t_2)}\right). \tag{2}$$

Пусть $Z^{(i)}$, $i \in \mathbb{N}$, — копия алфавита Z. Счетную декартову степень $\prod\limits_{i=1}^{\infty} Z^{(i)} = Z^{\infty}$ алфавита Z естественным образом отождествим с множеством Z^{ω} всех ω-слов над Z. Тогда сплетение $\mathop{\wr}\limits_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}^{(i)}$ регулярных бесконечных циклических групп $\mathbb{Z}^{(i)}$, $i \in \mathbb{N}$, действует на множестве Z^{ω} согласно равенству (2).

Теорема 1. *Группа ZC-автоматных преобразований $GA_C(Z)$ совпадает со сплетением по бесконечной последовательности регулярных бесконечных циклических групп:*

$$GA_C(Z) = \mathop{\wr}\limits_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}^{(i)}.$$

Доказательство. Каждое ZC-автоматное преобразование сохраняет длины общих начал ω-слов из Z^{ω}. Это означает, что каждое такое преобразование удовлетворяет условию 1 из определения сплетения.

Если фиксировать первые $i-1$ символов ω-слова $u = z_1^0 \dots z_{i-1}^0 z_i \dots$, то i-й символ образа u^g под действием ZC-автоматного преобразования g преобразуется согласно правилу $z_i \mapsto z_i + c_{q_i}$, где q_i — состояние, в которое переходит задающий g автомат под действием входного слова $z_1^0 \dots z_{i-1}^0$, а c_{q_i} — целое число, сдвиг на которое реализуется в этом состоянии. Таким образом, при фиксированных первых $i-1$ символах ω-слов преобразование g индуцирует на i-х символах регулярную циклическую подстановку. Согласно второй части определения сплетения отсюда получаем, что g содержится в $\mathop{\wr}\limits_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}^{(i)}$.

С другой стороны, каждый элемент сплетения $\mathop{\wr}\limits_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}^{(i)}$, действуя на ω-словах, сохраняет длины их общих начал, т. е. определяет на Z^{ω} биективное автоматное преобразование. Рассматривая его посимвольное действие на ω-словах получаем, что оно может быть задано некоторым ZC-автоматом. Отсюда следует требуемое равенство.

4. Свойства группы $GA_C(Z)$

Предложение 1. *Группа $GA_C(Z)$ действует на множестве Z^ω транзитивно и импримитивно, а на множестве Z^* ее действие интранзитивно.*

Доказательство. Группа $GA_C(Z)$ содержит подгруппу сдвигов — преобразований, определяемых таблицами вида $[c_1, c_2, \dots]$, $c_i \in \mathbb{Z}$, $i \geq 1$, которая изоморфна счетной декартовой степени группы $\mathbb{Z}$. Поскольку эта подгруппа действует на Z^ω регулярно, действие $GA_C(Z)$ на Z^ω транзитивно.

Стабилизатор точки $(0, 0, \dots)$ в группе $GA_C(Z)$ состоит из таблиц вида (1), для которых выполнены условия

$$g_1 = 0, \quad g_i(0, \dots, 0) = 0 \text{ при } i \geq 2.$$

Эта подгруппа очевидным образом не максимальна в $GA_C(Z)$, поскольку для каждого $k \geq 1$ она содержится как собственная подгруппа в подгруппе $GA_C(Z)$, состоящей из тех таблиц вида (1), в которых первые k координат удовлетворяют вышеприведенному условию, а остальные произвольны. Это означает, что существует бесконечно много различных разбиений множества Z^ω на блоки импримитивности группы $GA_C(Z)$.

На множестве Z^* группа $GA_C(Z)$ действует интранзитивно, поскольку преобразования из этой группы не изменяют длины слов. Подмножества Z^n слов длины n ($n \geq 1$) являются областями интранзитивности группы подстановок $(GA_C(Z), Z^*)$.

Определение 4. Группу подстановок назовем *IC-группой*, если каждая неединичная подстановка из этой группы не имеет конечных циклов длины, большей 1.

Понятно, что IC-группа является группой без кручения, однако не каждая группа подстановок без кручения будет IC-группой.

Теорема 2. *Группа подстановок $(GA_C(Z), Z^\omega)$ является IC-группой.*

Доказательство. Предположим, что таблица $u = [g_1, g_2(x), \dots] \in GA_C(Z)$ неединична, и пусть $\bar{t} = t_1 t_2 \cdots \in Z^\omega$ — ω-слово такое, что $\bar{t}^u \neq \bar{t}$. Выберем наименьшее число n такое, что $\bar{t}^u$ и $\bar{t}$ отличаются n-й позицией. Это означает, что

$$g_1 = g_2(t_1) = \cdots = g_{n-1}(t_1, \dots, t_{n-2}) = 0, \text{ а } g_n(t_1, \dots, t_{n-1}) = c \neq 0.$$

Тогда при любом натуральном m таблица u^m не изменяет первые $n-1$ позиций в ω-слове $\bar{t}$, а n-я позиция в слове $\bar{t}^{u^m}$ будет равняться $t_n + mc$. Поскольку $c \neq 0$, отсюда сразу получаем, что $\bar{t}^{u^m} \neq \bar{t}$. Теорема доказана.

Определение 5. *Глубиной* неединичной таблицы u из группы $GA_C(Z)$ назовем наименьшее целое число k такое, что $(k+1)$-я координата u не является тождественно равной 0 функцией, а все ее предыдущие координаты тождественно равны 0. Глубину единичной таблицы будем считать равной бесконечности.

Глубину таблицы u будем обозначать символом $\mathrm{dp}(u)$. Имеет место следующая

Лемма 7. *Для произвольных таблиц $u, v \in GA_C(Z)$ имеют место следующие соотношения:*

1) $\mathrm{dp}(uv) \geq \min\{\mathrm{dp}(u), \mathrm{dp}(v)\}$, *причем если* $\mathrm{dp}(u) \neq \mathrm{dp}(v)$, *то достигается равенство;*

2) $\mathrm{dp}(u^{-1}vu) = \mathrm{dp}(v)$;

3) *если* $\mathrm{dp}(u) = \mathrm{dp}(v) = n$, *то глубина коммутатора* $[u, v] = u^{-1}v^{-1}uv$ *не меньше, чем* $n + 1$.

Доказательство этой леммы — простая проверка, мы его опускаем.

Определение 6. *Стабилизатором* k-го уровня в группе $GA_C(Z)$ назовем поточечный стабилизатор подмножества Z^k всех слов длины k при действии $GA_C(Z)$ на Z^*, $k \geq 0$.

Будем обозначать стабилизатор k-го уровня в группе $GA_C(Z)$ символом $GA_C^{[k]}(Z)$. Несложно видеть, что подгруппа $GA_C^{[k]}(Z)$ состоит из всех тех таблиц, глубина которых не меньше k.

Лемма 8. *Для каждого* $k \geq 0$

1) *подгруппа* $GA_C^{[k]}(Z)$ *нормальна в* $GA_C(Z)$;

2) *фактор-группа* $GA_C(Z)/GA_C^{[k]}(Z)$ *является разрешимой группой без кручения длины* k;

3) *фактор-группа* $GA_C^{[k]}(Z)/GA_C^{[k+1]}(Z)$ *ряда стабилизаторов является свободной абелевой группой счетного ранга.*

Доказательство. П. 1 леммы следует из соотношения 2 леммы 7, п. 2 — из соотношения 3 леммы 7 и теоремы 2, а п. 3 — из теоремы 2.

Подгруппу всех преобразований, действующих тривиально на словах длины $> k$, обозначим через ${}^{[k]}GA_C(Z)$, $k \geq 0$. Понятно, что при любом $k \geq 0$ подгруппы ${}^{[k]}GA_C(Z)$ и $GA_C^{[k]}(Z)$ имеют тривиальное пересечение, а следовательно, группа $GA_C(Z)$ раскладывается в полупрямое произведение этих подгрупп:

$$GA_C(Z) =^{[k]} GA_C(Z) \ltimes GA_C^{[k]}(Z).$$

Теорема 3. *Группа* $GA_C(Z)$ *аппроксимируется разрешимыми группами без кручения.*

Доказательство. Из леммы 8 следует, что при любом $l \geq 0$ l-й коммутант $GA_C(Z)^{(l)}$ группы $GA_C(Z)$ содержится в стабилизаторе l-го уровня $GA_C^{[l]}(Z)$ этой группы. Отсюда получаем, что ряд коммутантов

$$GA_C(Z) > GA_C(Z)^{(1)} > GA_C(Z)^{(2)} > \dots$$

имеет тривиальное пересечение. Следовательно, группа $GA_C(Z)$ аппроксимируется разрешимыми группами. Из п. 2 леммы 8 следует, что аппроксимирующий класс групп может содержать только разрешимые группы без кручения.

5. Стандартные подгруппы

Целью этого раздела является определение подгрупп группы $GA_C(Z)$, которые играют особую роль в исследованиях, связанных с этой группой, и которые мы называем *стандартными.* К стандартным отнесем следующие подгруппы.

5.1. Группа конечно ZC-автоматных преобразований. Если преобразования f_1, f_2 множества Z^ω определяются конечными ZC-автоматами, то их суперпозиция и обратные к ним также задаются конечными ZC-автоматами. Поэтому все конечно ZC-автоматные преобразования образуют подгруппу в $GA_C(Z)$, которую будем обозначать символом $FGA_C(Z)$. В терминах таблиц она может быть охарактеризована следующим образом. Для любой таблицы

$u = [g_1, g_2(x), \dots] \in GA_C(Z)$ и слова $t = z_1 \dots z_s \in Z^*$ осуществим подстановку t в u. Получим последовательность вида

$$[g_1, g_2(z_1), \dots, g_{s+1}(z_1, \dots, z_s), g_{s+2}(z_1, \dots, z_s, x_{s+1}), \dots].$$

Отбрасывая первые s членов этой последовательности и меняя наименования переменных, строим новую таблицу $u_t = [h_1, h_2(x_1), \dots]$, $h_1 = g_{s+1}(z_1, \dots, z_s)$, $h_k(x_1, \dots, x_{k-1}) = g_{s+k}(z_1, \dots, z_s, x_1, \dots, x_{k-1})$ $(k \geq 2)$. Таблицу u_t назовем *t-остатком* таблицы u, а множество всех остатков u обозначим символом $R(u)$: $R(u) = \{u_t \mid t \in Z^*\}$.

Лемма 9. *Таблица u определяет конечно автоматное преобразование множества Z^ω тогда и только тогда, когда множество $R(u)$ конечно.*

Доказательство. Множество остатков таблицы и множество состояний определяемого этой таблицей автоматного отображения находятся во взаимно однозначном соответствии. Отсюда, учитывая лемму 3, получаем требуемое утверждение.

Обозначим символом Δ оператор вычеркивания первого члена последовательности (или первой буквы слова или ω-слова), т. е. если $t = (t_1, t_2, t_3, \dots)$, то $\Delta t = (t_2, t_3, \dots)$. Применяя Δ повторно k раз подряд $(k \geq 0)$, получаем последовательность $\Delta^k t = (t_{k+1}, t_{k+2}, \dots)$.

Напомним что последовательность $t = (t_1, t_2, t_3, \dots)$ (или ω-слово $t_1 t_2 t_3 \dots$) называется *остаточно периодической*, если существуют неотрицательное целое число m и натуральное число n такие, что для всех $k > m$ имеет место равенство $t_{n+k} = t_k$. Это равносильно выполнению равенства $\Delta^m t = \Delta^{m+n} t$. Число m называется *предпериодом*, а n — *периодом* остаточно периодической последовательности t. Пара чисел (m, n) определяется последовательностью t неоднозначно. Среди всех таких пар выделяется пара (m_0, n_0), где m_0 — наименьшее возможное число, для которого последовательность $\Delta^{m_0} t$ периодическая, а n_0 — минимальный период этой последовательности.

Лемма 10. *Множество остаточно периодических ω-слов инвариантно относительно действия группы конечно ZC-автоматных преобразований.*

Доказательство. Пусть $\bar{t} = t_1 t_2 \dots$ — некоторое остаточно периодическое ω-слово, A — конечный ZC-автомат, определяющий в своем состоянии q_1 преобразование $f \in FGA_C(Z)$. Для любого $i \geq 1$ обозначим символом q_{i+1} то состояние автомата A, в которое он переходит из состояния q_1 по слову $t_1 \dots t_i$. Тогда последовательность состояний $q_1, q_2, \dots$ будет остаточно периодической. Это означает, что ω-слово u^f является результатом применения к ω-слову u остаточно периодической последовательности сдвигов, т. е. оно само остаточно периодическое. Лемма доказана.

5.2. Группа ограниченных ZC-автоматных преобразований. Напомним, что *носителем функции* f, определенной на множестве X, со значениями в группе G, называется подмножество тех элементов из X, на которых значение f отлично от единичного элемента G. Таблицу

$$[g_1, g_2(x), \dots] \in \wr_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}^{(i)}$$

назовем *ограниченной*, если все функции $g_i(x_1, \dots, x_{i-1})$, $i \geq 2$, имеют конечный носитель. Множество всех ограниченных таблиц из $\wr_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}^{(i)}$ образует подгруппу, которая называется *ограниченным сплетением* последовательности бесконечных циклических групп. Будем обозначать эту группу, рассматриваемую как подгруппу в $GA_C(Z)$, символом $BGA_C(Z)$.

5.3. Группа финитарных ZC-автоматных преобразований. Преобразование множества Z^* или Z^ω назовем *финитарным*, если существует число $k \geq 0$ такое, что в каждом слове или ω-слове это преобразование не изменяет тех символов, которые находятся на позициях с номерами, большими k. Преобразование будет финитарным в том и только том случае, когда оно определяется таблицей вида $[g_1, g_2(x), \ldots, g_k(x_1, \ldots, x_{k-1}), 0, 0, \ldots]$ при некотором натуральном k. Все финитарные ZC-автоматные преобразования образуют в группе $GA_C(Z)$ подгруппу, которую мы будем обозначать символом $GA_C^f(Z)$. При любом натуральном k ограничение действия группы $GA_C^f(Z)$ на множество Z^k всех слов длины k задает группу подстановок, которая изоморфна k-итерированному сплетению $\mathop{\wr}\limits_{i=1}^{k} \mathbb{Z}^{(i)}$ регулярных бесконечных циклических групп. Но k-итерированное сплетение $\mathop{\wr}\limits_{i=1}^{k} \mathbb{Z}^{(i)}$ естественным образом изоморфно погружается в $(k+1)$-итерированное сплетение $\mathop{\wr}\limits_{i=1}^{k+1} \mathbb{Z}^{(i)}$ приписыванием ко всем таблицам $(k+1)$-й координаты, тождественно равной 0. Обозначая это вложение символом φ_k, получаем прямой спектр групп

$$\left\langle \mathop{\wr}\limits_{i=1}^{k} \mathbb{Z}^{(i)}, \varphi_k \right\rangle, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Имеет место следующий очевидный результат.

Лемма 11. *Группа финитарных ZC-автоматных преобразований $GA_C^f(Z)$ изоморфна предельной группе прямого спектра $\left\langle \mathop{\wr}\limits_{i=1}^{k} \mathbb{Z}^{(i)}, \varphi_k \right\rangle$, $k \in \mathbb{N}$:*

$$GA_C^f(Z) \simeq \varinjlim_k \left\langle \mathop{\wr}\limits_{i=1}^{k} \mathbb{Z}^{(i)}, \varphi_k \right\rangle.$$

5.4. Группа полиномиальных ZC-автоматных преобразований. Преобразование множества Z^* или Z^ω, определяемое таблицей из $GA_C(Z)$, назовем *полиномиальным*, если все координаты этой таблицы являются полиномами над кольцом целых чисел от соответствующего числа переменных. Такую таблицу также будем называть *полиномиальной*. Произведение полиномиальных преобразований и обратное к полиномиальному преобразованию также будут полиномиальными, т. е. все полиномиальные преобразования образуют подгруппу в $GA_C(Z)$. Обозначим группу полиномиальных преобразований символом $PGA_C(Z)$.

5.5. Группа линейных ZC-автоматных преобразований. Таблицу из $PGA_C(Z)$ назовем *линейной*, если все ее координаты являются линейными многочленами, т. е. не содержат одночленов степени ≥ 2. Ясно, что произведение линейных таблиц и обратная к линейной таблице будут линейными, т. е.

все линейные таблицы образуют группу. Будем называть ее *группой линейных ZC-автоматных преобразований* и обозначать через $LGA_C(Z)$.

6. Бесконечные унитреугольные матрицы над $\mathbb{Z}$

Группа $LGA_C(Z)$ может быть охарактеризована также следующим образом. Пусть $UT_\infty(\mathbb{Z})$ — бесконечномерная унитреугольная матричная группа над кольцом $\mathbb{Z}$, $\operatorname{Aff} UT_\infty(\mathbb{Z}) = UT_\infty(\mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{Z}^\infty$ — соответствующая аффинная группа. Группа $\operatorname{Aff} UT_\infty(\mathbb{Z})$ действует на $\mathbb{Z}$-модуле $\mathbb{Z}^\infty$ согласно правилу

$$x^{(A,b)} = xA + b, \quad x, b \in \mathbb{Z}^\infty,\ A \in UT_\infty(\mathbb{Z}).$$

Заметим, что произведение целочисленной последовательности на унитреугольную матрицу в этом случае определено корректно.

Теорема 4. *Группы подстановок* $(LGA_C(Z), Z^\omega)$ *и* $(\operatorname{Aff} UT_\infty(\mathbb{Z}), \mathbb{Z}^\infty)$ *изоморфны.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную таблицу

$$u = [a_{11}, a_{21}x_1 + a_{22}, a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}, \dots] \tag{3}$$

из группы $LGA_C(Z)$. По этой таблице определим бесконечную унитреугольную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_{21} & a_{31} & a_{41} & \dots \\ 0 & 1 & a_{32} & a_{42} & \dots \\ 0 & 0 & 1 & a_{43} & \dots \\ . & . & . & . & \dots \end{pmatrix},$$

k-й столбец которой над главной диагональю является столбцом коэффициентов линейной формы $a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kk-1}x_{k-1}$, т. е. вектор-столбцом $(a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kk-1})^t$, $k \geq 2$, и последовательность $b = (a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots)$. Легко видеть, что таким образом определяется изоморфизм групп $LGA_C(Z)$ и $\operatorname{Aff} UT_\infty(\mathbb{Z})$. Преобразование модуля $\mathbb{Z}^\infty$, задаваемое полученной парой (A, b), действует на произвольную последовательность $x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in \mathbb{Z}^\infty$ таким образом, что k-я координата образа $x^{(A,b)}$ определяется равенством

$$(x_1, \dots, x_k)(a_{k1}, \dots, a_{kk-1}, 1)^t + a_{kk}, \quad k \geq 1.$$

Под действием таблицы u ω-слово $\bar{x} = x_1x_2x_3\cdots \in \mathbb{Z}^\omega$ переходит в ω-слово, k-я позиция в котором определяется тем же равенством. Следовательно, имеем равенство $x^{(A,b)} = \bar{x}^u$, откуда следует требуемое утверждение.

Таким образом, группу линейных ZC-автоматных преобразований можем рассматривать как группу аффинных унитреугольных преобразований.

В некоторых случаях удобно рассматривать группу $LGA_C(Z)$ как группу $UT_\infty(\mathbb{Z})$. Соответствующий изоморфизм группы $\operatorname{Aff} UT_\infty(\mathbb{Z})$ в группу $UT_\infty(\mathbb{Z})$ задается правилом $(A, b) \mapsto \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & A \end{pmatrix}$, где $(A, b) \in \operatorname{Aff} UT_\infty(\mathbb{Z})$, $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & A \end{pmatrix} \in UT_\infty(\mathbb{Z})$.

Охарактеризуем условия, при которых преобразование $\mathbb{Z}^\infty$, содержащееся в $LGA_C(Z)$, конечно автоматно, т. е. принадлежит группе $FGA_C(Z)$.

Теорема 5. *Пара* (A, b), $A \in UT_\infty(\mathbb{Z})$, $b \in \mathbb{Z}^\infty$, *определяет преобразование множества* Z^∞, *содержащееся в* $FGA_C(Z)$, *в том и только том случае, когда* *матрица A является единичной, а последовательность b — остаточно периодической.*

Доказательство. Пусть $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \ldots$ — последовательность строк матрицы A. Остаток таблицы u, определяемой парой (A, b), на слове $a_1 \ldots a_k \in Z^k$, определяется такой парой (A', b'), что матрица A' получается из матрицы A вычеркиванием первых k строк и столбцов, а последовательность b' удовлетворяет равенству

$$b' = \Delta^k \left(b + \sum_{i=1}^{k} a_i \bar{a}_i \right).$$

Если матрица A единичная, то и A' будет единичной, а последовательность b' будет равняться $\Delta^k b$. Ввиду остаточной периодичности b получим, что множество $\{\Delta^k b : k \geq 1\}$ конечно, а следовательно, по лемме 9 определяемое парой (A, b) преобразование конечно автоматно. Таким образом, приведенное в теореме условие является достаточным.

Предположим теперь, что аффинное преобразование, определяемое парой (A, b), содержится в группе $FGA_C(Z)$. Тогда согласно лемме 10 оно переводит каждую остаточно периодическую последовательность в остаточно периодическую. Отсюда получаем, что последовательность b как образ нулевой последовательности остаточно периодическая. Предположим, что матрица A неединична, т. е. содержит ненулевой элемент a_{ij} для некоторых натуральных i, j, $i < j$. Тогда согласно приведенному правилу вычисления остатков любые два различных слова длины i, в которых все позиции, кроме i-й, нулевые, определяют различные остатки. Поскольку таких слов бесконечное множество, то и остатков получим бесконечно много, что противоречит лемме 9. Полученное противоречие означает, что матрица A единична, т. е. имеет место необходимость условия теоремы.

Таким образом, группа всех конечно ZC-автоматных линейных преобразований является свободной абелевой группой счетного ранга.

7. Представление резидуально разрешимых групп ZC-автоматными преобразованиями

Пусть G — группа с фиксированным строго убывающим рядом подгрупп

$$G = G_0 > G_1 > G_2 > \ldots . \tag{4}$$

Разложим подгруппу G_{k-1} на левые классы смежности по подгруппе G_k и зафиксируем некоторую систему представителей X_k классов этого разложения, $k \geq 1$. Тогда каждый левый класс смежности группы G по подгруппе G_k имеет вид $x_1 \ldots x_k G_k$ для некоторых $x_i \in X_i$, $1 \leq i \leq k$, причем такое представление однозначно. Поэтому множество левых классов смежности G по G_i можно отождествить с множеством конечных последовательностей вида $x_1 \ldots x_k$, $x_i \in X_i$, $1 \leq i \leq k$. Предположим теперь, что ряд (4) имеет тривиальное пересечение, т. е.

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} G_k = \{e\}. \tag{5}$$

Тогда любой элемент g группы G может быть отождествлен с бесконечной последовательностью вида $x_1 x_2 \ldots$, $x_i \in X_i$ $(i \geq 1)$ такой, что $g \in x_1 \ldots x_k G_k$ при всех $k \geq 1$. При этом выполнены условия: $x_1 \ldots x_k G_k \supset x_1 \ldots x_k x_{k+1} G_{k+1}$ при

$k \geq 1$ и $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} x_1 \dots x_k G_k = \{g\}$. Группа G действует левыми сдвигами на множестве классов смежности по подгруппе G_k для любого $k \in \mathbb{N}$. При этом для любого $g \in G$ из включения $x_1 \dots x_k G_k \supset x_1 \dots x_k x_{k+1} G_{k+1}$ следует включение $g^{-1} x_1 \dots x_k G_k \supset g^{-1} x_1 \dots x_k x_{k+1} G_{k+1}$ для всех $x_i \in X_i$, $1 \leq i \leq k+1$. Поэтому такое действие G на множествах классов смежности однозначно определяет ее действие на множестве бесконечных последовательностей вида $x_1 x_2 \dots$, $x_i \in X_i$ $(i \geq 1)$, т. е. на декартовом произведении $\prod\limits_{i=1}^{\infty} X_i$, причем это действие точное (см. [16]). Это действие группы G на декартовом произведении $\prod\limits_{i=1}^{\infty} X_i$ назовем *действием, ассоциированным с рядом* (4).

Теорема 6. *Пусть G — произвольная группа, обладающая субнормальным рядом* (4) *таким, что*

1) *фактор-группа G_{k-1}/G_k бесконечная циклическая для всех $k \in \mathbb{N}$;*

2) $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} G_k = \{e\}$.

Тогда группа G изоморфно погружается в группу $GA_C(Z)$.

Доказательство. Рассмотрим действие группы G, ассоциированное с субнормальным рядом (4), удовлетворяющим условиям теоремы. Согласно определению в данном случае это действие можно рассматривать как точное действие группы G на множестве Z^{ω}, т. е. изоморфный образ группы G является группой преобразований множества Z^{ω}. Достаточно убедиться, что этот образ содержится в $(GA_C(Z), Z^{\omega})$. Преобразование g множества Z^{ω} согласно определению сплетения содержится в группе $GA_C(Z)$, действующей на Z^{ω}, в том и только том случае, если оно удовлетворяет следующим условиям:

(i) если ω-слова $\bar{x} = x_1 x_2 \dots$, $\bar{y} = y_1 y_2 \dots \in Z^{\omega}$ имеют общий префикс длины k, т. е. $x_1 = y_1, \dots, x_k = y_k$, $x_{k+1} \neq y_{k+1}$, то их образы $\bar{x}^g, \bar{y}^g$ также имеют общий префикс длины k;

(ii) при фиксированных k первых символах ω-слова $\bar{x}$ преобразование g определяет подстановку на множестве $(k+1)$-х символов этих ω-слов, т. е. на символах алфавита Z, которая является сдвигом на некоторое целое число.

Пусть $g \in G$. Образ ω-слова $x_1 x_2 \dots \in Z^{\omega}$, соответствующего последовательности вложенных смежных классов $x_1 G_1 \supset x_1 x_2 G_2 \supset \dots$, под действием g вычисляется путем нахождения образа каждого его префикса $x_1 \dots x_k$, т. е. образа соответствующего смежного класса $x_1 \dots x_k G_k$ при левом сдвиге на g^{-1}, $k \geq 1$. Последовательно получаем $g^{-1}(x_1 G_1) = y_1 G_1$ и $g^{-1} x_1 = y_1 g_1^{-1}$ для некоторых $y_1 \in Z$ и $g_1 \in G_1$, $g^{-1}(x_1 x_2 G_2) = y_1 \big(g_1^{-1} x_2 G_2\big) = y_1 y_2 G_2$, и $g_1^{-1} x_2 = y_2 g_2^{-1}$ для некоторых $y_2 \in Z$ и $g_2 \in G_2$, и т. д. Так полученное ω-слово $y_1 y_2 \dots$ и будет образом ω-слова $x_1 x_2 \dots$. Отсюда сразу получаем выполнение первого из требуемых двух условий. Второе следует из того, что каждая позиция в образе при фиксированных предыдущих определяется элементом бесконечной циклической группы при ее регулярном действии на себе, т. е. применением некоторого целочисленного сдвига. Теорема доказана.

Замечание 1. Если ряд (4) конечен, т. е. имеет вид

$$G = G_0 > G_1 > \dots > G_{s-1} > G_s = \{e\},$$

то представление, ассоциированное с этим рядом, совпадает с левым регулярным представлением группы G. В этом случае вложение группы G в сплетение

$\mathbb{Z} \wr \dots \wr \mathbb{Z}$ (s раз) бесконечных циклических групп, определяемое теоремой 6, совпадает с известным вложением Краснера — Калужнина [17].

Замечание 2. То, что группа G обладает субнормальным рядом с бесконечными циклическими факторами и тривиальным пересечением, еще не означает, что она изоморфно погружается в группу $FGA_C(Z)$. В общем случае описанное представление группы G, удовлетворяющей условиям теоремы 6, не является конечно автоматным. Построение конечно автоматных представлений является гораздо более трудной задачей, как это следует из рассмотрений конечно автоматных групп преобразований над конечными алфавитами.

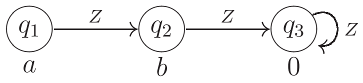

Рис. 3.

Пример. Рассмотрим свободную абелеву группу $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Каждый ряд подгрупп этой группы с бесконечными факторами имеет длину 2. Можно считать, что это ряд $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} > \{0\} \times \mathbb{Z} > \{0\}$. Представление, ассоциированное с этим рядом, регулярно. Действие произвольного элемента $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ на Z^ω можно задать при помощи автомата, изображенного на рис. 3.

8. Ряд коммутантов группы $GA_C(Z)$

Для любой таблицы $u = [g_1, g_2(x_1), g_3(x_1, x_2), \dots]$ из $GA_C(Z)$ символом $(u)_k$ будем обозначать ее k-ю координату, т. е.

$$(u)_k = g_k(x_1, \dots, x_{k-1}) = g_k(\bar{x}_{k-1}).$$

Для таблицы $v = [h_1, h_2(x_1), h_3(x_1, x_2), \dots]$ получаем

$$(u \cdot v)_k = g_k(\bar{x}_{k-1}) \cdot h_k\bigl(\bar{x}_{k-1}^{(u)_{k-1}}\bigr), \tag{6}$$

где $\bar{x}_{k-1}^{(u)_{k-1}} = (x_1 + g_1, x_2 + g_2(x_1), \dots, x_{k-1} + g_{k-1}(\bar{x}_{k-2}))$. Кроме того, в этих обозначениях для k-й координаты таблицы u^{-1} имеет место равенство

$$(u^{-1})_k = -g_k\bigl(\bar{x}_{k-1}^{(u^{-1})_{k-1}}\bigr). \tag{7}$$

Пусть $[u, v] = u^{-1}v^{-1}uv$ — коммутатор таблиц u, v. Координаты коммутатора находятся по следующей формуле.

Лемма 12. *Для любого $k > 1$ имеет место равенство*

$$\begin{aligned}([u, v])_k = -g_k\bigl(\bar{x}_{k-1}^{(u^{-1})_{k-1}}\bigr) - h_k\bigl(\bar{x}_{k-1}^{(v^{-1})_{k-1}(u^{-1})_{k-1}}\bigr)\\ + g_k\bigl(\bar{x}_{k-1}^{(u^{-1})_{k-1}(v^{-1})_{k-1}}\bigr) + h_k\bigl(\bar{x}_{k-1}^{(u^{-1})_{k-1}(v^{-1})_{k-1}(u)_{k-1}}\bigr).\end{aligned}$$

Доказательство непосредственно следует из равенств (6) и (7).

Лемма 13. *Коммутант сплетения $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$ имеет ширину 1 и совпадает с базой этого сплетения.*

Доказательство. Пусть $u, v \in \mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$, $u = [a_1, a_2(x)]$, $v = [b_1, b_2(x)]$. Тогда

$$[u, v] = [0, -a_2(x - a_1) - b_2(x - a_1 - b_1) + a_2(x - a_1 - b_1) + b_2(x - b_1)].$$

В частности, если $u = [1, 0]$, $v = [0, b(x)]$, то $[u, v] = [0, b(x) - b(x - 1)]$. Пусть $[0, c(x)]$ — произвольный элемент базы, $c(i) = c_i$, $i \in \mathbb{Z}$. Определим функцию $b(x)$ так, чтобы выполнялись условия $b(i) - b(i - 1) = c_i$, $i \in \mathbb{Z}$. Для этого положим

$$b(0) = 0, \quad b(i) = \sum_{j=1}^{i} c_j \text{ при } i > 0 \text{ и } b(i) = -\sum_{j=i+1}^{0} c_j \text{ при } i < 0.$$

Из этих равенств следует, что для так построенной функция $b(x)$ выполнено равенство $[0, c(x)] = [[1, 0], [0, b(x)]]$, откуда следуют требуемые утверждения.

Лемма 14. *Пусть $k \geq 2$ — натуральное число и $u = [g_1, g_2(x_1), \dots, g_k(\bar{x}_{k-1})]$ — элемент сплетения $\wr_{i=1}^{k} \mathbb{Z}^{(i)}$, действующий на множестве $\mathbb{Z}^k$ без неподвижных точек. Тогда для любой функции $h : \mathbb{Z}^k \to \mathbb{Z}$ уравнение*

$$f(\bar{x}_k) - f\big(\bar{x}_k^{u^{-1}}\big) = h(\bar{x}_k) \tag{8}$$

относительно неизвестной функции f имеет решение на множестве всех отображений из $\mathbb{Z}^k$ в $\mathbb{Z}$.

Доказательство. Разобьем множество $\mathbb{Z}^k$ в объединение орбит элемента u. Будем строить решение уравнения (8) отдельно на каждой из орбит элемента u. Согласно теореме 2 из условия леммы следует, что каждая орбита элемента u бесконечна, т. е. имеет вид $\mathscr{O}(x_\kappa) = \big\{x_\kappa^{u^i} \mid i \in \mathbb{Z}\big\}$ для некоторой точки $x_\kappa \in \mathbb{Z}^k$. Обозначим $x_\kappa^{(i)} = x_\kappa^{u^i}$ и $h\big(x_\kappa^{(i)}\big) = c_i$, $i \in \mathbb{Z}$. Значения функции f на точках орбиты $\mathscr{O}(x_\kappa)$ будем определять таким же образом, как и при доказательстве леммы 13. А именно, положим $f(x_\kappa) = 0$ и

$$f\big(x_\kappa^{(i)}\big) = \sum_{j=1}^{i} c_j \text{ при } i > 0 \quad \text{и} \quad f\big(x_\kappa^{(i)}\big) = -\sum_{j=i+1}^{0} c_j \text{ при } i < 0.$$

Тогда для любого целого i имеем $f\big(x_\kappa^{(i)}\big) - f\big(x_\kappa^{(i-1)}\big) = c_i$, а поскольку $x_\kappa^{(i-1)} = \big(x_\kappa^{(i)}\big)^{u^{-1}}$, функция f удовлетворяет уравнению (8) на орбите $\mathscr{O}(x_\kappa)$. Проделав построения на каждой из орбит, получим функцию f, которая удовлетворяет уравнению (8) на всем множестве $\mathbb{Z}^k$.

Теорема 7. *При любом натуральном k k-й коммутант $GA_C(Z)^{(k)}$ группы $GA_C(Z)$ имеет ширину 1 и совпадает со стабилизатором k-го уровня $GA_C^{[k]}(Z)$ этой группы.*

Доказательство. Пусть k — некоторое натуральное число. Из утверждения 3 леммы 7 следует, что $GA_C(Z)^{(k)} < GA_C^{[k]}(Z)$. Докажем обратное включение. Более того, убедимся, что произвольная таблица

$$u = [0, \dots, 0, g_{k+1}(\bar{x}_k), g_{k+2}(\bar{x}_{k+1}), \dots] \in GA_C^{[k]}(Z)$$

является коммутатором подходящих таблиц из стабилизатора $(k-1)$-го уровня. Выберем таблицу $v = [0, \dots, h_k(\bar{x}_{k-1}), 0, \dots]$ так, чтобы функция $h : \mathbb{Z}^{k-1} \to \mathbb{Z}$ не принимала нулевого значения ни в одной точке множества $\mathbb{Z}^{k-1}$. Построим таблицу

$$w = [0, \dots, 0, f_{k+1}(\bar{x}_k), f_{k+2}(\bar{x}_{k+1}), \dots]$$

такую, что $u = [v, w]$. Первые k координат коммутатора $[v, w]$ нулевые, а для остальных выполнены равенства

$$([v, w])_l = f_l(\bar{x}_{l-1}) - f_l\big(\bar{x}_{l-1}^{v^{-1}}\big), \quad l > k.$$

Для каждого $l > k$ построим функцию $f_l(\bar{x}_{l-1})$ так, чтобы выполнялось равенство

$$f_l(\bar{x}_{l-1}) - f_l\big(\bar{x}_{l-1}^{v^{-1}}\big) = g_l(\bar{x}_{l-1}).$$

Такое построение возможно в силу леммы 14 с учетом выбора таблицы v. Поскольку последнее равенство выполнено для всех $l > k$, отсюда и получаем, что $u = [v, w]$. Теорема доказана.

9. Свободные подполугруппы, порожденные ZC-автоматами с двумя состояниями

Будем рассматривать только такие ZC-автоматы, у которых множество внутренних состояний состоит из двух элементов q_1 и q_2. Каждый такой автомат $\mathscr{A}$ определяется парой разбиений множества Z, $Z = A_1 \cup A_2$ и $Z = B_1 \cup B_2$, а также парой целых чисел a и b. По этим данным функция переходов автомата $\mathscr{A}$ определяется таким образом, что в состоянии q_1 (соответственно q_2), получив символ из множества A_i (соответственно B_i), автомат переходит в состояние q_i, $i = 1, 2$. В состоянии q_1 автомат $\mathscr{A}$ определяет сдвиг $x \mapsto x + a$, а в состоянии q_2 — сдвиг $x \mapsto x + b$. Диаграмма Мура такого автомата приведена на рис. 4.

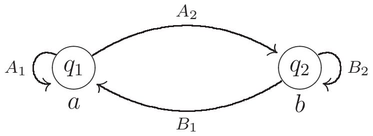

Рис. 4.

Поскольку $A_2 = Z \setminus A_1$, $B_2 = Z \setminus B_1$, автомат $\mathscr{A}$ однозначно определяется четверкой данных $\langle A_1, B_1, a, b\rangle$, где $A_1, B_1 \subset Z$, $a, b \in Z$. Обозначим преобразования множества Z^ω, которые определяет автомат $\mathscr{A}$ в своих состояниях q_1 и q_2, символами f_1 и f_2 соответственно. Подгруппу группы $FGA_C(Z)$, порожденную преобразованиями f_1 и f_2, будем называть *группой автомата* $\mathscr{A}$ и обозначать $G(\mathscr{A})$, а ее подполугруппу, порожденную f_1 и f_2, — *полугруппой автомата* $\mathscr{A}$ и обозначать через $S(\mathscr{A})$.

Приведем пример континуального семейства ZC-автоматов с двумя состояниями, полугруппы которых являются свободными. А именно, рассмотрим семейство $\mathscr{F}$ автоматов, определяемых данными $\langle A, B, 1, 0\rangle$, $A, B \subset Z$, которые удовлетворяют условиям $A \supset \mathbb{N}$, $B \supset \mathbb{N}$, $0 \in A$, $0 \notin B$.

Теорема 8. *Пусть $\mathscr{A}$ — произвольный автомат, содержащийся в множестве $\mathscr{F}$. Тогда полугруппа $S(\mathscr{A})$ является свободной 2-порожденной полугруппой, свободными образующими которой являются преобразования, определяемые $\mathscr{A}$ в своих состояниях.*

Доказательство. Рассмотрим различные полугрупповые слова $u(f_1, f_2)$ и $v(f_1, f_2)$. Предположим, что они задают равные преобразования. Тогда равными будут и преобразования, заданные произведениями $U = u(f_1, f_2)v(f_1, f_2)$ и $V = v(f_1, f_2)u(f_1, f_2)$. Учитывая, что в $S(\mathscr{F})$ можно проводить сокращения, будем считать, что первые буквы этих слов различны. Таким образом, имеем слова $U = f_1U_1$, $V = f_2V_1$ и $|U_1| = |V_1| = n \geq 0$. Рассмотрим действия преобразований, определяемых этими словами, на последовательность $(0, 0)$. Согласно определению автомата $\mathscr{F}$ получаем, что $(0, 0)^U = (1, 1)^{U_1} = (n_1 + 1, n + 1)$, где n_1 — количество вхождений f_1 в U_1. В то же время $(0, 0)^V = (0, 0)^{V_1} = (n_2, k)$, где n_2 — количество вхождений f_1 в V_1, а $k = 0$, если слово V_1 не содержит вхождений f_1, или $k = n - l + 1$, если l — номер первой позиции в слове V_1, которая равна f_1. Следовательно, полученные образы различны, что приводит к противоречию и завершает доказательство теоремы.

Так как при доказательстве использовалось действие полугруппы $S(\mathscr{F})$ лишь на словах длины 2, приведенную конструкцию можно рассматривать как континуальное семейство свободных подполугрупп ранга два в сплетении $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$.

Вопросы о том, будет ли группа автомата $\mathscr{F}$ свободной неабелевой при подходящем распределении отрицательных целых чисел частям разбиений, а также при каких условиях на разбиения группы полученных автоматов изоморфны, остаются открытыми.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hořeiš J.* Преобразования, определенные конечными автоматами // Проблемы кибернетики. 1963. V. 9. P. 23–26.
2. *Заровный В. П.* Автоматные подстановки и сплетения групп // Докл. АН СССР. 1965. Т. 160, № 3. С. 562–565.
3. *Gécseg F., Peák I.* Algebraic theory of automata. Budapest: Académiai kiadó, 1972.
4. *Алешин С. В.* Конечные автоматы и проблема Бернсайда о периодических группах // Мат. заметки. 1972. Т. 11. С. 319–328.
5. *Григорчук Р. И., Некрашевич В. В., Сущанский В. И.* Автоматы, динамические системы и группы // Труды МИАН им. В. А. Стеклова. 2000. Т. 231. С. 134–214.
6. *Bartholdi L., Grigorchuk R., Šunič Z.* Branch groups // Handbook of algebra. Amsterdam: North-Holland, 2003. V. 3. P. 989–1112.
7. *Nekrashevych V.* Self-similar groups. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2005. (Math. Surv. Monogr.; V. 117).
8. *Sidki S.* Finite automata of polynomial growth do not generate a free group // Geom. Dedicata. 2004. V. 108. P. 193–204.
9. *Голубовски В.* Автоморфизмы корневых деревьев счетной валентности // Зап. науч. семинаров ПОМИ. 2007. Т. 343. С. 199–205.
10. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. М.: Наука, 1977.
11. *Eilenberg S.* Automata, languages and machines. New York; London: Acad. Press, 1974. V. A.
12. *Рэни Дж. Н.* Последовательностные функции // Кибернетический сборник. 1961. Т. 3. С. 142–146.
13. *Kaloujnine L. A., Beleckij P. M., Fejnberg V. Z.* Kranzprodukte. Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, 1987.
14. *Kaloujnine L.* Sur les groupes P_∞ des tableaux infini // C. R. Acad. Sci. Paris. 1947. V. 224. P. 1097–1099.
15. *Калужнин Л. А.* Об одном обобщении силовских p-подгрупп симметрических групп // Acta Math. Acad. Sci. Hug. 1951. V. 2. P. 197–221.
16. *Сущанский В. И.* Сплетения по последовательностям групп подстановок и финитно аппроксимируемые группы // Докл. АН Украины. 1984. № 2. С. 19–22.
17. *Kaloujnine. L., Krasner M.* Produit complet des groupes de permutations et le probleme d'extension de groupes. I // Acta Sci. Math. Szeged. 1950. V. 13. P. 208–230.

Статья поступила 10 сентября 2009 г.

Олийнык Андрей Степанович
Киевский национальный университет им. Тараса Шевченко,
механико-математический факультет,
ул. Владимирская, 60, Киев 01033, Украина
olijnyk@univ.kiev.ua

Сущанский Виталий Иванович
Institute of Mathematics, Silesian University of Technology
ul. Kaszubska, 23, Gliwice, 44-100 Poland
vitaliy.sushchanskyy@polsl.pl