Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2010. Том 51, № 5

УДК 519.968:535.4:531.33

ВАРИАЦИОННЫЙ И АСИМПТОТИЧЕСКИЙ МЕТОДЫ ПОИСКА СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ ПОД ПОРОГОМ НЕПРЕРЫВНОГО СПЕКТРА

С. А. Назаров

Аннотация. На примере смешанной краевой задачи для оператора Гельмгольца обсуждаются два метода поиска собственных чисел под порогом непрерывного спектра: вариационный и асимптотический. Построена асимптотика собственного числа, возникающего около порога при появлении в цилиндрическом волноводе малого препятствия. Полученная асимптотическая формула, ее вывод и обоснование существенно отличаются от случая ограниченной области.

Ключевые слова: собственные числа, дискретный спектр, волновод, уравнение Гельмгольца, ловушечные моды.

1. Постановка спектральной задачи

Пусть ω — область в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{n-1}$ с липшицевой границей $\partial\omega$ и компактным замыканием $\overline{\omega} = \omega \cup \partial\omega$. Пусть, кроме того, Θ — компакт положительного объема, лежащий в замыкании n-мерного цилиндра $\Pi = \omega \times \mathbb{R}$, и $\Omega = \Pi \setminus \Theta$ — область в $\mathbb{R}^n$ с липшицевой границей (рис. 1). Рассмотрим спектральную смешанную краевую задачу:

$$-\Delta_x u(x) = \lambda u(x), \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

$$u(x) = 0, \quad x \in \Gamma = \partial\Pi \setminus \Theta, \tag{2}$$

$$\partial_\nu u(x) = 0, \quad x \in \Sigma = \Pi \cap \partial\Theta = \partial\Omega \setminus \overline{\Gamma}, \tag{3}$$

где $\Delta_x = \Delta_y + \partial_z^2$ и Δ_y — операторы Лапласа в переменных $x = (y, z)$ и $y = (y_1, \dots, y_{n-1})$ соответственно, $\partial_z = \partial/\partial z$, $z = x_n$, ∂_ν — производная вдоль внешней нормали и λ — спектральный параметр. Из-за возможного сингулярного поведения решений вблизи особенностей границы задачу (1)–(3) следует понимать как интегральное тождество [1]

$$(\nabla_x u, \nabla_x v)_\Omega = \lambda (u, v)_\Omega, \quad v \in \mathring{H}^1(\Omega; \Gamma), \tag{4}$$

в котором $\nabla_x = \mathrm{grad}_x$, $(\ ,\ )_\Omega$ — натуральное скалярное произведение в пространстве Лебега $L_2(\Omega)$, а $\mathring{H}^1(\Omega; \Gamma)$ — подпространство функций из соболевского класса $H^1(\Omega)$, удовлетворяющих условию Дирихле (2). Благодаря цилиндрическому строению области Ω около бесконечности неравенство Фридрихса на сечении ω и в усеченной области

$$\Omega(T) = \{x \in \Omega : |z| < T\} \tag{5}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 09–01–00759).

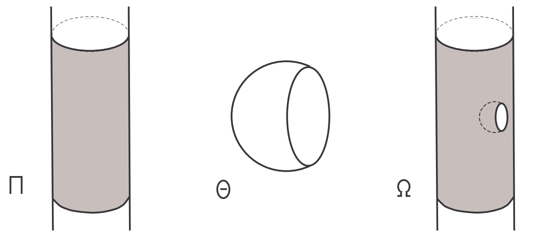

Рис. 1.

(ср. далее формулы (25) и (26)) обеспечивает соотношение

$$\|u; L_2(\Omega)\| \leq c_\Omega \|\nabla_x u; L_2(\Omega)\|, \quad u \in \mathring{H}^1(\Omega; \Gamma), \tag{6}$$

а значит, левая часть (4) может быть назначена скалярным произведением в гильбертовом пространстве $\mathscr{H} = \mathring{H}^1(\Omega; \Gamma)$. Более того, она представляет собой положительно определенную замкнутую симметричную квадратичную форму в $\mathscr{H}$. Таким образом, теория Бирмана — Вишика — Крейна (см. [2, гл. 10] и ср. [3]) ставит в соответствие вариационной задаче (4) (или дифференциальной задаче (1)–(3)) самосопряженный полуограниченный снизу оператор $\mathscr{A}$ в пространстве $L_2(\Omega)$. Из-за бесконечности области вложение $\mathring{H}^1(\Omega; \Gamma) \subset L_2(\Omega)$ не является компактным, т. е. в силу теоремы 10.1.5 из [2] спектр σ оператора $\mathscr{A}$ не может быть дискретным, причем согласно [2, § 10.1] его нижняя грань $\underline{\sigma}$ вычисляется по формуле

$$\underline{\sigma} = \inf_{u \in \mathscr{H} \setminus \{0\}} \frac{\|\nabla_x u; L_2(\Omega)\|^2}{\|u; L_2(\Omega)\|^2}. \tag{7}$$

Замечание 1. Обращаем внимание на удобство теории Бирмана — Вишика — Крейна: в правой части (7) фигурирует все пространство $\mathring{H}^1(\Omega; \Gamma)$, а не более узкая область определения $\mathscr{D}(\mathscr{A})$ оператора $\mathscr{A}$, которая может быть устроена весьма сложно из-за допускаемых особенностей границы. Если множества ω и Θ ограничены гладкими поверхностями и к тому же препятствие Θ лежит внутри (открытого) цилиндра Π, то $\mathscr{D}(\mathscr{A}) = H^2(\Omega) \cap \mathring{H}^1(\Omega; \Gamma)$, но при наличии конических точек, ребер или линий смены типа краевого условия область определения оператора оказывается шире (см., например, [4, 5]). ⊠

Как известно и нетрудно проверить, непрерывный спектр σ_c оператора $\mathscr{A}$ совпадает с лучом $[\Lambda_1, +\infty)$, причем в качестве *порога* $\Lambda_1 > 0$ выступает первое собственное число задачи Дирихле для оператора Лапласа на сечении цилиндра

$$(\nabla_y U, \nabla_y, V)_\omega = \Lambda (U, V)_\omega, \quad V \in \mathring{H}^1(\omega; \partial\omega). \tag{8}$$

Отвечающую Λ_1 собственную функцию, положительную в ω и нормированную в $L_2(\omega)$, обозначим через U_1. Дифференциальная форма записи задачи (8) выглядит так:

$$-\Delta_y U(y) = \Lambda U(y), \ y \in \omega, \quad U(y) = 0, \ y \in \partial\omega. \tag{9}$$

В статьях [6, 7] разработан вариационный метод поиска собственных чисел «под порогом» непрерывного спектра, т. е. на интервале $(0, \Lambda_1)$. Этот метод основан на следующем простом и часто применяемом наблюдении: если оказалось, что $\underline{\sigma} < \Lambda_1$, то дискретный спектр σ_d оператора $\mathscr{A}$ непуст и, в частности, $\lambda_1 = \underline{\sigma}$ — наименьшее собственное число. Два главных технических момента, состоящие в выборе специальных пробных функций в минимальном принципе (7), будут пояснены в очередном пункте статьи, однако основная цель данной работы — найти подоплеку возникающих достаточных условий (предложения 2 и 5) непустоты дискретного спектра и применить асимптотический анализ [8, 9] в случае малого препятствия $\Theta \subset \overline{\Pi}$. Упомянем публикации [10–15] (см. обзоры [16, 17] для расширения списка), в которых предлагаются и применяются другие приемы обнаружения элементов дискретного σ_d и точечного σ_p спектров; при этом $\sigma_d \subset \sigma_p$ и $\sigma_p \setminus \sigma_d \subset \sigma_c$.

2. Достаточное условие существования дискретного спектра

Подставим в соотношение (6) пробную функцию u_δ, зависящую от малого параметра $\delta > 0$:
$$u_\delta(x) = U_1(y)\exp(-\delta|z|). \tag{10}$$
Поскольку $\exp(-\delta|z|) = 1 + O(\delta)$ при $x = (y, z) \in \Theta$, имеем
$$\begin{aligned}
\|u_\delta; L_2(\Omega)\|^2 &= \|u_\delta; L_2(\Pi)\|^2 - \|u_\delta; L_2(\Theta)\|^2\\
&= \delta^{-1}\|U_1; L_2(\omega)\|^2 - \|U_1; L_2(\Theta)\|^2 + O(\delta),\\
\|\nabla_x u_\delta; L_2(\Omega)\|^2 &= \|\nabla_y u_\delta; L_2(\Pi)\|^2 - \|\nabla_y u_\delta; L_2(\Theta)\|^2 + \delta^2\|u_\delta; L_2(\Omega)\|^2\\
&= \delta^{-1}\|\nabla_y U_1; L_2(\omega)\|^2 - \|\nabla_y U_1; L_2(\Theta)\|^2 + O(\delta).
\end{aligned} \tag{11}$$

Вспомнив, что $\|\nabla_y U_1; L_2(\omega)\|^2 = \Lambda_1\|U_1; L_2(\omega)\|^2 = \Lambda_1$ в силу интегрального тождества (8) и условия нормировки собственной функции U_1, выводим из соотношения (7) неравенства
$$\begin{aligned}
\underline{\sigma} \le \frac{\delta^{-1}\Lambda_1 - \|\nabla_y U_1; L_2(\Theta)\|^2 + c\delta}{\delta^{-1} - \|U_1; L_2(\Theta)\|^2 - c\delta}&\\
\le \Lambda_1 - 2\delta(\|\nabla_y U_1; L_2(\Theta)\|^2 - \Lambda_1\|U_1; L_2(\Theta)\|^2) + C\delta^2.&
\end{aligned} \tag{12}$$
Таким образом, при выполнении условия
$$\int\limits_\Theta D_1(y)\,dydz > 0, \tag{13}$$
в котором
$$D_1(y) = |\nabla_y U_1(y)|^2 - \Lambda_1|U_1(y)|^2, \tag{14}$$
найдется малое число $\delta > 0$, обеспечивающее формулу
$$\underline{\sigma} < \Lambda_1 \Rightarrow \lambda_1 = \underline{\sigma} \in \sigma_d.$$
Иными словами, неравенство (13) дает достаточное условие существования дискретного спектра.

Согласно интегральному тождеству (8) функция (14) обладает нулевым средним по области ω, причем в силу принципа максимума неравенство $D_1 > 0$ имеет место вблизи границы $\partial\omega$, но $D_1 < 0$ в окрестности точки максимума функции $U_1 > 0$. Если $\Theta \subset \omega_+ \times \mathbb{R}$, где
$$\omega_\pm = \{y \in \omega : \pm D_1(y) > 0\}, \tag{15}$$
то условие (13) заведомо выполнено и, следовательно, $\sigma_d \neq \varnothing$.

Сформулируем результат.

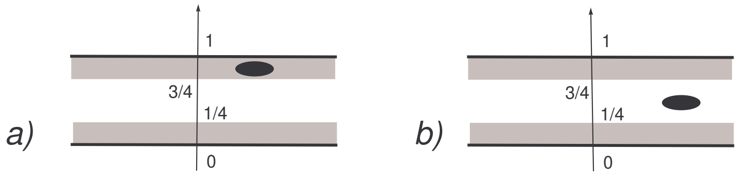

Рис. 2.

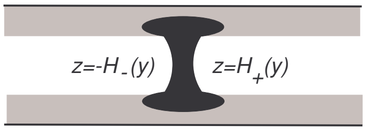

Рис. 3.

Предложение 2. *Если справедливы неравенства* (13), *то дискретный спектр* σ_d *оператора* $\mathscr{A}$ (*задачи* (4)) *непуст.*

Поскольку подынтегральное выражение в (13) не зависит от переменной z, для полученного достаточного условия непустоты дискретного спектра справедлив принцип Кавальери (см., например, [18]).

Пример 3. Пусть $n = 2$ и $\Pi = (0, 1) \times \mathbb{R}$ — полоса. Тогда

$$\Lambda_1 = \pi^2, \quad U_1(y) = \sqrt{2}\sin(\pi y), \quad D_1(y) = \pi^2\cos(2\pi y).$$

Цилиндр $\omega_+ \times \mathbb{R}$ на рис. 2 тонирован, и в случае расположения препятствия (глубоко тонированная область) так, как показано на рис. 2(a), дискретный спектр непуст, однако для препятствия на рис. 2(b) вариационный метод информации о дискретном спектре не дает. ⊠

Пример 4. Пусть препятствие имеет вид

$$\Theta = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0, 1], -H_-(y) \le z \le H_+(y)\}, \tag{16}$$

где $H_\pm$ — непрерывные функции и $H = H_+ + H_- \ge 0$, $H \ne 0$ (рис. 3). Теперь условие (13) превращается в такое:

$$\int\limits_0^1 H(y)\cos(2\pi y)\,dy > 0. \tag{17}$$

Иными словами, для существования собственного числа $\lambda_1 \in (0, \Lambda_1)$ достаточно, чтобы был положителен только один из коэффициентов Фурье (17) функции толщины фигуры (16). ⊠

Сама пробная функция (10) и схожие с (11), (12) выкладки применялись неоднократно (см., например, [12]), однако основное нововведение вариационного метода [6, 7] — простой способ исследования межевого случая

$$\int\limits_\Theta D_1(y)\,dydz = 0. \tag{18}$$

Отметим, что прием [13] (см. также [19]) проверки существования ловушечной моды в задаче о косом набегании волны на периодическую цепочку препятствий требует усложненной конструкции пробной функции, приспособленной к геометрии препятствий, а потому труден для обобщений и лишен изящества, присущего собственно вариационному методу.

Предположим, что выполнено равенство (18), и возьмем какую-либо гладкую функцию v с компактным носителем. Для новой (по-прежнему вещественной) пробной функции

$$u_\delta(x) = U_1(y)\exp(-\delta|z|) + \delta^{1/2}v(x) \tag{19}$$

продолжим вычисления (11):

$$\begin{aligned}\|\nabla_x u_\delta; L_2(\Omega)\|^2 =& \delta^{-1}\|\nabla_y U_1; L_2(\omega)\|^2 - \|\nabla_y U_1; L_2(\Theta)\|^2\\ &+ 2\delta^{1/2}(\nabla_y U_1, \nabla_y v)_\Omega + O(\delta),\\ \|u_\delta; L_2(\Omega)\|^2 =& \delta^{-1}\|U_1; L_2(\omega)\|^2 - \|U_1; L_2(\Theta)\|^2 + 2\delta^{1/2}(U_1, v)_\Omega + O(\delta).\end{aligned} \tag{20}$$

Если $\underline{\sigma} = \Lambda_1$, то имеет место неравенство (см. [2, § 10.1])

$$\Lambda_1\|u_\delta; L_2(\Omega)\|^2 \le \|\nabla_x u_\delta; L_2(\Omega)\|^2. \tag{21}$$

Подставим соотношения (20) в левую и правую части (21) неравенства (20) соответственно. Слагаемые порядка δ^{-1} сокращаются в силу интегрального тождества (8). Следующие по порядку слагаемые также взаимно уничтожаются благодаря предположению (18). Таким образом, убирая общий множитель $2\delta^{1/2}$, обнаруживаем, что

$$(U_1, v)_\Omega \le (\nabla_y U_1, \nabla_y v)_\Omega + C(v)\delta^{1/2}. \tag{22}$$

Поскольку носитель функции v компактен, при учете равенств (9) находим, что

$$\Lambda_1 \int\limits_\Omega v(x)U_1(y)\,dx - \int\limits_\Omega \nabla_y v(x)\cdot\nabla_y U_1(y)\,dx = \int\limits_\Sigma v(x)\partial_\nu U_1(y)\,dx. \tag{23}$$

Если производная $\partial_\nu U_1$ отличается от нуля почти всюду на каком-то участке поверхности Σ, то путем подбора пробной функции последний интеграл в (23) можно сделать положительным и тем самым нарушить соотношение (22), а значит, и неравенство (21) при малом $\delta > 0$. Итак, обнаружено противоречие, и тем самым установлено

Предложение 5. *Если выполнено равенство* (18) *и производная* $\partial_\nu U_1$ *не обращается в нуль почти всюду на поверхности* Σ, *то дискретный спектр* σ_d *оператора* $\mathscr{A}$ (*задачи* (4)) *непуст.*

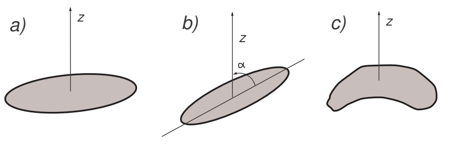

Рис. 4.

Пример 6. Пусть Θ — трещина, т. е. часть гладкой $(n-1)$-мерной поверхности. Равенство (18) выполнено, так как $\operatorname{mes}_n \Theta = 0$. Производная $\partial_\nu U_1$ обращается в нуль всюду на берегах $\Theta_\pm$ разреза только в том случае, если Θ — плоская трещина, перпендикулярная оси z (рис. 4(a)). Подчеркнем, что в этом случае нетрудно убедиться в отсутствии дискретного спектра (ср. доказательство предложения 7). Если же плоская трещина расположена под острым углом к оси цилиндра (рис. 4(b)) или ее поверхность искривлена (рис. 4(c)), то предложение 5 обнаруживает ловушечную моду. ⊠

3. Достаточное условие отсутствия дискретного спектра

Утверждения из этого раздела в целом известны (ср. [10]) и приводятся здесь исключительно для полноты картины.

Граница области (5) состоит из фрагментов Σ, $\Gamma(T) = \{x \in \Gamma : |z| < T\}$, а также цилиндрических сечений $\omega^\pm(T) = \omega \times \{\pm T\}$. Рассмотрим спектральную смешанную краевую задачу

$$(\nabla_x w, \nabla_x v)_{\Omega(T)} = \beta(w, v)_{\Omega(T)}, \quad v \in \mathring{H}^1(\Omega(T); \Gamma(T)), \tag{24}$$

и обозначим через $\beta_1 > 0$ ее первое собственное число.

Предложение 7. $\sigma_d \cap (0, \min\{\Lambda_1, \beta_1\}) = \varnothing$.

Доказательство. Пусть число $\lambda \in (0, \min\{\Lambda_1, \beta_1\})$ и нетривиальная функция $u \in \mathring{H}^1(\Omega(T); \Gamma(T))$ удовлетворяют интегральному тождеству (4). Положим $v = u$ и проинтегрируем по $z \in (-\infty, -T) \cup (T, +\infty)$ неравенство Фридрихса на сечении

$$\int\limits_\omega |\nabla_y u(y,z)|^2\, dy \geq \Lambda_1 \int\limits_\omega |u(y,z)|^2\, dy. \tag{25}$$

Добавив к результату неравенство Фридрихса в области (5)

$$\int\limits_{\Omega(T)} |\nabla_x u(x)|^2\, dx \geq \beta_1 \int\limits_{\Omega(T)} |u(x)|^2\, dx, \tag{26}$$

при учете тождества (4) получаем, что

$$\lambda \int\limits_\Omega |u(x)|^2\, dx = \int\limits_\Omega |\nabla_x u(x)|^2\, dx \geq \min\{\Lambda_1, \beta_1\} \int\limits_\Omega |u(x)|^2\, dx.$$

Пришли к противоречию. Предложение доказано. ⊠

Из предложения 7 вытекает, что в случае $\beta_1 \geq \Lambda_1$ оператор $\mathscr{A}$ не имеет спектра на отрезке $(0, \Lambda_1)$ и, в частности, $\sigma_d = \varnothing$.

Пример 8. В прежних условиях рассмотрим задачу Дирихле

$$-\Delta_x u(x) = \lambda u(x),\ x \in \Omega, \quad u(x) = 0,\ x \in \partial\Omega. \tag{27}$$

Пусть β_1 — первое собственное число аналогичной (24) смешанной краевой задачи

$$(\nabla_x w, \nabla_x v)_{\Omega(T)} = \beta(w, v)_{\Omega(T)}, \quad v \in \mathring{H}^1(\Omega(T); \partial\Omega(T) \setminus (\omega^+(T) \cup \omega^-(T)),$$

а w_1 — соответствующая собственная функция. Нетрудно усмотреть, что Λ_1 — собственное число и $x \mapsto U_1(y)$ — собственная функция смешанной краевой задачи для оператора Лапласа в ограниченном цилиндре $\Pi(T) = \omega \times (-T, T)$ с краевым условием Дирихле на боковой поверхности $\varpi(T) = \partial\omega \times (-T, T)$ и условиями Неймана на торцах $\omega^\pm(T)$. Поскольку $U_1 > 0$, Λ_1 — первое собственное число этой спектральной задачи. Таким образом, согласно формуле Рэлея находим

$$\Lambda_1 = \inf_{u \in \mathring{H}^1(\Pi(T); \varpi(T)) \setminus \{0\}} \frac{\|\nabla_x u; L_2(\Pi(T))\|^2}{\|u; L_2(\Pi(T))\|^2} \leq \frac{\|\nabla_x w_1; L_2(\Pi(T))\|^2}{\|w_1; L_2(\Pi(T))\|^2} \leq \beta_1,$$

при этом функция w_1 продолжена нулем с $\Omega(T)$ на $\Pi(T)$. Итак, прежние доводы показывают, что оператор $\mathscr{A}_D$ задачи Дирихле (27) не имеет спектра левее точки $\Lambda_1 = \min\{\Lambda_1, \beta_1\}$, а значит, у него вообще нет дискретного спектра. ⊠

4. Малое препятствие — отсутствие дискретного спектра.

Пусть θ — область в $\mathbb{R}^n$ с липшицевой границей $\partial\theta$ и компактным замыканием $\overline{\theta}$. Пусть, кроме того, $x^0 = (y^0, 0)$ — точка внутри цилиндра Π, $\varepsilon \in (0, 1]$ — малый параметр и

$$\Theta = \Theta^\varepsilon = \{x : \xi = \varepsilon^{-1}(x - x^0) \in \overline{\theta}\}. \tag{28}$$

При малом ε множество (28) лежит в Π. Кроме того, в случае $y^0 \in \omega_+$ при малом ε выполнено условие (13) и, значит, $\sigma_d \neq \varnothing$ согласно предложению 2. Далее, в частности, будет проверено, что включение $y^0 \in \omega_-$ (см. (15)) не гарантирует отсутствия дискретного спектра.

В статье [20] (см. также [8, гл. 9]) установлено следующее асимптотическое представление для собственного числа $\beta_1 = \beta_1^\varepsilon$ задачи (24) в области $\Omega^\varepsilon(T) = \Pi(T) \setminus \Theta^\varepsilon$ (конечный цилиндр с малой полостью):

$$\beta_1^\varepsilon = \Lambda_1 + \frac{\varepsilon^n}{2T}\left(- \sum_{j,k=1}^{n-1} M_{jk}(\theta) \frac{\partial U_1}{\partial y_j}(y^0) \frac{\partial U_1}{\partial y_k}(y^0) + \Lambda_1 |U_1(y^0)|^2 \operatorname{mes}_n \theta \right) + O(\varepsilon^{n+1}). \tag{29}$$

Поясним формулу (29). Во-первых, отвечающая первому собственному числу Λ_1 собственная функция $x \mapsto (2T)^{-1/2} U_1(y)$ задачи (24) в конечном цилиндре $\Pi(T)$ нормирована в пространстве $L_2(\Pi(T))$ (ср. пример 8). Во-вторых, $\operatorname{mes}_n \theta$ — объем тела, а $M(\theta) = (M_{jk}(\theta))_{j,k=1}^n$ — матрица, ассоциированная с тензором виртуальной массы [21, добавление G] и составленная из коэффициентов в разложениях

$$\mathscr{W}_j(\xi) = - \sum_{k=1}^{n} M_{jk}(\theta) \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_j} + O(|\xi|^{-n}), \quad |\xi| \to +\infty, \tag{30}$$

специальных решений внешней задачи Неймана

$$-\Delta_\xi \mathscr{W}_j(\xi) = 0, \ \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \theta, \quad \partial_N \mathscr{W}_j(\xi) = -N_j(\xi), \ \xi \in \partial\theta. \tag{31}$$

Здесь $N = (N_1, \ldots, N_n)$ — единичный вектор внутренней (по отношению к θ) нормали, определенный почти всюду на липшицевой поверхности $\partial\theta$, Φ — фундаментальное решение оператора Лапласа,

$$\Phi(\xi) = \begin{cases} -(2\pi)^{-1} \ln |\xi| & \text{при } n = 2, \\ ((n-2)|\mathbb{S}^{n-1}|)^{-1} |\xi|^{2-n} & \text{при } n \geq 3, \end{cases} \tag{32}$$

а $|\mathbb{S}^{n-1}|$ — площадь поверхности единичной $(n-1)$-мерной сферы $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$.

Известно (см. [21], а также [20]), что матрица $M(\theta)$ симметрична, и справедливо представление

$$M_{jk}(\theta) = (\nabla_\xi \mathscr{W}_j, \nabla_\xi \mathscr{W}_k)_{\mathbb{R}^n \setminus \theta} + \delta_{j,k} \operatorname{mes}_n \theta, \tag{33}$$

причем $\delta_{j,k}$ — символ Кронекера. Таким образом, матрица виртуальной массы $M(\theta)$ есть сумма матрицы Грама $P(\theta)$, построенной по решениям $\mathscr{W}_1, \ldots, \mathscr{W}_n$ задачи (31) при помощи скалярного произведения $(\nabla_\xi \cdot, \nabla_\xi \cdot)_{\mathbb{R}^n \setminus \theta}$ и матрицы $\mathbb{I}_n \operatorname{mes}_n \theta$, пропорциональной единичной матрице $\mathbb{I}_n$ размером $n \times n$. В частности, $M(\theta)$ — заведомо положительно определенная матрица в случае $\operatorname{mes}_n \theta > 0$ (см. далее п. 6).

Из формулы (29) вытекает, что при $y^0 \in \omega_-^\theta$, где

$$\omega_\pm^\theta = \{y \in \omega : \pm D_1^\theta(y^0) > 0\}, \tag{34}$$

$$D_1^\theta(y^0) = D_1(y^0)\,\mathrm{mes}_n\,\theta + \sum_{j,k=1}^{n-1} P_{jk}(\theta)\frac{\partial U_1}{\partial y_j}(y^0)\frac{\partial U_1}{\partial y_k}(y^0), \tag{35}$$

и при достаточно малом $\varepsilon > 0$ справедливо соотношение

$$\beta_1^\varepsilon \geq \Lambda_1 - \frac{\varepsilon^n}{2T}D_1^\theta(y^0) - C\varepsilon^{n+1} \geq \Lambda_1,$$

т. е. в силу предложения 7 дискретный спектр σ_d отсутствует. Подчеркнем, что множество $\omega_- \setminus \omega_-^\theta$ имеет положительную меру

5. Малое препятствие — возникновение дискретного спектра

Проверить наличие собственного числа ниже порога Λ_1 при помощи асимптотического метода гораздо сложнее, чем убедиться в его отсутствии. На первый взгляд кажется, что достаточно воспользоваться результатами из [20; 8, гл. 9], построить асимптотику решения задачи

$$(\nabla_x w, \nabla_x v)_{\Omega^\varepsilon(T)} = \beta(w, v)_{\Omega^\varepsilon(T)}, \quad v \in \mathring{H}^1(\Omega^\varepsilon(T); \partial\Pi(T)),$$

вполне аналогичной задаче (24), и убедиться в том, что при $y^0 \in \omega_+^\theta$ (см. (34)) ее первое собственное число β_1^ε строго меньше Λ_1 для малого $\varepsilon > 0$. В этом случае формула (7) показывает, что дискретный спектр задачи (24) в $\Omega^\varepsilon = \Pi \setminus \Theta^\varepsilon$ непуст (ср. рассуждения из статьи [10]). Однако первое собственное число β_1^0 задачи Дирихле в предельной области $\Omega^0(T) = \Pi(T)$ равно $\Lambda_1 + (2T)^{-2}\pi^2$ и для выполнения неравенства $\beta_1^\varepsilon < \Lambda_1$ требуется зависимость от параметра ε полувысоты T цилиндра $\Pi(T)$. В этой ситуации оценка остатка и, как станет понятно далее, само асимптотическое разложение должны измениться, причем соответствующих результатов в [20; 8, гл. 9] нет. Поэтому займемся построением и обоснованием асимптотики собственного числа задачи (4) в бесконечном цилиндре $\Omega^\varepsilon = \Pi \setminus \Theta^\varepsilon$ с малым препятствием (28). Формальные построения в значительной мере аналогичны приведенным в [20; 8, гл. 9], поэтому ограничимся конспективным изложением, однако формула для собственного числа выводится совершенно из других соображений и обоснование опирается на иные результаты, нежели в цитированных публикациях.

В качестве промежуточного асимптотического анзаца для собственной функции задачи (1)–(3) области $\Omega^\varepsilon = \Pi \setminus \Theta^\varepsilon$ возьмем сумму

$$U_1(y) + \varepsilon\chi_0(x)(W_1(h^{-1}(x - x^0)) + \varepsilon W_2(h^{-1}(x - x^0))) + \varepsilon^n U'(x), \tag{36}$$

где $\chi_0 \in C_c^\infty(\Pi)$ — срезающая функция, равная единице в окрестности точки $x^0 = (y^0, 0)$, U_1 — первая собственная функция задачи (9), а остальные ингредиенты подлежат определению. Подчеркнем, что уже первое слагаемое в (36) не исчезает на бесконечности, т. е. не попадает в пространство Соболева $\mathring{H}^1(\Omega^\varepsilon; \partial\Pi)$, поэтому выражение (36) нуждается в последующей обработке.

Согласно определению (31) специальных решений $\mathscr{W}_j$ основной член пограничного слоя

$$W_1(\xi) = \sum_{j=1}^{n-1} \mathscr{W}_j(\xi)\frac{\partial U_1}{\partial y_j}(y^0) \tag{37}$$

компенсирует главную часть невязки функции U_1 в краевом условии Неймана (3) на границе $\partial\Theta^\varepsilon$ малого препятствия $\Theta^\varepsilon \subset \Pi$, исчезая на бесконечности со скоростью $O(|\xi|^{1-n})$. Второй член W_2 пограничного слоя служит для компенсации квадратичного слагаемого $Q(y-y^0)$ в формуле Тейлора

$$U_1(x) = \sum_{j=1}^{n-1} \bigl(y_j - y_j^0\bigr) \frac{\partial U_1}{\partial y_j}(y^0) + Q(y-y^0) + O(|y-y^0|);$$

здесь $Q(t(y-y^0)) = t^2 Q(y-y^0)$ при $t \in \mathbb{R}$ и $\Delta_y Q(y-y^0) = -\Lambda_1 U_1(y^0)$. Именно, W_2 — решение внешней задачи Неймана

$$-\Delta_\xi W_2(\xi) = 0,\ \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \theta, \quad \partial_N W_2(\xi) = -\partial_N Q(\xi),\ \xi \in \partial\theta. \tag{38}$$

При $n > 2$ задача (38) имеет единственное решение, исчезающее на бесконечности и допускающее представление

$$W_2(\xi) = C_1 \Phi(\xi) + O(|\xi|^{1-n}), \quad |\xi| \to +\infty. \tag{39}$$

Множитель C_1 нетрудно вычислить при помощи формул Грина на множествах $\mathbb{B}_R^n \setminus \theta$ и θ:

$$\begin{gathered} C_1 = -\lim_{R\to\infty} \int\limits_{\mathbb{S}_R^{n-1}} \frac{\partial W_2}{\partial|\xi|}(\xi)\, ds_\xi = -\lim_{R\to\infty} \Biggl(\int\limits_{\mathbb{B}_R^n\setminus\theta} \Delta_\xi W_2(\xi)\, d\xi - \int\limits_{\partial\theta} \partial_N W_2(\xi)\, ds_\xi \Biggr) \\ = \int\limits_{\partial\theta} \partial_N W_2(\xi)\, ds_\xi = -\int\limits_{\partial\theta} \partial_N Q(\xi)\, ds_\xi = \int\limits_{\theta} \Delta_\xi Q(\xi)\, d\xi = -\Lambda_1 U_1(y^0) \operatorname{mes}_n \theta; \end{gathered} \tag{40}$$

здесь $\mathbb{B}_R^n$ — шар радиусом R и $\mathbb{S}_R^{n-1} = \partial\mathbb{B}_R^n$ — сфера. Если $n = 2$, то решение W_2 приобретает логарифмический рост на бесконечности[1)] (см. формулу (32)) и в правую часть (39) нужно добавить произвольную аддитивную постоянную C_2. Равенства (40) остаются без изменений.

Составим задачу для поправочного слагаемого U' регулярного типа. Заметим, что при $n > 2$ в силу формул (37), (30) и (39) верны соотношения

$$\begin{aligned} &\varepsilon W_1(\xi) + \varepsilon^2 W_2(\xi) \\ &\quad = \varepsilon \Biggl(-\sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n} M_{jk}(\theta) \frac{\partial U_1}{\partial y_j}(y^0) \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_k}(\xi) + O(|\xi|^{-n}) \Biggr) + \varepsilon^2 (C_1 \Phi(\xi) + O(|\xi|^{1-n})) \\ &\qquad = \varepsilon^n \Biggl\{ -\sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n} M_{jk}(\theta) \frac{\partial U_1}{\partial y_j}(y^0) \frac{\partial \Phi}{\partial x_k}(x-x^0) + C_1 \Phi(x-x^0) \Biggr\} \\ &\qquad\qquad + O(\varepsilon^{n+1} |x-x^0|^{-n} (1 + |x-x^0|)), \end{aligned} \tag{41}$$

причем в среднюю часть следует добавить величину $C_2 = (2\pi)^{-1} \ln\varepsilon$ при $n = 2$. Выражение в фигурных скобках обозначим через $Y(x)$. В силу (40) имеем

$$Y(x) = -\sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n} M_{jk}(\theta) \frac{\partial U_1}{\partial y_j}(y^0) \frac{\partial \Phi}{\partial x_k}(x-x^0) - \Lambda_1 U_1(y^0) \operatorname{mes}_n \theta \Phi(x-x^0). \tag{42}$$

[1)] Несмотря на потерю обязательного свойства затухания, все равно называем слагаемое $W_2(\xi)$ пограничным слоем.

На удалении от точки x^0 остаток в формуле (41) становится равным $O(\varepsilon^{n+1})$. Таким образом, предположив, что собственное число задачи в области Ω^ε подчинено соотношению $\lambda^\varepsilon = \Lambda_1 + o(\varepsilon^n)$ (ср. далее асимптотическое представление (52)), произведем коммутирование со срезающей функцией χ, соберем члены с множителями ε^n, возникающие в уравнении (1) при замене функции u суммой (36), и получим такую задачу для слагаемого U':

$$\begin{gathered} -\Delta_x U'(x) - \Lambda_1 U'(x) = F(x) := [\Delta_x, \chi_0(x)]Y(x) + \Lambda_1 \chi_0(x) Y(x), \quad x \in \Pi, \\ U'(x) = 0, \quad x \in \partial\Pi. \end{gathered} \tag{43}$$

Поскольку Λ_1 — собственное число модельной задачи (8) на сечении цилиндра Π, т. е. Λ_1 — точка непрерывного спектра, задача Дирихле (43) не имеет решения в классе Соболева $\mathring{H}^1(\Pi; \partial\Pi)$, несмотря на то, что носитель правой части F компактен. Кроме того, функция F обладает особенностью $O(|x - x^0|^{1-n})$ и принадлежит сопряженному пространству $\mathring{H}^1(\Pi; \partial\Pi)^*$ лишь в случае $n < 4$. Поэтому для решения задачи (43) обратимся к результатам [22] (см. также, например, гл. 2, 3 в [23], посвященные общим краевым задачам в цилиндрических областях и задаче Дирихле для оператора Лапласа соответственно).

Сначала заметим, что при $n = 2, 3$ согласно упомянутым результатам найдется такое $\tau > 0$, что задача (43) имеет единственное решение $U^{0\prime}$, удовлетворяющее включению $\exp(-\tau z) U^{0\prime} \in \mathring{H}^1(\Pi; \partial\Pi)$, т. е. экспоненциально затухающее при $z \to -\infty$, но по необходимости растущее при $z \to +\infty$. Более того, согласно [22; 23, § 3.3] справедливо представление

$$U^{0\prime}(x) = X_+(z)(C_0' + C_1' z) U_1(x) + \widetilde{U}^{0\prime}(x), \tag{44}$$

где $X_\pm \in C^\infty(\mathbb{R})$ — срезающая функция, равная нулю при $\pm z < 1$ и единице при $\pm z > 2$, а для экспоненциально затухающего остатка имеет место включение $\exp(\tau |z|) \widetilde{U}^{0\prime} \in \mathring{H}^1(\Pi; \partial\Pi)$. Итак, выбрано решение, обладающее линейным ростом на положительной бесконечности. Общее решение задачи (43) в классе функций с линейным ростом на обеих бесконечностях принимает вид

$$U'(x) = (c_0' + c_1' z) U_1(x) + U^{0\prime}(x). \tag{45}$$

Если взять $c_i' = -C_i'$, то в противоположность выбранному ранее решению $U^{0\prime}$ новое частное решение (45) будет экспоненциально затухать при $z \to +\infty$, но расти при $z \to -\infty$. Далее положим

$$c_i' = -\frac{1}{2} C_i', \quad i = 0, 1, \tag{46}$$

$$U'(x) = \sum_\pm \pm \frac{1}{2} X_\pm(z)(C_0' + C_1' z) U_1(x) + \widetilde{U}'(x), \tag{47}$$

уравняв тем самым влияние обеих бесконечностей. Остаток $\widetilde{U}'$ экспоненциально затухает при $z \to \pm\infty$, т. е. удовлетворяет включению $\exp(\tau|z|) \widetilde{U}^{0\prime} \in \mathring{H}^1(\Pi; \partial\Pi)$.

В случае $n \geq 4$ приходится дополнительно заботиться о сингулярностях правой части $F(x)$ в точке x^0. С этой целью введем весовое пространство Кондратьева $V^1_\gamma(\Pi)$ с нормой

$$\left\| U; V^1_\gamma(\Pi) \right\| = (\|\rho^\gamma \nabla_x U; L_2(\Pi)\|^2 + \|\rho^{\gamma-1} U; L_2(\Pi)\|^2)^{1/2},$$

где $\gamma \in \mathbb{R}$ — весовой показатель, а $\rho(x) = \min\{1, |x - x^0|\}$ — весовой множитель, вырождающийся в точке x^0, но превращающийся в единицу на удалении от нее. В силу неравенства Харди (см., например, [23, гл. 2]) в случае $n \geq 3$ пространство $V_0^1(\Pi)$ совпадает с $H^1(\Pi)$, но $V_\gamma^1(\Pi) \subsetneqq H^1(\Pi)$ при $\gamma < 0$ и $V_\gamma^1(\Pi) \supsetneqq H^1(\Pi)$ при $\gamma > 0$. Под $\mathring{V}_\gamma^1(\Pi; \partial\Pi)$ понимаем подпространство функций из $V_\gamma^1(\Pi)$, обращающихся в нуль на $\partial\Pi$. Известно (см. [22, 23], а также [17] с подробными объяснениями перехода от краевых задач в классической постановке к вариационным), что в случае $n \geq 3$ оператор задачи (43), рассматриваемый как отображение $\mathring{V}_\gamma^1(\Pi; \partial\Pi) \to \mathring{V}_{-\gamma}^1(\Pi; \partial\Pi)^*$, наследует все свойства оператора $\mathring{H}^1(\Pi; \partial\Pi) \to \mathring{H}^1(\Pi; \partial\Pi)^*$, если только

$$|\gamma| \leq (n-2)/2. \tag{48}$$

Функция F с компактным носителем в Π и особенностью $O(|x - x^0|^{1-n})$ в точке x^0 попадает в пространство $\mathring{V}_{-\gamma}^1(\Pi; \partial\Pi)^*$ при условии $\gamma < 2 - n/2$, совместимом с требованием (48) при $n \geq 3$. Таким образом, все предшествующие выводы о разрешимости задачи (43), в частности, формулы (44)–(46) сохраняются и при $n \geq 4$.

Вычислим коэффициент C_1' в разложении (44) при помощи метода [24] (см. также [23, § 3.2]). Для этого подставим в формулу Грина на цилиндре $\Pi(T)$ решение U' и функцию U_1. Имеем

$$\begin{gathered}\int\limits_{\Pi(T)} U_1(y)(\Delta_x U'(x) + \Lambda_1 U'(x))\,dx - \int\limits_{\Pi(T)} U_1'(x)(\Delta_y U(y) + \Lambda_1 U_1(y))\,dx \\ = \int\limits_\omega U_1(y)\partial_z U'(y, T)\,dy - \int\limits_\omega U_1(y)\partial_z U'(y, -T)\,dy.\end{gathered} \tag{49}$$

В силу разложения (44) с экспоненциально малым остатком правая часть формулы (49) равна

$$C_1'\|U_1; L_2(\omega)\|^2 + o(1) \quad \text{при } T \to \infty.$$

Второй интеграл в левой части обращается в нуль, так как U_1 — собственная функция задачи (9), отвечающая собственному числу Λ_1. Поскольку $F(x) = O(r^{1-n})$ при $x \to x^0$ и $\operatorname{supp} F$ — компакт, первый интеграл J сходится и может быть вычислен как предел

$$J := \lim_{\delta \to +0} \int\limits_{\Pi \setminus \mathbb{B}_\delta^n(x^0)} U_1(y)(\Delta_x U'(x) + \Lambda_1 U'(x))\,dx;$$

здесь $r = |x - x^0|$ и $\mathbb{B}_\delta^n(x^0) = \{x : r < \delta\}$. Вспомнив, что функция (42), фигурирующая в правой части задачи (43), является гармонической в $\Pi \setminus \mathbb{B}_\delta^n(x^0)$, и применив формулу Грина еще раз, находим, что

$$\begin{gathered}J = -\lim_{\delta \to +0} \int\limits_{\Pi \setminus \mathbb{B}_\delta^n(x^0)} U_1(y)(\Delta_x(\chi_0(x)Y(x) + \Lambda_1 \chi_0(x)Y(x)))\,dx \\ = \lim_{\varrho \to +0} \int\limits_{\partial\mathbb{B}_\varrho^n(x^0)} (U_1(y)\partial_r Y(x) - Y(x)\partial_r U_1(y))\,ds_x.\end{gathered}$$

Теперь выделим в подынтегральном выражении члены порядка δ^{1-n} (остальные уничтожаются либо интегрированием по сфере $\partial\mathbb{B}^n_\delta(x^0)$, либо предельным переходом при $\delta \to +0$). Для указанных членов интегрирование можно вести по единичной сфере. В результате при помощи простых вычислений, опирающихся на формулы (42) и (32), получаем, что

$$\begin{aligned} J = -\Lambda_1 \operatorname{mes}_n \theta |U_1(y^0)|^2 \int\limits_{\partial\mathbb{B}^n_1(x^0)} \frac{\partial\Phi}{\partial r}(x) ds_x \\ - \sum_{j,q=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n} M_{jk}(\theta) \frac{\partial U_1}{\partial y_j}(y^0) \frac{\partial U_1}{\partial y_q}(y^0) \\ \times \int\limits_{\partial\mathbb{B}^n_1(x^0)} \Big((y_q - y_q^0) \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial \Phi}{\partial x_k}(x) - \frac{\partial}{\partial r} (y_q - y_q^0) \frac{\partial\Phi}{\partial x_k}(x) \Big) ds_x \\ = \sum_{j,k=1}^{n-1} M_{jk}(\theta) \frac{\partial U_1}{\partial y_j}(y^0) \frac{\partial U_1}{\partial y_k}(y^0) - \Lambda_1 \operatorname{mes}_n \theta |U_1(y^0)|^2 = D_1^\theta(y^0). \end{aligned} \tag{50}$$

В соответствии с определениями (35) и (14) выводим из соотношений (49), (50) равенство

$$C_1' = D_1^\theta(y^0). \tag{51}$$

Точно так же можно вычислить коэффициент C_0' в асимптотике (44), применив формулу Грина для функций U' и zU_1, однако явное выражение для коэффициента далее востребовано не будет.

Итак, построены все члены асимптотического анзаца (36) для собственной функции, но асимптотическая поправка к собственному числу Λ_1 так и не найдена. Вспомним, что члены U_1 и U' не затухают на бесконечности, примем асимптотический анзац

$$\lambda^\varepsilon = \Lambda_1 - \varepsilon^{2n}\lambda' + o(\varepsilon^{2n}) \tag{52}$$

для собственного числа и заметим, что соответствующая собственная функция u^ε должна допускать следующие разложения:

$$u^\varepsilon(x) = c_\pm^\varepsilon \exp(\pm z(\Lambda_1 - \lambda^\varepsilon)^{1/2}) U_1(y) + o(\exp(\pm z(\Lambda_1 - \lambda^\varepsilon)^{1/2})), \quad z \to \pm\infty. \tag{53}$$

Обозначая многоточием младшие слагаемые, несущественные для предпринимаемого формального анализа, и считая, что $\lambda' > 0$ и $c_\pm^\varepsilon = c_\pm^0 + \varepsilon^n c_\pm' + \dots$, получаем разложение

$$\begin{aligned} u^\varepsilon(x) = \big(c_\pm^0 + \varepsilon^n c_\pm'\big) \exp(\pm z \varepsilon^n \sqrt{\lambda'}) U_1(y) + \dots \\ + c_\pm^0 U_1(y) + \varepsilon^n c_\pm' U_1(y) \pm c_\pm^0 \varepsilon^n \sqrt{\lambda'}\, z U_1(y) + \dots, \quad z \to \pm\infty. \end{aligned} \tag{54}$$

Ввиду соотношений (44)–(46) и (51) анзац (36) вполне согласован с разложением (54) в том случае, если

$$c_\pm^0 = 1, \quad c_\pm' = \pm\frac{1}{2} C_0', \quad \sqrt{\lambda'} = \frac{1}{2} C_1' = \frac{1}{2} D_1^\theta(y^0). \tag{55}$$

Вытекающее из предположения $\lambda^\varepsilon < \Lambda_1$ неравенство $\lambda' > 0$ требует, чтобы точка y^0 лежала в множестве ω_+^θ, на котором согласно (34)

$$D_1^\theta(y^0) > 0. \tag{56}$$

Замечание 9. Во-первых, ограничение (56) противоположно примененному в п. 4 для проверки отсутствия дискретного спектра. Во-вторых, асимптотические формулы (29) и (52) для собственных чисел соответственно в ограниченной сингулярно возмущенной области $\Pi(T)\setminus\Theta^\varepsilon$ и в бесконечном цилиндре $\Pi\setminus\Theta^\varepsilon$ с малым препятствием различаются даже порядками асимптотических поправок (ср. рассуждения в начале пункта). В-третьих, «исправления» поведения асимптотических членов около иррегулярностей границы, аналогичное проведенному в (54), уже применялись в конструкциях глобальных асимптотических приближений (см., например, [25]). $\boxtimes$

В части обоснования асимптотики собственного числа задачи в бесконечном цилиндре с отверстием имеется принципиальное отличие от случая ограниченной области: невозможность применить классическую лемму о «почти собственных» числах и векторах [26]. На помощь приходит теория спектральной меры (см., например, [2, гл. 5, 6]). Согласно спектральной теореме (см. [2, теорема 6.1.1]) введенный в п. 1 самосопряженный оператор A в $L_2(\Omega^\varepsilon)$ порождает спектральную меру E_A, которая, в свою очередь, ставит в соответствие каждому элементу $\mathbf{u} \in L_2(\Omega^\varepsilon)$ скалярную меру $\mu_{\mathbf{u}} = (E_A\mathbf{u}, \mathbf{u})_{\Omega^\varepsilon}$ на $\mathbb{R}$. Далее понадобятся формулы (см., например, доказательство теоремы 6.1.3 в [2])

$$\|\mathbf{u}; L_2(\Omega^\varepsilon)\|^2 = \int\limits_{\mathbb{R}} d\mu_{\mathbf{u}}(\mathbf{t}) \tag{57}$$

при $\mathbf{u} \in L_2(\Omega^\varepsilon)$, а также

$$\|A\mathbf{u} - \boldsymbol{\lambda}\mathbf{u}; L_2(\Omega^\varepsilon)\|^2 = \int\limits_{\mathbb{R}} (\mathbf{t} - \boldsymbol{\lambda})^2\, d\mu_{\mathbf{u}}(\mathbf{t}) \tag{58}$$

при $\mathbf{u} \in \mathscr{D}(A)$ и $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}$. Возьмем разность $\Lambda_1 - \varepsilon^{2n}\lambda'$ в качестве $\boldsymbol{\lambda}$ и положим

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(x) = \sum_{\pm} X_{\pm}(z)\left(1 \pm \frac{1}{2}\varepsilon^n C_0'\right) \exp(\pm\varepsilon^n\sqrt{\lambda'}z)U_1(y)\\ + (1 - X_-(z) - X_+(z))U_1(y) + \varepsilon\chi_0(x)(W_1(h^{-1}(x - x^0))\\ + \varepsilon W_2(h^{-1}(x - x^0))) + \varepsilon^{2n}\widetilde{U}'(x).\end{aligned} \tag{59}$$

При этом использованы формулы (36), (47) и (53)–(55). Роль срезающих функций $X_\pm$, введенных после формулы (47), состоит в гладком «склеивании» двух разнотипных разложений (36) и (54); впрочем, схема склейки [8, § 2.5] существенно отличается от принятой в методе сращиваемых разложений [9].

Поскольку функция $\widetilde{U}'$ экспоненциально затухает, а остальные слагаемые из правой части (59) вне суммы по $\pm$ имеют компактные носители, при большом T и малом ε справедливо неравенство

$$|\mathbf{u}(x)| \geq \mathbf{c}\exp(\pm\varepsilon^n\sqrt{\lambda'}z)U_1(y) \quad \text{при } |z| \geq T,\ \mathbf{c} > 0.$$

Следовательно,

$$\|\mathbf{u}; L_2(\Omega^\varepsilon)\|^2 \geq \mathbf{C}\varepsilon^{-n}, \quad \mathbf{C} > 0. \tag{60}$$

Если теперь предположить, что при некоторых положительных, вообще говоря, малых ℓ и δ сегмент

$$\Upsilon = (\Lambda_1 - \varepsilon^{2n}\lambda' - \ell\varepsilon^{2n+\delta}, \Lambda_1 - \varepsilon^{2n}\lambda' + \ell\varepsilon^{2n+\delta}) \tag{61}$$

свободен от спектра оператора A, то из соотношений (57), (58) и (60) вытекает, что

$$\|A\mathbf{u} - (\Lambda_1 - \varepsilon^{2n}\lambda')\mathbf{u}; L_2(\Omega^\varepsilon)\|^2 = \int\limits_{\mathbb{R}\setminus\Upsilon} (\mathbf{t} - \Lambda_1 - \varepsilon^{2n}\lambda')^2 \, d\mu_{\mathbf{u}}(\mathbf{t})$$

$$\geq \ell^2 \varepsilon^{4n+2\delta} \int\limits_{\mathbb{R}} d\mu_{\mathbf{u}}(\mathbf{t}) \geq \mathbf{C}\ell^2\varepsilon^{3n+2\delta}.$$

Итак, убедившись в том, что

$$\|A\mathbf{u} - (\Lambda_1 - \varepsilon^{2n}\lambda')\mathbf{u}; L_2(\Omega^\varepsilon)\|^2 \leq c\varepsilon^{3n+2\delta}, \tag{62}$$

приходим к противоречию при достаточно малом $\ell > 0$.

К сожалению, приведенные асимптотические конструкции обеспечивают неудовлетворительную мажоранту $c_\bullet \varepsilon^{2n+1}$ в оценке (62) (см. [20]; подробные выкладки приведены также в [27]). Однако это препятствие устраняется легко: при помощи метода составных разложений [8, гл. 2, 4] (альтернативой служит метод сращиваемых разложений [9]) нетрудно построить младшие асимптотические члены и добиться нужного улучшения оценки. Вынося эту известную рутинную и громоздкую процедуру за пределы настоящей статьи, но напоминая, что в понятной модификации нуждаются и соотношения (52), (54), формулируем результат.

Теорема 10. *Пусть $y \in \omega_+^\theta$, т. е. выполнено неравенство* (56). *Тогда найдутся такие положительные числа ε_0 и ℓ, δ, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ дискретный спектр оператора задачи* (4) (*или* (1)–(3)) *в цилиндре* Π *с малым препятствием* (28) *имеет собственное число на сегменте* (61).

Автор не знает, как убедиться в том, что на интервале $(0, \Lambda_1)$ нет собственного числа задачи (8), отличающегося от предоставленного теоремой 10.

6. Обсуждение

В случае малого препятствия (28) множество $\omega_+^\theta \ni y^0$, для которого асимптотический метод позволяет убедиться в наличии дискретного спектра, шире, чем множество ω_+, где применим вариационный метод (ср. соответственно формулы (34) и (24), а также см. определения (35), (14) и предложения 2, 5). Кроме того, при $y^0 \in \omega_-^\theta = \omega \setminus \overline{\omega}_+^\theta$ асимптотический метод гарантирует пустоту дискретного спектра при малом ε. Разумеется, преимущество вариационного метода состоит в том, что он не требует ни малости препятствия, ни положительности подынтегрального выражения на всем множестве Θ. Впрочем, в случае $D_1^\theta(y^0) = 0$ (точка y^0, к которой стягивается препятствие Θ^ε, лежит на линии раздела множеств ω_+^θ и ω_-^θ) главная асимптотическая поправка λ' обращается в нуль, но наличие или отсутствие дискретного спектра может быть в некоторых ситуациях установлено путем анализа младших членов разложения собственного числа (ср. [28]).

Если Θ — трещина, то вариационный метод дает весьма полное описание дискретного спектра (см. пример 6). Обсудим возможности вариационного метода, разумеется, при дополнительном условии малости $\Theta = \Theta^\varepsilon$. Первое слагаемое в выражении (35) обращается в нуль, однако неравенство $D_1^\theta(y^0) > 0$ может сохраниться благодаря матрице Грама $P(\theta)$. Для плоской трещины $\theta \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : \xi_n = 0\}$ (рис. 4(a)) все решения $\mathscr{W}_1, \dots, \mathscr{W}_{n-1}$ тривиальны: у нормали $N = (0, \dots, 0, \pm 1)$ первые $n-1$ компоненты нулевые, а значит, краевые условия в задачах (31) однородные. Кроме того, в формулах (29) и (35) суммы не включают члены с индексами $j = n$ или $k = n$, так как $\partial_z U_1 = 0$. Итак, в случае трещины, которая лежит в плоскости, перпендикулярной оси цилиндра Π, главный член асимптотики (29) собственного числа вырождается и при помощи асимптотического метода не удается сделать вывод о существовании дискретного спектра (на самом деле его нет, см. пример 6). Вместе с тем для изогнутой трещины (рис. 4(c)) или для плоской трещины, пересекающей ось z под острым углом (рис. 4(b)), при удачном ее расположении теорема 10, как и предложение 5, обеспечивает существование собственного числа $\lambda_1^\varepsilon < \Lambda_1$ у задачи (4).

В п. 4, 5 предполагалось, что препятствие Θ^ε расположено внутри цилиндра Π. Это было сделано исключительно для упрощения изложения, метод из [8] позволяет рассмотреть и случай $\Theta^\varepsilon \cap \Pi \neq \varnothing$. Легко доступно и обобщение результатов для нескольких малых препятствий. Подчеркнем, что это обобщение не позволяет построить несколько собственных чисел ниже порога Λ_1. Вопрос о количестве точек дискретного спектра, уже упомянутый в конце п. 5, остался открытым.

Оба метода годятся для обнаружения собственных чисел на непрерывном спектре (выше порога Λ_1) при дополнительных предположениях о симметрии области $\Omega = \Pi \setminus \Theta$: нужно воспользоваться приемом постановки искусственных краевых условий [12] на плоскости геометрической симметрии.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
2. *Бирман М. Ш., Соломяк М. З.* Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1980.
3. *Alonso A., Simon B.* The Birman–Krein–Vishik theory of selfadjoint extensions of semibounded operators // J. Operator Theory. 1980. V. 4, N 2. P. 251–270.
4. *Назаров С. А.* Самосопряженные расширения оператора задачи Дирихле в весовых функциональных пространствах // Мат. сб. 1988. Т. 137, № 2. С. 224–241.
5. *Назаров С. А.* Самосопряженные расширения оператора задачи Дирихле в трехмерной области с ребром // Сиб. журн. индустр. математики. 2008. Т. 11, № 1. С. 80–95.
6. *Камоцкий И. В., Назаров С. А.* Упругие волны, локализованные около периодических семейств дефектов // Докл. РАН. 1999. Т. 368, № 6. С. 771–773.
7. *Камоцкий И. В., Назаров С. А.* Экспоненциально затухающие решения задачи о дифракции на жесткой периодической решетке // Мат. заметки. 2003. Т. 73, № 1. С. 138–140.
8. *Mazja W. G., Nasarow S. A., Plamenewski B. A.* Asymptotische Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singulär gestörten Gebieten. 2. Berlin: Akad.-Verl., 1991.
9. *Ильин А. М.* Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989.
10. *Jones D. S.* The eigenvalues of $\nabla^2 u + \lambda u = 0$ when the boundary conditions are given on semi-infinite domains // Proc. Camb. Phil. Soc. 1953. V. 49. P. 668–684.
11. *Bonnet-Bendhia A.-S., Starling F.* Guided waves by electromagnetic gratings and non-uniqueness examples for the diffraction problem // Math. Meth. Appl. Sci. 1994. V. 77. P. 305–338.
12. *Evans D. V., Levitin M., Vasil'ev D.* Existence theorems for trapped modes // J. Fluid Mech. 1994. V. 261. P. 21–31.
13. *Сухинин С. В.* Волноводное, аномальное и шепчущее свойства периодической цепочки препятствий // Сиб. журн. индустр. математики. 1998. Т. 1, № 2. С. 175–198.
14. *Камоцкий И. В., Назаров С. А.* Расширенная матрица рассеяния и экспоненциально затухающие решения эллиптической задачи в цилиндрической области // Зап. науч. семинаров ПОМИ РАН. 2000. Т. 264. С. 66–82.
15. *Назаров С. А.* Критерий существования затухающих решений в задаче о резонаторе с цилиндрическим волноводом // Функцион. анализ и его прил. 2006. Т. 40, № 2. С. 20–32.

16. *Linton C. M., McIver P.* Embedded trapped modes in water waves and acoustics // Wave Motion. 2007. V. 45. P. 16–29.
17. *Nazarov S. A.* Properties of spectra of boundary value problems in cylindrical and quasicylindrical domains // Sobolev spaces in mathematics. V. II (Maz'ya V., Ed.). 2008. P. 261–309. (Intern. Math. Ser.; V. 9).
18. *Гиндикин С. Г.* Рассказы о физиках и математиках. М.: МЦНМО, 2006.
19. *Linton C. M., McIver P.* The existence of Rayleigh–Bloch surface waves // J. Fluid Mech. 2002. V. 470. P. 85–90.
20. *Мазья В. Г., Назаров С. А., Пламеневский Б. А.* Асимптотические разложения собственных чисел краевых задач для оператора Лапласа в областях с малыми отверстиями // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1984. Т. 48, № 2. С. 347–371.
21. *Полиа Г., Сеге Г.* Изопериметрические неравенства в математической физике. М.: Физматгиз, 1962.
22. *Кондратьев В. А.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Тр. Моск. мат. о-ва. 1963. Т. 16. С. 219–292.
23. *Назаров С. А., Пламеневский Б. А.* Эллиптические задачи в областях с кусочно-гладкой границей. М.: Наука, 1991.
24. *Мазья В. Г., Пламеневский Б. А.* О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач в области с коническими точками // Math. Nachr. 1977. Bd 76. S. 29–60.
25. *Мазья В. Г., Назаров С. А.* Парадоксы предельного перехода в решениях краевых задач при аппроксимации гладких областей многоугольными // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1986. Т. 50, № 6. С. 1156–1177.
26. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. 1957. Т. 12, № 5. С. 3–122.
27. *Nazarov S. A., Sokolowski J.* Spectral problems in shape optimization. Singular boundary perturbations // Asymptotic Anal. 2008. V. 56, N 3–4. P. 159–196.
28. *Камоцкий И. В., Назаров С. А.* Спектральные задачи в сингулярно возмущенных областях и самосопряженные расширения дифференциальных операторов // Тр. С.-Петербург. мат. о-ва. 1998. Т. 6. С. 151–212.

Статья поступила 20 августа 2009 г.

Назаров Сергей Александрович
Институт проблем машиноведения РАН,
Большой пр. В. О., 61, Санкт-Петербург 199178
srgnazarov@yahoo.co.uk