Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2010. Том 51, № 5

УДК 517.984.56

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ САМОСОПРЯЖЕННОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ДВУМЕРНОМ ТОРЕ

В. М. Каплицкий

Аннотация. Исследуются асимптотические свойства дискретного спектра общих самосопряженных гиперболических операторов второго порядка на двумерном торе. Для широкого класса операторов с достаточно гладкими коэффициентами и главной частью, совпадающей с волновым оператором в координатах светового конуса, доказана дискретность спектра и получена асимптотическая формула для функций распределения собственных значений. Выделены случаи, в которых можно указать два первых члена асимптотики функции распределения собственных значений. Обсуждаются связи рассмотренных вопросов с аналитической теорией чисел и математической физикой.

Ключевые слова: гиперболический оператор, распределение собственных значений, спектр.

Введение

В настоящее время вопросы распределения собственных значений операторов эллиптического типа изучены весьма детально (см. [1–4]). Созданы достаточно общие методы, позволяющие найти главный член спектральной асимптотики эллиптического дифференциального или псевдодифференциального оператора, из которых, по-видимому, наиболее общим и сильным является метод приближенного спектрального проектора [2–5]. В недавних работах [6, 7] отмечается, что спектральные задачи для гиперболических дифференциальных уравнений могут иметь важные физические приложения в связи с проблемой спектра масс элементарных частиц. При этом положительные собственные значения соответствующих волновых операторов на псевдоримановых многообразиях интерпретируются как квадраты масс частиц. Некоторые похожие проблемы возникают и в классической математической физике (см. [8, 9] и имеющиеся в [9] ссылки) в связи с задачей С. Л. Соболева о движении жидкости во вращающемся сосуде. Задачи нахождения условий дискретности спектра и вычисления асимптотики собственных чисел гиперболических операторов на многообразиях, обладающих дискретным спектром, являются практически неисследованными. В работе [10] получен главный член асимптотики функции распределения собственных значений оператора некоторой простейшей модельной квазипериодической краевой задачи для самосопряженного гиперболического уравнения второго порядка с гладкими коэффициентами на двумерном торе. В настоящей работе с помощью более совершенной методики мы решаем аналогичную задачу для общего самосопряженного гиперболического оператора A второго порядка (см. § 3) на двумерном торе T^2 с достаточно гладкими коэффициентами, удовлетворяющими условиям, обеспечивающим дискретность спектра. Если такой оператор имеет дискретный спектр и $N(\lambda; A) = \operatorname{card}\{j : |\lambda_j(A)| \le \lambda\}$ — функция распределения собственных чисел оператора A, то

$$N(\lambda; A) \sim \frac{S(T^2)}{\pi^2}\lambda \ln \lambda \quad \text{при } \lambda \to +\infty, \tag{1}$$

где $S(T^2)$ — площадь тора $T^2 = \mathbb{R}^2/a\mathbb{Z} \times b\mathbb{Z}$.

Метод исследования состоит в построении регуляризатора для гиперболического оператора и сведении задачи к исследованию спектра линейного операторного пучка, для которого спектр главной «невозмущенной» части считается явно, а «возмущение» не дает вклада в главный член асимптотики функции $N(\lambda; A)$ при $\lambda \to +\infty$. Явное вычисление асимптотики спектра «невозмущенного» пучка сводится к классической задаче нахождения асимптотики числа целых точек в области, ограниченной гиперболой, при неограниченном расширении области (асимптотика строится по параметру, который характеризует расширение области). Вообще говоря, для произвольного гиперболического оператора второго порядка на торе T^2 спектр может оказаться дискретным лишь при $|\lambda| > \rho$, где $\rho > 0$ — некоторое фиксированное число. В некоторых случаях формула (1) обоснована для функции $N_\rho(\lambda; A)$, где $N_\rho(\lambda; A)$ — число собственных значений $\lambda_j(A)$ таких, что $\rho \le |\lambda_j(A)| \le \lambda$. Например, если коэффициенты оператора A при первых производных обращаются в нуль, т. е. если $A = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + b(x, y)$, а также в случае оператора вида $A = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + b(t, x)$, где $b \in \mathbb{C}(T^2)$, для функции $N_\rho(\lambda; A)$ справедлива двучленная асимптотическая формула

$$N_\rho(\lambda; A) = c_0 \lambda \ln \lambda + c_1 \lambda + O(\sqrt{\lambda}).$$

Отметим, что такая же формула описывает асимптотику функции распределения нулей ζ-функции Римана, лежащих в прямоугольнике $0 < \operatorname{Re} s < 1$, $|\operatorname{Im} s| < \lambda$, при $\lambda \to \infty$ (см. [11]), причем совпадают (с точностью до коэффициентов) два первых члена асимптотики. Такое совпадение вряд ли можно считать случайностью. По всей видимости оно означает, что точечный спектр операторов рассматриваемого класса определяется нулями аналитических функций, являющихся близкими аналогами ζ-функции Римана.

§ 1. Вспомогательные результаты о собственных числах и s-числах линейных операторов

В работе будут использованы классические результаты о s-числах вполне непрерывных операторов (см. [12, 13]) и теоремы об асимптотике собственных значений операторов, близких к нормальным, полученные А. С. Маркусом и В. И. Мацаевым [14, 15]. В данном параграфе мы приводим эти результаты в удобной для нас форме. Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство. Через $\operatorname{Comp}(H)$ обозначается множество всех линейных вполне непрерывных (компактных) операторов в H. Пусть $A \in \operatorname{Comp}(H)$, тогда и $|A| = (A^*A)^{\frac{1}{2}} \in \operatorname{Comp}(H)$. Собственные числа оператора $|A|$ называются *s-числами* оператора

A. Ненулевые s-числа будем нумеровать в порядке убывания с учетом их кратности: $s_j(A) = \lambda_j(|A|)$, $j = 1, 2, \dots, \dim|A|(H)$. Если $r = \dim|A|(H) < \infty$, то полагаем $s_j(A) = 0$ при $j = r+1, \dots$. Таким образом, $s_{j+1}(A) \le s_j(A)$, причем $\lim\limits_{j\to\infty} s_j(A) = 0$. Отметим следующие свойства s-чисел:

1) если $A \in \mathrm{Comp}(H)$, B — произвольный ограниченный оператор, то

$$s_j(BA) \le \|B\| s_j(A) \ (j = 1, 2, \dots), \quad s_j(AB) \le \|B\| s_j(A) \ (j = 1, 2, \dots);$$

2) если $A, B \in \mathrm{Comp}(H)$, то

$$s_{m+n-1}(A+B) \le s_m(A) + s_n(B) \quad (m, n = 1, 2, \dots).$$

Теорема (Ки Фань [13; 12, гл. II, § 2]). *Пусть $A, B \in \mathrm{Comp}(H)$, $\alpha > 0$ и*

$$\lim_{n\to\infty} n^\alpha L(n) s_n(A) = a > 0, \quad \lim_{n\to\infty} n^\alpha L(n) s_n(B) = 0,$$

где $L(n)$ — медленно меняющаяся функция, т. е. для любого $b > 0$

$$\lim_{\nu_i\to\infty, \nu_2/\nu_1\to b} \frac{L(\nu_2)}{L(\nu_1)} = 1.$$

Тогда $s_n(A+B) \sim s_n(A)$ при $n \to \infty$.

Пример медленно меняющейся функции дает функция $L(n) = \ln^\beta(n+2)$. Пусть A — некоторый оператор с дискретным спектром. Через $N(r; A)$ обозначим функцию распределения всех его собственных чисел, а через $N(r, \Omega; A)$ — функцию распределения его собственных чисел, принадлежащих некоторому неограниченному множеству $\Omega \subset \mathbb{C}$. Напомним, что $N(r; A) = \mathrm{card}\{j : |\lambda_j(A)| \le r\}$, $N(r, \Omega; A) = \mathrm{card}\{j : \lambda_j(A) \in \Omega, |\lambda_j(A)| \le r\}$. Эти понятия естественно распространяются на аналитические оператор-функции. Пусть $A(\lambda) : \Omega \to L(H)$ — аналитическая оператор-функция, причем все операторы $A(\lambda)$ при $\lambda \in \Omega$ — нётеровы (т. е. $\dim\ker A(\lambda) < +\infty$, $\dim(H/\mathrm{Ran}(A(\lambda)) < +\infty)$. *Спектром* оператор-функции $A(\lambda)$ называется множество тех $\lambda \in \Omega$, при которых оператор $A(\lambda)$ необратим. *Характеристическим числом* оператор-функции $A(\lambda)$ называется точка $\lambda_0 \in \Omega$ такая, что уравнение $A(\lambda_0)x = 0$ имеет нетривиальное решение. Если λ_0 — характеристическое число оператор-функции $A(\lambda)$, то через $m(\lambda_0, A(\lambda))$ обозначают алгебраическую кратность этого характеристического числа в смысле М. В. Келдыша, т. е. число векторов в канонической системе собственных и присоединенных векторов оператор-функции $A(\lambda)$, соответствующих характеристическому числу λ_0 (определение см. в [12, 15]). Для оператор-функций, связанных с самосопряженной спектральной задачей, а также для оператор-функций, отличающихся от них на постоянный операторный множитель, кратность характеристического числа по М. В. Келдышу совпадает с геометрической кратностью характеристического числа, т. е. $m(\lambda_0, A(\lambda)) = \dim\ker A(\lambda_0)$ (так как у таких оператор-функций присоединенные векторы отсутствуют). Говорят, что спектр $A(\lambda)$ в области Ω *дискретен*, если он состоит из не более чем счетного числа характеристических чисел конечной алгебраической кратности с единственной возможной предельной точкой на бесконечности. В этом случае функция $N(r, \Omega; A(\lambda))$ определяется как сумма алгебраических кратностей характеристических чисел $\lambda_j(A(\lambda))$ оператор-функции $A(\lambda)$, лежащих в области Ω и удовлетворяющих условию $|\lambda_j(A(\lambda))| \le r$. Через $N(r; A(\lambda))$ обозначается функция распределения всех характеристических чисел оператор-функции $A(\lambda)$. Для нас существен случай, когда $A(\lambda) = A_1 - \lambda A_2 = T(A - \lambda I)$, где A — самосопряженный оператор, T — ограниченный оператор с нулевым ядром. В этом случае оператор-функция $A(\lambda) = A_1 - \lambda A_2$ является линейным операторным пучком, у которого алгебраическая кратность характеристических чисел совпадает с их геометрической кратностью. Следующие результаты получены в [14] (см. также [15]). Пусть A — нормальный оператор с дискретным спектром, B — произвольный линейный оператор такой, что $D(B) \subset D(A)$. Говорят, что оператор B *подчинен оператору* A *с порядком* p $(0 \le p \le 1)$, если существует число $M > 0$ такое, что

$$\|Bx\| \le M\|Ax\|^p\|x\|^{1-p} \quad (x \in D(A)).$$

Пусть A_0 — нормальный оператор с дискретным спектром, $\Phi_0 = \{\lambda : |\arg\lambda - \theta| < \sigma\}$ $(\sigma > 0)$, $l = \{\lambda : \arg\lambda = \theta\}$, $0 \le p < 1$, и функция распределения $N(r, l; A_0)$ оператора A_0 удовлетворяет условию:

$$N(r + mr^p, l; A_0) - N(r - mr^p, l; A_0) \to +\infty \quad \text{при } r \to +\infty \tag{1.1}$$

для любого $m > 0$.

Теорема 1.1. *Пусть оператор* B *подчинен оператору* A_0 *с порядком* p $(0 \le p < 1)$, *все собственные числа оператора* A_0, *расположенные в угле* Φ_0, *лежат на луче* l *и выполнено условие* (1.1). *Положим* $A = A_0 + B$ *и* $\Phi = \{\lambda : |\arg\lambda - \theta| < \sigma/2\}$. *Тогда существует постоянная* $m > 0$ *такая, что*

$$|N(r, \Phi; A) - N(r, l; A_0)| \le C(N(r + mr^p, l; A_0) - N(r - mr^p, l; A_0))$$

при всех достаточно больших r, *где* $C > 0$ *— некоторая постоянная, зависящая от* σ, p.

Пусть G — нормальный вполне непрерывный оператор, $\ker G = \{0\}$, спектр операторного пучка $A_0(\lambda) = I - \lambda G$ в области

$$\Omega_{\rho,\sigma} = \{\lambda : |\lambda| > \rho, |\arg\lambda - \theta| < \sigma\} \quad (\sigma > 0)$$

дискретен и все характеристические числа пучка $A_0(\lambda)$ лежат на фиксированном луче $l = \{\lambda : \arg\lambda = \theta\}$. Рассмотрим линейный операторный пучок $A(\lambda) = I - \lambda G - T$, где T — вполне непрерывный оператор.

Теорема 1.2. *Если*

$$\lim_{\substack{r\to\infty,\\ \varepsilon\to 0}} \frac{N(r(1+\varepsilon), l; A_0(\lambda))}{N(r, l; A_0(\lambda))} = 1,$$

то существует $\rho_1 > \rho$ *такое, что спектр пучка* $A(\lambda)$ *в области* $\Omega_{\rho_1,\frac{\sigma}{2}}$ *дискретен и*

$$N(r; \Omega_{\rho_1,\frac{\sigma}{2}}; A(\lambda)) \sim N(r, l; A_0(\lambda)) \quad \text{при } r \to \infty.$$

Пусть спектр пучка $A_0(\lambda)$ бесконечен, дискретен, лежит на вещественной оси и

$$\lim_{\substack{r\to\infty,\\ \varepsilon\to 0}} \frac{N((1+\varepsilon)r; A_0(\lambda))}{N(r; A_0(\lambda))} = 1. \tag{1.2}$$

Как следует из результатов работы [15], в этом случае существуют постоянные $\rho_1 > 0$, $\sigma_1 > 0$ такие, что спектр пучка $A(\lambda)$ в области $\Omega_{\rho_1,\sigma_1} \cup \Omega^*_{\rho_1,\sigma_1}$, где $\Omega^*_{\rho_1,\sigma_1}$ — область, симметричная области Ω_{ρ_1,σ_1} относительно начала координат, дискретен, причем $N(r, \Omega_{\rho_1,\sigma_1} \cup \Omega^*_{\rho_1,\sigma_1}; A(\lambda)) \sim N(r; A_0(\lambda))$ при $r \to \infty$. Условие (1.2) выполнено, например, в случае, когда $N(r; A_0(\lambda)) \sim c r^{\alpha} \ln^{\beta} r$ при $r \to \infty$, где $c > 0$, $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$. Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$ с кусочно гладкой границей, $a(x, y) \in L_2(D \times D)$ и $A : L_2(D) \to L_2(D)$ — интегральный оператор,

$$(A\varphi)(x) = \int_D a(x, y)\varphi(y)\, dy.$$

Ядро $b(x, y)$ называется *производной в среднем по* x_j *ядра* $a(x, y)$, если

$$\lim_{h \to 0} \int_D \left| b(x, y) - \frac{a(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + h, x_{j+1}, \dots, x_n) - a(x, y)}{h} \right|^2 dy = 0,$$

причем $\int_D |b(x, y)|^2\, dy < \infty$ $(x \in D)$.

В работе [16] получен следующий результат, связывающий скорость убывания s-чисел интегрального оператора A с гладкостью его ядра.

Теорема 1.3. *Если ядро $a(x, y)$ имеет все производные в среднем порядка l по переменным $x_1, x_2, \dots, x_n$, которые являются ядрами Гильберта — Шмидта, то $s_j(A) = o(j^{-r})$ $(j \to \infty)$, где $r = \frac{n+2l}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{l}{n}$.*

Формула для r из [16] нуждается в очевидном исправлении. Правильное выражение для r приведено выше и совпадает с формулой для r в тексте доказательства теоремы в цитированной работе. Так как $s_j(A^*) = s_j(A)$, теорема справедлива и в случае, если ядро $a(x, y)$ имеет производные в среднем порядка l по переменным $y_1, y_2, \dots, y_n$, поскольку в этом случае условия теоремы выполнены для ядра сопряженного оператора.

§ 2. Вычисление асимптотики спектра в случае квазипериодической краевой задачи для гиперболического оператора с постоянными коэффициентами

При вычислении асимптотики спектра общих гиперболических операторов на двумерном торе $T^2 = \mathbb{R}^2 / a\mathbb{Z} \times b\mathbb{Z}$ возникает задача о нахождении такой асимптотики в случае простейшей краевой задачи с периодическими или квазипериодическими граничными условиями для оператора $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$. Пусть $C^{\infty}_{\theta_1, \theta_2}(\mathbb{R}^2)$ — множество бесконечно дифференцируемых функций таких, что

$$\varphi(x + a, y) = \theta_1 \varphi(x, y), \quad \varphi(x, y + b) = \theta_2 \varphi(x, y), \tag{2.1}$$

где θ_1, θ_2 — комплексные постоянные, причем $|\theta_1| = |\theta_2| = 1$. Рассмотрим задачу нахождения асимптотики спектра краевой задачи вида

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \lambda \varphi, \tag{2.2}$$

где φ удовлетворяет условиям (2.1).

Пусть $\mathscr{H}_{\theta_1, \theta_2}(\mathbb{R}^2)$ — гильбертово пространство, полученное пополнением $C^{\infty}_{\theta_1, \theta_2}(\mathbb{R}^2)$ по норме

$$\|\varphi\|_{\mathscr{H}_{\theta_1, \theta_2}(\mathbb{R}^2)} = \sqrt{\int_0^a \int_0^b \left|\varphi(x, y)\right|^2 dx dy}.$$

В случае $\theta_1 = \theta_2 = 1$ будем применять обозначение $\mathscr{H}_1(\mathbb{R}^2) = \mathscr{H}_{1,1}(\mathbb{R}^2)$.

Пусть $D(A_0) = C^\infty_{\theta_1,\theta_2}(\mathbb{R}^2)$, $A_0\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}$, $\varphi \in D(A_0)$.

Оператор $A_0 : D(A_0) \to \mathscr{H}_{\theta_1,\theta_2}(\mathbb{R}^2)$ является симметрическим. Очевидно, что точечный спектр оператора A_0 совпадает со спектром краевой задачи (2.1)–(2.2). Через Π далее обозначается прямоугольник $(0,a)\times(0,b)$. Точечный спектр A_0 в случае $\theta_1 \neq 1$, $\theta_2 \neq 1$ является конечнократным с единственной предельной точкой на бесконечности. Пусть $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ — последовательность собственных значений A_0, причем каждое из них повторяется в этой последовательности столько раз, какова его кратность. Пусть $N_+^0(\lambda) = \operatorname{card}\{n : 0 \le \lambda_n \le \lambda\}$. Найдем асимптотику функции $N_+^0(\lambda)$ при $\lambda \to +\infty$. Ищем решения уравнения (2.2) в виде $\varphi(x,y) = X(x)Y(y)$. Подставляя это выражение в уравнение (2.2), имеем $X'(x)Y'(y) = \lambda X(x)Y(y)$, т. е.

$$\frac{X'(x)}{X(x)} = \lambda\frac{Y(y)}{Y'(y)} = c = \mathrm{const},$$

и соответственно $\varphi(x,y) = De^{cx+\frac{\lambda}{c}y} = De^{iwx-i\frac{\lambda}{w}y}$, где $w = \frac{c}{i}$. Пусть постоянные θ_1, θ_2 в краевых условиях имеют вид $\theta_1 = e^{2\pi\alpha_1 i}, \theta_2 = e^{2\pi\alpha_2 i}$. Без ограничения общности можно считать, что $\alpha_i \in [0,1)$, $i = 1,2$. Для выполнения краевых условий необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства $e^{iwa} = \theta_1 = e^{2\pi\alpha_1 i}$, $e^{-i\frac{\lambda b}{w}} = \theta_2 = e^{2\pi\alpha_2 i}$, т. е. $wa = 2\pi\alpha_1 + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$, и соответственно $w = w_m = \frac{2\pi}{a}(m+\alpha_1)$, $\frac{\lambda b}{w_m} = -2\pi\alpha_2 + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, откуда

$$\lambda = \lambda_{m,n} = \frac{(2\pi)^2}{ab}(m+\alpha_1)(n-\alpha_2), \quad m,n \in \mathbb{Z}. \tag{2.3}$$

Таким образом, собственные функции задачи (2.1), (2.2) имеют вид

$$\varphi_{m,n}(x,y) = D_{m,n}e^{i\frac{2\pi}{a}(m+\alpha_1)x - i\frac{2\pi}{b}(n-\alpha_2)y}.$$

Пусть постоянные $D_{m,n}$ выбраны так, чтобы выполнялось условие нормировки: $\|\varphi_{m,n}\|_{L_2(\Pi)} = 1$. Построенная ортонормированная система собственных функций полна, поэтому других собственных функций оператор A_0 не имеет. Пусть $\alpha_i \in (0,1)$. Тогда $\theta_i \neq 1$. Покажем, что каждое собственное значение имеет конечную кратность. Кратность $\lambda_0 = \lambda_{m_0,n_0}$ равна числу целочисленных решений (m,n) уравнения

$$\frac{(2\pi)^2}{ab}(m+\alpha_1)(n-\alpha_2) = \lambda_0. \tag{2.4}$$

Поскольку расстояние между нецелыми точками α_i и решеткой $\mathbb{Z}$ больше нуля, $\inf\limits_{m\in\mathbb{Z}}|m+\alpha_1| = d_1 > 0$, $\inf\limits_{n\in\mathbb{Z}}|n-\alpha_2| = d_2 > 0$ и из уравнения (2.4) следует, что $\frac{(2\pi)^2}{ab}d_2|m+\alpha_1| \le |\lambda_0|$, $\frac{(2\pi)^2}{ab}d_1|n-\alpha_2| \le |\lambda_0|$. Таким образом, существует постоянная $c > 0$ такая, что все решения (m,n) уравнения (2.4) лежат внутри квадрата со стороной $2c|\lambda_0|$, т. е. $|m| \le c|\lambda_0|$, $|n| \le c|\lambda_0|$. Отсюда следует, что уравнение (2.4) имеет конечное число целочисленных решений.

Теорема 2.1. *Пусть $\theta_1 \neq 1$, $\theta_2 \neq 1$. Тогда оператор A_0 имеет конечнократный точечный спектр с единственной предельной точкой на бесконечности, причем*

$$N_+^0(\lambda) = c_0\lambda\ln\lambda + c_1\lambda + O(\sqrt{\lambda}) \quad \text{при } \lambda \to +\infty,$$

где

$$c_0 = \frac{1}{2\pi^2} S(T^2), \quad c_1 = \frac{S(T^2)}{2\pi^2}(2C - 1 + G(\alpha_1) + G(\alpha_2)) + \frac{S(T^2)}{2\pi^2} \ln \frac{S(T^2)}{4\pi^2},$$

$$G(\alpha) = \frac{\alpha}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+\alpha)} + \frac{1-\alpha}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+(1-\alpha))}, \tag{2.5}$$

C — постоянная Эйлера, $S(T^2)$ — площадь тора T^2.

Доказательство. Из (2.4) следует, что $N_+^0(\lambda)$ равно числу пар (m, n) с целыми m и n, удовлетворяющих неравенству $0 \le (m + \alpha_1)(n - \alpha_2) \le \frac{ab}{(2\pi)^2}\lambda$. Если $m \ge 0$, то из этого неравенства следует, что $n > 0$ (поскольку $0 < \alpha_2 < 1$), если же $m < 0$, то $n \le 0$ (в противном случае произведение $(m + \alpha_1)(n - \alpha_2)$ отрицательно). Таким образом, интересующие нас точки лежат либо в первой, либо в третьей четверти. Пусть $N_+^0(\lambda) = N_1(\lambda) + N_2(\lambda)$, где $N_1(\lambda)$ — число целочисленных решений неравенства

$$0 < (x + \alpha_1)(y - \alpha_2) \le \frac{ab}{(2\pi)^2}\lambda \tag{2.6}$$

таких, что $x \ge 0$, $y \ge 0$, а $N_2(\lambda)$ — число целочисленных решений (2.6), удовлетворяющих условию $x \le 0$, $y \le 0$. Пусть $\frac{ab}{(2\pi)^2}\lambda = N$. Имеем $0 < (x + \alpha_1)y - \alpha_2(x + \alpha_1) \le N$, т. е.

$$0 < y \le \frac{N}{x + \alpha_1} + \alpha_2. \tag{2.7}$$

Пусть $S(N)$ — число точек (x, y) с целочисленными координатами, удовлетворяющих (2.7). Тогда $S(N)$ — это число целых точек в первой четверти, которые лежат на или ниже гиперболы $y = \frac{N}{x+\alpha_1} + \alpha_2$, но не лежат на прямой $y = 0$. Найдем асимптотику $S(N)$ при $N \to \infty$. В случае гиперболы $y = \frac{N}{x}$ соответствующая задача была решена Дирихле. Известно, что $S(N) = N \ln N + (2C - 1)N + O(\sqrt{N})$ (см. [17]). Используя геометрический прием Дирихле, нетрудно получить аналогичную формулу для рассматриваемого случая. Возьмем на гиперболе $y = \frac{N}{x+\alpha_1} + \alpha_2$ точку $D(\sqrt{N}, y(\sqrt{N}))$, точку $A(0, y(0))$ и точку B, которая является точкой пересечения гиперболы и прямой $y = 1$. Пусть D' — проекция точки D на прямую $y = 1$, B'', D'' — проекции точек B и D на ось OY. Тогда $S(N)$ равно числу целых точек в криволинейных трапециях $AB''D'D$ и $BB''D''D$ минус число целых точек в прямоугольнике $DD'B''D''$. Число целых точек в криволинейной трапеции $a \le x \le b$, $0 < y \le f(x)$ равно $\sum\limits_{a \le k \le b} [f(k)]$, поэтому

$$S(N) = \sum_{k=0}^{[\sqrt{N}]} \left[\frac{N}{k + \alpha_1} + \alpha_2\right] + \sum_{k=1}^{[y(\sqrt{N})]} \left[\frac{N}{k - \alpha_2} - \alpha_1\right] - \sum_{k=1}^{[\sqrt{N}]} [y(\sqrt{N})].$$

Имеем $y(\sqrt{N}) = N/(\sqrt{N} + \alpha_1) + \alpha_2 = \sqrt{N} + O(1)$, $[N/(k + \alpha_1) + \alpha_2] = N/(k + \alpha_1) + \eta_1(k)$, $|\eta_1(k)| \le c_1$, $[N(k - \alpha_2) - \alpha_1] = N/(k - \alpha_2) + \eta_2(k)$, $|\eta_2(k)| \le c_2$. Отсюда получаем, что

$$S(N) = N \sum_{k=0}^{[\sqrt{N}]} \frac{1}{k + \alpha_1} + N \sum_{k=1}^{[y(\sqrt{N})]} \frac{1}{k - \alpha_2} - S_0(N) + O(\sqrt{N}),$$

где $S_0(N)=\sum\limits_{k=1}^{[\sqrt{N}]}[y(\sqrt{N})]$. Пусть $S_N(\alpha)=\sum\limits_{k=0}^{N}\frac{1}{k+\alpha}$, $\quad \alpha\in(0,1)$. Тогда

$$S_N(\alpha)=\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{k+\alpha-1}=\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{k}+\sum_{k=1}^{N-1}\left(\frac{1}{k+\alpha-1}-\frac{1}{k}\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{k}+(1-\alpha)\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{k(k+(1-\alpha))}.$$

Известно (см. [17]), что $\sum\limits_{k=1}^{N}\frac{1}{k}=\ln N+C+\varepsilon_N$, где C — постоянная Эйлера, $\varepsilon_N\to 0$ при $N\to 0$. Учтем еще, что $\sum\limits_{k=1}^{N-1}\frac{1}{k(k+(1-\alpha))}=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+(1-\alpha))}+O\big(\frac{1}{N}\big)$. Из предыдущих формул следует, что

$$N\sum_{k=1}^{[\sqrt{N}]}\frac{1}{k+\alpha_1}=NS_{[\sqrt{N}]}(\alpha_1)=N\ln[\sqrt{N}]+(C+F(\alpha_1))N+O(\sqrt{N}),$$

где $F(\alpha)=(1-\alpha)\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+(1-\alpha))}$.

Далее,

$$N\sum_{k=1}^{[y(\sqrt{N})]}\frac{1}{k-\alpha_2}$$
$$=N\sum_{k=0}^{[y(\sqrt{N})]-1}\frac{1}{k+(1-\alpha_2)}=N\ln([y(\sqrt{N})]-1)+(C+F(1-\alpha_2))N+O(\sqrt{N}).$$

Поскольку $[y(\sqrt{N})]=\sqrt{N}+O(1)$, $\ln[\sqrt{N}]=\frac{1}{2}\ln N+\varepsilon'_N$, $\ln([y(\sqrt{N})]-1)=\frac{1}{2}\ln N+\varepsilon''_N$, где $\varepsilon'_N,\varepsilon''_N\to 0$ при $N\to\infty$ и $S_0(N)=[\sqrt{N}]\cdot[y(\sqrt{N})]=N+O(\sqrt{N})$, окончательно получаем, что

$$S(N)=N\ln N+(2C-1+F(\alpha_1)+F(1-\alpha_2))N+O(\sqrt{N}).$$

Таким образом,

$$N_1(\lambda)=S\left(\frac{ab}{(2\pi)^2}\lambda\right)=\frac{ab}{4\pi^2}\lambda\ln\left(\frac{ab}{4\pi^2}\lambda\right)$$
$$+(2C-1+F(\alpha_1)+F(1-\alpha_2))\frac{ab}{4\pi^2}\lambda+O(\sqrt{\lambda})=\frac{S(T^2)}{4\pi^2}\lambda\ln\lambda$$
$$+\left((2C-1+F(\alpha_1)+F(1-\alpha_2))\frac{S(T^2)}{4\pi^2}+\frac{S(T^2)}{4\pi^2}\ln\frac{S(T^2)}{4\pi^2}\right)\lambda+O(\sqrt{\lambda}).$$

Асимптотика $N_2(\lambda)$ вычисляется аналогичным образом и выводится из полученной формулы заменой $\alpha_1\to\alpha_2$, $\alpha_2\to 1-\alpha_1$. Поскольку $N^0_+(\lambda)=N_1(\lambda)+N_2(\lambda)$, имеем

$$N^0_+(\lambda)=c_0\lambda\ln\lambda+c_1\lambda+O(\sqrt{\lambda}),\tag{2.8}$$

где

$$c_0=\frac{S(T^2)}{2\pi^2},\quad c_1=\frac{1}{2\pi^2}(2C-1+G(\alpha_1)+G(\alpha_2))S(T^2)+\frac{S(T^2)}{2\pi^2}\ln\frac{S(T^2)}{4\pi^2},$$
$$G(\alpha)=\frac{1}{2}F(\alpha)+\frac{1}{2}F(1-\alpha)=\frac{\alpha}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+\alpha)}+\frac{1-\alpha}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+(1-\alpha))}.$$

Теорема доказана.

Теорема 2.2. *Пусть* $\theta_j = e^{2\pi\alpha_j i}$, $\alpha_j \in (0,1)$, $N^0(\lambda) = \operatorname{card}\{j : |\lambda_j(A_0)| \le \lambda\}$. *Тогда*

$$N^0(\lambda) = c_0\lambda\ln\lambda + c_1\lambda + O(\sqrt{\lambda}) \quad \textit{при } \lambda \to +\infty, \tag{2.9}$$

где

$$c_0 = \frac{S(T^2)}{\pi^2}, \quad c_1 = (2C - 1 + G(\alpha_1) + G(\alpha_2))\frac{S(T^2)}{\pi^2} + \frac{S(T^2)}{\pi^2}\ln\frac{S(T^2)}{4\pi^2},$$

функция $G(\alpha)$ *определена формулой* (2.5), C *— постоянная Эйлера.*

Доказательство. Положим $N^0_-(\lambda) = \operatorname{card}\{j : -\lambda \le \lambda_j(A_0) < 0\}$. Тогда $N^0(\lambda) = N^0_+(\lambda) + N^0_-(\lambda)$. Найдем асимптотику $N^0_-(\lambda)$. Пусть $A_0\varphi = \lambda\varphi$, $\varphi \in D(A_0)$ и $\lambda < 0$. Положим $\lambda = -\mu$ и $\widetilde{\varphi}(x,y) = \varphi(a-x,y)$. Тогда $A_0\widetilde{\varphi} = -A_0\varphi = \mu\widetilde{\varphi}$ и, кроме того, функция $\widetilde{\varphi}$ удовлетворяет граничным условиям $\widetilde{\varphi}(a,y) = \theta_1^{-1}\widetilde{\varphi}(0,y)$, $\widetilde{\varphi}(x,b) = \theta_2\widetilde{\varphi}(x,b)$, т. е. $\widetilde{\varphi} \in C^\infty_{\theta_1^{-1},\theta_2}(\mathbb{R}^2)$, а значит, $N_-(\lambda; A_0) = N_+(\lambda; \widetilde{A}_0)$, где $\widetilde{A}_0 : C^\infty_{\theta_1^{-1},\theta_2} \to \mathscr{H}_{\theta_1^{-1},\theta_2}(\mathbb{R}^2)$, $\widetilde{A}_0\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}$. Переход от θ_1 к θ_1^{-1} соответствует замене $\alpha_1 \to 1-\alpha_1$ (поскольку $\theta_1^{-1} = e^{-2\pi\alpha_1 i} = e^{2\pi(1-\alpha_1)i}$), поэтому асимптотика $N^0_-(\lambda) = N^0_-(\lambda; A_0)$ получается из формулы (2.8) после соответствующей замены параметров. Складывая $N^0_+(\lambda)$ и $N^0_-(\lambda)$, получим формулу (2.9). Теорема доказана.

Для дальнейшего нам понадобится функция Грина оператора A_0, т. е. функция $\mathscr{E}_0(x,y;\xi,\eta)$, гладкая при $x \ne \xi (\operatorname{mod} a)$, $y \ne \eta (\operatorname{mod} b)$, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{\partial^2\mathscr{E}_0(x,y;\xi,\eta)}{\partial x\partial y} = \delta(x-\xi, y-\eta)$$

при $(x,y) \in \Pi$, $(\xi,\eta) \in \Pi$, где $\delta(x-\xi,y-\eta)$ — δ-функция Дирака, и краевым условиям

$$\mathscr{E}_0(x+a,y;\xi,\eta) = \theta_1\mathscr{E}_0(x,y;\xi,\eta), \quad \mathscr{E}_0(x,y+b;\xi,\eta) = \theta_2\mathscr{E}_0(x,y;\xi,\eta).$$

Пусть $H(x)$ — функция Хевисайда, т. е. $H(x) = 1$ при $x > 0$, $H(x) = 0$ при $x \le 0$. Положим $\Phi_0(x,y) = (H(x)+c_1)(H(y)+c_2)$, где c_1, c_2 — постоянные такие, что $c_1 = \frac{1}{\theta_1-1}$, $c_2 = \frac{1}{\theta_2-1}$, а точка (x,y) принадлежит прямоугольнику $\overline{\Pi}_0 = \left[-\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right] \times \left[-\frac{b}{2},\frac{b}{2}\right]$. Тогда функция Φ_0 удовлетворяет квазипериодическим краевым условиям

$$\Phi_0\left(\frac{a}{2},y\right) = \left(1+\frac{1}{\theta_1-1}\right)(H(y)+c_2) = \frac{\theta_1}{\theta_1-1}(H(y)+c_2) = \theta_1\Phi_0\left(-\frac{a}{2},y\right),$$

$$\Phi_0\left(x,\frac{b}{2}\right) = \left(1+\frac{1}{\theta_2-1}\right)(H(x)+c_1) = \frac{\theta_2}{\theta_2-1}(H(x)+c_1) = \theta_2\Phi_0\left(x,-\frac{b}{2}\right).$$

Продолжим функцию Φ_0 с прямоугольника $\overline{\Pi}_0$ до квазипериодической функции Φ на $\mathbb{R}^2$ такой, что $\Phi(x+a,y) = \theta_1\Phi(x,y)$, $\Phi(x,y+b) = \theta_2\Phi(x,y)$. Такое продолжение, очевидно, определено единственным образом. Положим $\mathscr{E}_0(x,y;\xi,\eta) = \Phi(x-\xi,y-\eta)$. Поскольку $H'(x) = \delta(x)$, имеем

$$\frac{\partial^2\mathscr{E}_0(x,y;\xi,\eta)}{\partial x\partial y} = \delta(x-\xi)\delta(y-\eta) = \delta(x-\xi,y-\eta)$$

при $(x,y) \in \Pi$, $(\xi,\eta) \in \Pi$. Кроме того, функция $\mathscr{E}_0$ удовлетворяет краевым условиям. Таким образом, функция Грина построена. В области $\Pi \times \Pi$ эта функция, как нетрудно видеть, задается формулой

$$\mathscr{E}_0(x,y;\xi,\eta) = (H(x-\xi)+c_1)(H(y-\eta)+c_2),$$

где $H(x)$ — функция Хевисайда.

Пусть

$$(R_0\varphi)(x,y) = \int\limits_{\Pi} \mathscr{E}_0(x,y;\xi,\eta)\varphi(\xi,\eta)\,d\xi d\eta, \quad \varphi \in \mathscr{H}_{\theta_1,\theta_2}(\mathbb{R}^2).$$

Если $\varphi \in C^\infty_{\theta_1,\theta_2}(\mathbb{R}^2)$, то $R_0\varphi \in C^\infty_{\theta_1,\theta_2}(\mathbb{R}^2)$, что сразу следует из краевых условий для $\mathscr{E}_0$. Поскольку $|\mathscr{E}_0(x,y;\xi,\eta)| \le C$, то R_0 — ограниченный оператор в пространстве $\mathscr{H}_{\theta_1,\theta_2}(\mathbb{R}^2)$. Равенство $A_0R_0\varphi = \varphi$ следует из того, что $R_0\varphi$ является сверткой некоторого фундаментального решения оператора $\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}$ с функцией φ. Поскольку A_0 обладает полной системой ортонормированных собственных векторов, замыкание A_0 является самосопряженным оператором, который мы также будем обозначать через A_0. В этом случае равенство $A_0R_0\varphi = \varphi$ справедливо при всех $\varphi \in \mathscr{H}_{\theta_1,\theta_2}(\mathbb{R}^2)$, т. е. $A_0^{-1} = R_0$.

Если $\theta_1 = 1$ или $\theta_2 = 1$, то нулевое собственное значение оператора A_0 имеет бесконечную кратность. В этом случае асимптотика сохраняется для функции $N_\rho(\lambda; A)$, т. е. для любых $|\theta_1| = |\theta_2| = 1$ и $\rho > 0$ имеет место формула

$$N_\rho(\lambda; A_0) = c_0\lambda\ln\lambda + c_1\lambda + O(\sqrt{\lambda}),$$

где $c_0 = \frac{S(T^2)}{\pi^2}$, c_1 — некоторая постоянная, зависящая от $S(T^2), \theta_1, \theta_2$.

§ 3. Построение регуляризатора и спектральной асимптотики для гиперболических операторов с переменными коэффициентами

Пусть $T^2 = \mathbb{R}^2/2\pi\mathbb{Z} \times 2\pi\mathbb{Z}$, $Q = (0,2\pi) \times (0,2\pi)$, $a = \{a_1, a_2\}$ — вектор-функция с компонентами $a_i \in C^1(T^2)$ и $b \in C(T^2)$. Рассмотрим дифференциальное выражение:

$$\mathscr{L} = \frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + \frac{1}{2}i(a(x,y),\nabla) + \frac{1}{2}i(\nabla, a(x,y)) + b(x,y). \tag{3.1}$$

Здесь $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$, а $(A,B) = A_1B_1 + A_2B_2$ — «скалярное произведение», где $A = (A_1, A_2)$, $B = (B_1, B_2)$, A_i, B_i — операторы, действующие в $L_2(\mathbb{R}^2)$. Формула (3.1) задает общий вид формально самосопряженного дифференциального оператора гиперболического типа с главной частью $\mathscr{L}_0 = \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}$. Такой вид имеет общий формально самосопряженный волновой оператор в координатах светового конуса. В координатах (t,x) (в системе единиц, в которой скорость распространения возмущений $c = 1$) общий вид формально самосопряженного волнового оператора будет следующим:

$$T = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}i(a(t,x),\nabla) + \frac{1}{2}i(\nabla, a(t,x)) + b(t,x).$$

Пусть $\widetilde{A}\varphi = \mathscr{L}\varphi$, $\varphi \in D(A_0) = C^\infty_{\theta_1,\theta_2}(\mathbb{R}^2)$. Тогда $\widetilde{A}\varphi = A_0\varphi + A_1\varphi$, где A_1 — дифференциальный оператор 1-го порядка. Оператор $\widetilde{A}$ естественно рассматривать как возмущение оператора A_0. Ниже мы покажем, что $\widetilde{A}$ самосопряжен в существенном на $D(A_0)$. В этом случае замыкание $\widetilde{A}$ будет самосопряженным оператором $A : D(A) \to \mathscr{H}_{\theta_1,\theta_2}(\mathbb{R}^2)$. *Регуляризатором* оператора A называется оператор $T : \mathscr{H}_{\theta_1,\theta_2}(\mathbb{R}^2) \to D(A)$ такой, что

$$TA = I + K_1, \quad AT = I + K_2,$$

где K_i — компактные операторы. Мы построим регуляризатор оператора A при некотором дополнительном условии на коэффициенты оператора A. Пусть функции a_i удовлетворяют условиям

$$\frac{1}{\operatorname{mes}(T^1)}\int\limits_{T^1} a_2(x,y)\,dx = \frac{1}{\operatorname{mes}(T^1)}\int\limits_{T^1} a_1(x,y)\,dy = 0,$$

т. е. функция $a_1(x,y)$ имеет нулевое среднее по переменной y, а функция $a_2(x,y)$ — нулевое среднее по переменной x. Пусть $H_1(x-\xi) = H(x-\xi)+c_1$, $H_2(y-\eta) = H(y-\eta)+c_2$, где $c_i = \frac{1}{\theta_i-1}$ $(i=1,2)$. Тогда функция Грина оператора A_0 имеет вид

$$\mathscr{E}_0(x,y;\xi,\eta) = H_1(x-\xi)H_2(y-\eta)$$

при $(x,y)\in Q$, $(\xi,\eta)\in Q$. Поскольку $\mathscr{E}_0$ — ядро самосопряженного оператора A_0^{-1} (см. § 2), справедливо равенство $\mathscr{E}_0(x,y;\xi,\eta) = \overline{\mathscr{E}_0(\xi,\eta;x,y)}$, т. е. ядро $\mathscr{E}_0$ эрмитово.

Будем искать регуляризатор T в виде интегрального оператора с ядром $\mathscr{E}(x,y;\xi,\eta)$, имеющим следующую структуру:

$$\begin{aligned}\mathscr{E}(x,y;\xi,\eta) = \mathscr{E}_0(x-\xi,y-\eta)e^{\frac{i}{2}\int_\eta^y(\alpha(x,z)+\alpha(\xi,z))\,dz+\frac{i}{2}\int_\xi^x(\beta(z,y)+\beta(z,\eta))\,dz}\\ = \mathscr{E}_0(x-\xi,y-\eta)e^{iS_1(x,y;\xi,\eta)},\end{aligned}$$

где $\alpha(x,y)$, $\beta(x,y)$ — вещественнозначные функции. Поскольку $S_1(\xi,\eta;x,y) = -S_1(x,y;\xi,\eta)$, ядро $\mathscr{E}(x,y;\xi,\eta)$ эрмитово при любом выборе функций $\alpha(x,y)$, $\beta(x,y)$. Подберем их так, чтобы выполнялось условие

$$\begin{aligned}(\mathscr{L}\mathscr{E})(x,y;\xi,\eta) = G_0(x,y;\xi,\eta)\delta(x-\xi,y-\eta) + G_1(x,y;\xi,\eta)H_2(y-\eta)\delta(x-\xi)\\ + G_2(x,y;\xi,\eta)H_1(x-\xi)\delta(y-\eta) + G_3(x,y;\xi,\eta),\end{aligned}$$

где G_0, G_1, G_2 — непрерывные функции, причем $G_0|_{x=\xi y=\eta} = 1$, $G_1|_{x=\xi} = 0$, $G_2|_{y=\eta} = 0$, G_3 — ограниченная функция. Это эквивалентно тому, что

$$(\mathscr{L}\mathscr{E})(x,y;\xi,\eta) = \delta(x-\xi,y-\eta) + r(x,y;\xi,\eta),$$

где $r(x,y;\xi,\eta)$ — регулярная обобщенная функция. Имеем

$$\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial x} = \frac{\partial\mathscr{E}_0}{\partial x}e^{iS_1} + i\mathscr{E}_0\frac{\partial S_1}{\partial x}e^{iS_1}, \quad \frac{\partial\mathscr{E}}{\partial y} = \frac{\partial\mathscr{E}_0}{\partial y}e^{iS_1} + i\mathscr{E}_0\frac{\partial S_1}{\partial y}e^{iS_1},$$

$$\frac{\partial^2\mathscr{E}}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2\mathscr{E}_0}{\partial x\partial y}e^{iS_1} + i\frac{\partial\mathscr{E}_0}{\partial x}\cdot\frac{\partial S_1}{\partial y}e^{iS_1} + i\frac{\partial\mathscr{E}_0}{\partial y}\cdot\frac{\partial S_1}{\partial x}e^{iS_1} + i\mathscr{E}_0\frac{\partial^2 S_1}{\partial x\partial y}e^{iS_1}.$$

Учитывая, что $\frac{\partial^2\mathscr{E}_0}{\partial x\partial y} = \delta(x-\xi,y-\eta)$, $(x,y)\in Q$, $(\xi,\eta)\in Q$, а также равенства

$$\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial x} = \delta(x-\xi)H_2(y-\eta)e^{iS_1} + i\mathscr{E}_0\left(\frac{i}{2}(\beta(x,y)+\beta(x,\eta)) + \frac{i}{2}\int\limits_\eta^y \alpha_x(x,z)\,dz\right)e^{iS_1},$$

$$\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial y} = \delta(y-\eta)H_1(x-\xi)e^{iS_1} + i\mathscr{E}_0\left(\frac{i}{2}(\alpha(x,y)+\alpha(\xi,y)) + \frac{i}{2}\int\limits_\xi^x \beta_y(z,y)\,dz\right)e^{iS_1},$$

$$\frac{\partial S_1}{\partial x} = \frac{i}{2}(\beta(x,y)+\beta(x,\eta)) + \frac{i}{2}\int\limits_{\eta}^{y} \alpha_x(x,z)\,dz,$$

$$\frac{\partial S_1}{\partial y} = \frac{i}{2}(\alpha(x,y)+\alpha(\xi,y)) + \frac{i}{2}\int\limits_{\xi}^{x} \beta_y(z,y)\,dz,$$

получим

$$G_1(x,y;\xi,\eta) = i\biggl(\frac{\alpha(x,y)+\alpha(\xi,y)}{2} + a_1(x,y)\biggr) + \frac{i}{2}\int\limits_{\xi}^{x} \beta_y(z,y)\,dz,$$

$$G_2(x,y;\xi,\eta) = i\biggl(\frac{\beta(x,y)+\beta(x,\eta)}{2} + a_2(x,y)\biggr) + \frac{i}{2}\int\limits_{\eta}^{y} \alpha_x(x,z)\,dz.$$

Условие $G_1|_{x=\xi} = 0$ приводит к равенству $\alpha(x,y)+a_1(x,y) = 0$; условие $G_2|_{y=\eta} = 0$ — к равенству $\beta(x,y)+a_2(x,y) = 0$, т. е. $\alpha(x,y) = -a_1(x,y)$, $\beta(x,y) = -a_2(x,y)$. Таким образом,

$$\mathscr{E}(x,y;\xi,\eta) = \mathscr{E}_0(x-\xi,y-\eta)e^{-iS(x,y;\xi,\eta)}, \tag{3.2}$$

где

$$S(x,y;\xi,\eta) = \int\limits_{\eta}^{y} \frac{a_1(x,z)+a_1(\xi,z)}{2}\,dz + \int\limits_{\xi}^{x} \frac{a_2(z,y)+a_2(z,\eta)}{2}\,dz.$$

Поскольку функции $a_i(x,y)$ удовлетворяют условиям периодичности $a_i(x+2\pi,y) = a_i(x,y)$, $a_i(x,y+2\pi) = a_i(x,y)$, нетрудно видеть, что

$$\mathscr{E}(x+2\pi,y;\xi,\eta) = \theta_1\mathscr{E}(x,y;\xi,\eta), \quad \mathscr{E}(x,y+2\pi;\xi,\eta) = \theta_2\mathscr{E}(x,y;\xi,\eta). \tag{3.3}$$

В самом деле, с учетом краевых условий для функции $\mathscr{E}_0$ имеем

$$\mathscr{E}(x+2\pi,y;\xi,\eta) = \theta_1 e^{-iu(x,y;\xi,\eta)}\mathscr{E}(x,y;\xi,\eta),$$

где

$$u(x,y;\xi,\eta) = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2\pi}(a_2(z,y)+a_2(z,\eta))\,dz = 0,$$

поскольку a_2 имеет нулевое среднее по первой переменной. Вторая из формул (3.3) доказывается точно так же при условии, что функция a_1 имеет нулевое среднее по второй переменной. Пусть

$$(T\varphi)(x,y) = \int\limits_{Q} \mathscr{E}(x,y;\xi,\eta)\varphi(\xi,\eta)\,d\xi d\eta. \tag{3.4}$$

Поскольку ядро $\mathscr{E}$ эрмитово, T — самосопряженный оператор. Так как $T\varphi \in C^\infty_{\theta_1,\theta_2}(\mathbb{R}^2)$ при $\varphi \in C^\infty_{\theta_1,\theta_2}(\mathbb{R}^2)$, из предыдущего следует, что $\mathscr{L}T\varphi = \widetilde{A}T\varphi = (I+K')\varphi$, где оператор $K' : \mathscr{H}_{\theta_1,\theta_2}(\mathbb{R}^2) \to \mathscr{H}_{\theta_1,\theta_2}(\mathbb{R}^2)$ компактен. Если A — замыкание $\widetilde{A}$, то после предельного перехода отсюда получим, что $AT = I+K'$. Таким образом, T — правый регуляризатор. Аналогичным образом показывается, что T является также и левым регуляризатором, что также видно из соображений двойственности. Так как оператор $I+K'$ имеет конечномерное ядро, оператор T также имеет конечномерное ядро. Покажем, что, добавляя к T подходящим образом построенный самосопряженный конечномерный оператор, можно построить самосопряженный регуляризатор $\widetilde{T}$ с нулевым ядром. Это утверждение вытекает из следующего предложения.

Предложение 3.1. *Пусть B — ограниченный самосопряженный оператор с дискретным спектром в $L_2(Q)$. Тогда если $\dim\ker B = N$, то существует ортонормированный набор функций $\{f_i\}_{i=1}^N$, $f_i \in C_0^\infty(Q)$, такой, что оператор $\widetilde{B} = B + \sum\limits_{i=1}^N (f_i, \cdot) f_i$ имеет нулевое ядро.*

Доказательство. Пусть$\{e_i\}_{i=1}^N$ — ортонормированный базис в $\ker B$, $\{e_i\}_{i=N+1}^\infty$ — ортонормированная система собственных векторов оператора B, соответствующих ненулевым собственным значениям. Пусть $\varepsilon > 0$. Возьмем векторы $f_i' \in C_0^\infty(Q)$ такие, что $\|f_i' - e_i\| < \varepsilon$, $i = 1, \dots, N$. Ортогонализируя эту систему векторов по Шмидту, получим векторы $f_i = \sum\limits_{j=1}^N a_{ij} f_j'$, образующие ортонормированную систему. Из явных формул для матрицы ортогонализации следует, что если исходная система близка к ортонормированной, то матрица a_{ij} близка к единичной, причем существует постоянная $C_1 > 0$ такая, что если $|(f_i', f_i') - 1| < \varepsilon$ и $|(f_i', f_j')| < \varepsilon$ при $i \neq j$, то $|a_{ii} - 1| < C_1\varepsilon, |a_{ij}| < C_1\varepsilon$ при $i \neq j$ $(i, j = 1, \dots, N)$. Поэтому существует постоянная $C > 0$ такая, что $\|f_i - e_i\| < C\varepsilon$ при $i = 1, \dots, N$. Объединяя наборы $\{f_i\}_{i=1}^N$ и $\{e_i\}_{i=N+1}^\infty$, получим последовательность $\{\tilde{e}_i\}_{i=1}^\infty$ такую, что

$$\sum_{i=1}^\infty \|e_i - \tilde{e}_i\| < D\varepsilon < 1$$

при достаточно малых ε. По известной теореме теории базисов в этом случае $\{\tilde{e}_i\}_{i=1}^\infty$ — базис, близкий к ортонормированному. Поскольку $\|Bf_i\| = \|B(f_i - e_i)\| \le \|B\|\|f_i - e_i\| \le D_1\varepsilon$ при $i = 1, \dots, N$, последовательность $\{f_i + Bf_i\}_{i=1}^N \cup \{e_i\}_{i=N+1}^\infty$ также является базисом, близким к ортонормированному при достаточно малых ε. Зафиксируем ε, при котором каждая из последовательностей $\{f_i\}_{i=1}^N \cup \{e_i\}_{i=N+1}^\infty$ и $\{h_i\}_{i=1}^N \cup \{e_i\}_{i=N+1}^\infty$, где $h_i = f_i + Bf_i$, является базисом, и введем оператор

$$\widetilde{B} = B + \sum_{i=1}^N (f_i, \cdot) f_i.$$

Покажем, что $\ker\widetilde{B} = 0$. Пусть вектор $x = \sum\limits_{i=1}^N d_i f_i + \sum\limits_{i=N+1}^\infty c_i e_i$ принадлежит ядру $\widetilde{B}$. Тогда

$$\sum_{i=N+1}^\infty c_i\lambda_i e_i + \sum_{i=1}^N d_i(f_i + Bf_i) + \sum_{i=1}^N \xi_i f_i = 0,$$

где $\xi_i = \xi_i(c) = \sum\limits_{j=N+1}^\infty (f_i, e_j) c_j$, $c = (c_j)_{j=N+1}^\infty$, а λ_i — ненулевые собственные числа оператора T. Из неравенства Бесселя $\sum\limits_{j=N+1}^\infty |(f_i, e_j)|^2 \le \|f_i\|^2$ следует, что последовательность $\{\beta_j\}_{j=N+1}^\infty = \{(f_i, e_j)\}_{j=N+1}^\infty$ принадлежит l_2, поэтому функционалы ξ_i определены корректно. Поскольку векторы $h_i = f_i + Bf_i$ образуют базис в $\operatorname{span}\{f_i\}_{i=1}^N$, имеем $\sum\limits_{i=1}^N \xi_i f_i = \sum\limits_{i=1}^N \sum\limits_{j=1}^N \alpha_{ij}\xi_j h_i$, где α_{ij} — некоторые постоянные. Отсюда следует, что

$$\sum_{i=N+1}^\infty c_i\lambda_i e_i + \sum_{i=1}^N d_i' h_i = 0,$$

где $d_i' = d_i + \sum\limits_{i=1}^{N} \alpha_{ij}\xi_j$. Так как система $\{h_i\}_{i=1}^N \cup \{e_i\}_{i=N+1}^\infty$ — базис, отсюда следует, что $c_i = 0$ и $d_i' = 0$, значит, и $d_i = 0$, поскольку $d_i' = d_i + \sum\limits_{i=1}^{N} \alpha_{ij}\xi_j$, где ξ_i — непрерывные линейные функционалы от вектора $c = (c_i)_{i=N+1}^\infty$. Таким образом, $x = 0$. Предложение доказано.

Отметим, что из условий на f_i вытекает, что оператор $B-\widetilde{B}$ есть интегральный оператор конечного ранга с эрмитовым ядром, принадлежащим $C_0^\infty(Q\times Q)$. Применяя предложение 3.1 к построенному выше регуляризатору T, получим оператор $\widetilde{T}$, который, очевидно, также будет регуляризатором оператора A, поскольку $A(T-\widetilde{T})$ и $(T-\widetilde{T})A$ — непрерывные конечномерные операторы. Кроме того, $\widetilde{T}$ самосопряжен по построению и $\ker \widetilde{T} = \{0\}$.

Предложение 3.2. *Пусть коэффициенты оператора A удовлетворяют условиям $a_i \in C^1(T^2)$, $i = 1, 2$, $b \in C(T^2)$, функция $a_1(x, y)$ имеет нулевое среднее по переменной y, а функция $a_2(x, y)$ имеет нулевое среднее по переменной x. Тогда оператор A является самосопряженным.*

Доказательство. Для доказательства самосопряженности A нужно показать, что $\mathrm{Ran}(\pm i\lambda I + A) = H$ при некотором $\lambda > 0$ (см. [18]). Пусть ψ ортогонален $\mathrm{Ran}(\pm iI + A)$ и $\varphi = \widetilde{T}\varphi_1$, где $\varphi_1 \in H$, а $\widetilde{T}$ — построенный выше регуляризатор оператора A. Тогда $((\pm i\lambda I + A)\varphi, \psi) = ((\pm i\lambda\widetilde{T} + A\widetilde{T})\varphi_1, \psi) = 0$. Имеем $A\widetilde{T} = I - T_0$, где $\widetilde{T}, T_0$ — компактные операторы, причем оператор $\widetilde{T}$ самосопряжен и $\ker \widetilde{T} = \{0\}$. Вводя линейный операторный пучок $L(\lambda) = I - T_0 - \lambda\widetilde{T}$, получим $(L(\mp i\lambda)\varphi_1, \psi) = 0$. В монографии [12] показано, что для линейных операторных пучков описанной структуры оператор $L(\lambda)$ обратим при всех λ с $|\lambda| \geq \rho > 0$ в области, получаемой из комплексной плоскости удалением секторов сколь угодно малого раствора с центром в начале координат, содержащих действительную ось. Таким образом, операторы $L(\mp i\lambda)$ обратимы, откуда следует, что $\psi = 0$, а значит, A — самосопряженный оператор. Предложение доказано.

Пусть $\widetilde{T}A = I - K$. Тогда, как следует из конструкции построения регуляризатора $\widetilde{T}$, K — интегральный оператор вида

$$(K\varphi)(x, y) = \int\limits_Q G(x, y; \xi, \eta)\varphi(\xi, \eta)\, d\xi d\eta,$$

где G — ограниченная измеримая функция. Так как $K\varphi = \varphi - \widetilde{T}A\varphi$, то $K\varphi \in C^\infty_{\theta_1,\theta_2}(\mathbb{R}^2)$ при $\varphi \in C^\infty_{\theta_1,\theta_2}(\mathbb{R}^2)$. Поскольку $C^\infty_{\theta_1,\theta_2}(\mathbb{R}^2)$ плотно в $L_2(Q)$, отсюда

$$G(x + 2\pi, y; \xi, \eta) = \theta_1 G(x, y; \xi, \eta), \quad G(x, y + 2\pi; \xi, \eta) = \theta_2 G(x, y; \xi, \eta).$$

Интегральные операторы $\widetilde{T}$ и K можно продолжить до ограниченных (компактных) операторов в $\mathscr{H}_{\theta_1,\theta_2}(\mathbb{R}^2)$, за которыми мы сохраним прежние обозначения. При этом из квазипериодичности ядер этих операторов следует, что $\mathrm{Ran}\, \widetilde{T} \subset D(A)$ и $\mathrm{Ran}\, K \subset D(A)$. Введем в рассмотрение операторные пучки $A(\lambda) = I - \lambda\widetilde{T} - K$, $A_0(\lambda) = I - \lambda\widetilde{T}$. При $\varphi \in D(A)$ имеем $A(\lambda)\varphi = \widetilde{T}(A - \lambda I)\varphi$.

Так как $\ker \widetilde{T} = \{0\}$, пучки $A(\lambda)$ и $A - \lambda I$ имеют общие собственные функции. Нашей ближайшей целью будет нахождение асимптотики спектра «невозмущенного» пучка $A_0(\lambda) = I - \lambda\widetilde{T}$. Поскольку оператор $\widetilde{T}$ является конечномерным возмущением оператора T, для этого достаточно найти асимптотику

s-чисел оператора T. Напомним, что

$$(T\varphi)(x,y) = \int\limits_Q \mathscr{E}(x,y;\xi,\eta)\varphi(\xi,\eta)\,d\xi d\eta,$$

где функция $\mathscr{E}(x,y;\xi,\eta)$ определена формулой (3.2).

Предложение 3.3. *Оператор T допускает представление*

$$T = T_0 + B_1T_1 + B_2T_2 + S, \tag{3.5}$$

где B_i $(i=1,2)$ — ограниченные операторы, T_0, T_1, T_2 — интегральные операторы с ядрами $\mathscr{E}_0$, $\mathscr{E}_1$, $\mathscr{E}_2$ соответственно, где $\mathscr{E}_0(x,y;\xi,\eta) = H_1(x-\xi)H_2(y-\eta)$, $\mathscr{E}_1(x,y;\xi,\eta) = i|x-\xi|\operatorname{sign}(y-\eta)$, $\mathscr{E}_2(x,y;\xi,\eta) = i|y-\eta|\operatorname{sign}(x-\xi)$, а S — интегральный оператор вида

$$(S\varphi)(x,y) = \int\limits_Q s(x,y;\xi,\eta)\varphi(\xi,\eta)\,d\xi d\eta,$$

где s, $\frac{\partial s}{\partial x}$, $\frac{\partial s}{\partial y} \in L_2(Q\times Q)$.

Доказательство. В силу (3.2) ядро оператора T имеет вид

$$\mathscr{E}(x,y;\xi,\eta) = \mathscr{E}_0(x-\xi,y-\eta)e^{iu_1(x,y;\xi,\eta)+iu_2(x,y;\xi,\eta)},$$

где u_i — гладкие функции (класса $C^1(\overline{Q}\times\overline{Q})$), причем $u_1|_{x=\xi}=0$, $u_2|_{y=\eta}=0$. Поэтому

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_0 + A_1\mathscr{E}_0 + A_2\mathscr{E}_0 + B\mathscr{E}_0, \tag{3.6}$$

где A_i, B — гладкие функции, причем $A_1|_{x=\xi}=0$, $A_2|_{y=\eta}=0$, $B|_{x=\xi}=B|_{y=\eta}=0$.

Рассмотрим функцию $A_1\mathscr{E}_0$ в представлении (3.5). Имеем

$$\begin{aligned}(A_1\mathscr{E}_0)(x,y;\xi,\eta) &= A_1(x,y;\xi,\eta)H_1(x-\xi)H_2(y-\eta)\\ &= \widetilde{A}_1(x,y;\xi,\eta)(x-\xi)H_1(x-\xi)H_2(y-\eta),\end{aligned}$$

где $\widetilde{A}_1 \in C(\overline{Q}\times\overline{Q})$. Очевидно, что функция $(x-\xi)H_1(x-\xi)$ непрерывна и допускает представление $(x-\xi)H_1(x-\xi) = b_1(x,\xi)|x-\xi| + \tilde{b}_1(x,\xi)$, где $b_1 \in C([0,2\pi]\times[0,2\pi])$, $\tilde{b}_1 \in C^1([0,2\pi]\times[0,2\pi])$. Поскольку $H_2(y-\eta) = H(y-\eta)+c_2 = \frac{1}{2}\operatorname{sign}(y-\eta)+\frac{1}{2}+c_2$, из приведенной формулы следует, что функцию $A_1\mathscr{E}_0$ можно представить в виде

$$(A_1\mathscr{E}_0)(x,y;\xi,\eta) = ia_1(x,y;\xi,\eta)|x-\xi|\operatorname{sign}(y-\eta) + a_2(x,y;\xi,\eta),$$

где $a_1 \in C(\overline{Q}\times\overline{Q})$, a_2, $\frac{\partial a_2}{\partial x}$, $\frac{\partial a_2}{\partial y} \in L_2(Q\times Q)$. Аналогичным образом представляется слагаемое $A_2\mathscr{E}_0$ в (3.5). Отсюда следует, что $\mathscr{E}$ можно представить в виде

$$\begin{aligned}\mathscr{E}(x,y;\xi,\eta) = \mathscr{E}_0(x-\xi,y-\eta) &+ ia_1(x,y;\xi,\eta)|x-\xi|\operatorname{sign}(y-\eta)\\ &+ ia_2(x,y;\xi,\eta)|y-\eta|\operatorname{sign}(x-\xi) + s(x,y;\xi,\eta),\end{aligned}$$

где $a_i \in C(\overline{Q}\times\overline{Q})$, а s, $\frac{\partial s}{\partial x}$, $\frac{\partial s}{\partial y} \in L_2(Q\times Q)$. Предложение доказано.

В разложении (3.5) оператор T_0 имеет самое «сингулярное» ядро, обладающее разрывами на прямых $x=\xi$ и $y=\eta$. Это приводит к тому, что главный член асимптотики s-чисел оператора T определяется только этим слагаемым.

Предложение 3.4. *Пусть $s_j(T)$, $s_j(T_0)$ — s-числа операторов T и T_0. Тогда $s_j(T) \sim s_j(T_0) \sim c\frac{\ln j}{j}$ при $j \to \infty$, где $c = \frac{S(T^2)}{\pi^2}$.*

Доказательство. Имеем $s_j(T_0) = s_j\big(A_0^{-1}\big) = \frac{1}{\lambda_j(|A_0|)} = \frac{1}{|\lambda_j(A_0)|}$. Так как $N^0(r) = N(r;A_0) \sim \frac{S(T^2)}{\pi^2} r\ln r$ при $r \to \infty$ (см. теорему 2.2), то $\lambda_j(|A_0|) \sim f^{-1}(j)$, где $f^{-1}(r)$ — функция, обратная к $f(r) = cr\ln r$. Несложное вычисление показывает, что $f^{-1}(r) \sim \frac{1}{c}\frac{r}{\ln r}$ при $r \to \infty$, откуда $s_j(T_0) \sim c\frac{\ln j}{j}$ при $j \to \infty$, где $c = \frac{S(T^2)}{\pi^2}$. Далее, $s_j(T) = s_j(T_0 + C)$, где $C = B_1T_1 + B_2T_2 + S$. Покажем, что $s_j(C) = O\big(\frac{1}{j}\big)$. Так как $s_{i+j-1}(A+B) \le s_i(A) + s_j(B)$ для любых компактных операторов A и B, то $s_{2n-1}(A+B) \le s_n(A)+s_n(B)$, $s_{2n}(A+B) \le s_{n+1}(A)+s_n(B)$. Если $s_n(A) = O\big(\frac{1}{n}\big)$ и $s_n(B) = O\big(\frac{1}{n}\big)$, то из этих формул следует, что $s_n(A+B) = O\big(\frac{1}{n}\big)$. По индукции отсюда получаем, что если $s_n(A_k) = O\big(\frac{1}{n}\big)$, $k = 1,2,\dots,m$, то $s_n\left(\sum\limits_{k=1}^{m} A_k\right) = O\big(\frac{1}{n}\big)$ при $n \to \infty$. Таким образом, достаточно доказать, что $s_j(B_kT_k) = O\big(\frac{1}{j}\big)$ при $k = 1,2$ и $s_j(S) = O\big(\frac{1}{j}\big)$ при $j \to \infty$. Оператор S имеет ядро $s(x,y;\xi,\eta)$ такое, что s, $\frac{\partial s}{\partial x}$, $\frac{\partial s}{\partial y} \in L_2(Q \times Q)$. Из теоремы 1.3 следует, что $s_j(S) = o\big(\frac{1}{jr}\big)$, $r = \frac{1}{2} + \frac{l}{2} = 1$ при $l = 1$. Далее, $s_j(B_kT_k) \le \|B_k\| s_j(T_k)$ $(k = 1,2)$, т. е. достаточно установить оценки $s_j(T_k) = O\big(\frac{1}{j}\big)$ $(k = 1,2)$. Так как $\mathscr{E}_1(x,y;\xi,\eta) = i|x-\xi|\operatorname{sign}(y-\eta)$, то $T_1 = K_1 \otimes K_2$, где K_i — операторы в $L_2[0,2\pi]$, причем

$$(K_1\varphi)(x) = i\int_0^{2\pi} \operatorname{sign}(x-\xi)\varphi(\xi)\,d\xi, \quad (K_2\varphi)(x) = \int_0^{2\pi} |x-\xi|\varphi(\xi)\,d\xi.$$

Операторы K_j — компактные самосопряженные операторы. Известно, что собственные числа этих операторов имеют вид (см., например, [12])

$$\lambda_j(K_1) = \frac{c_1}{j}, \quad \lambda_j(K_2) = \frac{c_2}{j^2}, \quad j \in \mathbb{Z},\ j \ne 0,$$

где $c_i > 0$ — некоторые постоянные. Отсюда следует, что оператор T_1 имеет полную систему собственных функций $\varphi_{m,n}(x,y)$, соответствующих собственным значениям вида

$$\lambda_{m,n}(T_1) = \frac{c}{mn^2}, \quad m,n \in \mathbb{Z},\ m \ne 0,\ n \ne 0.$$

Если расположить эти значения в порядке убывания их модулей, то получим последовательность s-чисел оператора T_1. Нахождение асимптотики $s_j(T_1)$ при $j \to \infty$ сводится к задаче нахождения асимптотики функции $n(\lambda) = \operatorname{card}\{(m,n) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} : m \ne 0, n \ne 0, |m|n^2 \le \lambda\}$. Очевидно, что $n(\lambda) = 4n_1(\lambda)$, где $n_1(\lambda)$ — число целых точек в области $\big\{(x,y) : x \ge 1, 0 < y \le \frac{\lambda}{x^2}\big\}$. Асимптотика $n_1(\lambda)$ вычисляется стандартным методом (см., например, [17]) и приводит к следующему результату: $n_1(\lambda) \sim d_1\lambda$ при $\lambda \to +\infty$. Таким образом, $n(\lambda) \sim d\lambda$ при $\lambda \to +\infty$, откуда следует, что $s_j(T_1) \sim \frac{a}{j}$ при $j \to \infty$, т. е. $s_j(T_1) = O\big(\frac{1}{j}\big)$. Оценка s-чисел оператора B_2T_2 строится аналогично. Стало быть, $s_j(T_0) \sim c\frac{\ln j}{j}$, $s_j(C) = O\big(\frac{1}{j}\big)$. По теореме, приведенной в начале § 1, в этом случае $s_j(T_0 + C) \sim s_j(T_0)$ при $j \to \infty$. Предложение доказано.

Поскольку оператор $\widetilde{T}$ отличается от оператора T на конечномерное слагаемое, асимптотика его s-чисел описывается той же самой формулой. Из предложения 3.4 следует, что $N(r;A_0(\lambda)) = N(r;I-\lambda\widetilde{T}) \sim cr\ln r$ при $r \to \infty$, где

$c = \frac{S(T^2)}{\pi^2}$. Функция $N(r; A_0(\lambda))$ удовлетворяет условию теоремы Маркуса — Мацаева (см. § 1), поэтому спектр пучка $A(\lambda) = A_0(\lambda) - K$ в области $|\lambda| > \rho$ дискретен и $N_\rho(r; A(\lambda)) \sim N(r; A_0(\lambda))$ при $r \to \infty$. Покажем, что спектр пучка $A(\lambda)$ дискретен в $\mathbb{C}$. Поскольку $A(\lambda) = \widetilde{T}(A - \lambda I)$ и $\ker \widetilde{T} = \{0\}$, операторные пучки $A(\lambda)$ и $A - \lambda I$ имеют общие собственные функции. Так как $A(\lambda) = I - \lambda\widetilde{T} - K$ и $s_j(\widetilde{T}) = O\big(\frac{\ln j}{j}\big)$, оператор $\widetilde{T}$ имеет конечный порядок в смысле Келдыша, т. е. ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} s_j^p(\widetilde{T})$ сходится при некотором $p \geq 1$ (достаточно взять $p > 1$). В этом случае система собственных функций пучка $A(\lambda)$ полна (см. [12, гл. IV]), а значит, полна и система собственных функций самосопряженного оператора A. Из формулы $A(\lambda) = \widetilde{T}(A - \lambda I)$ следует, что в этом случае пучок $A(\lambda)$ имеет чисто дискретный спектр.

Теорема 3.1. *Пусть коэффициенты дифференциального выражения* (3.1) *удовлетворяют условиям:*

1) $a_i \in C^1(T^2)$ $(i = 1, 2)$, $b \in C(T^2)$, *причем* $[a_i] \neq 0 \pmod{2\pi}$ $(i = 1, 2)$, *где* $[a_i]$ *— среднее значение функции* a_i $(i = 1, 2)$ *на торе* T^2*;*

2) *функция* $\tilde{a}_1(x, y) = a_1(x, y) - [a_1]$ *имеет нулевое среднее по переменной* y, *а функция* $\tilde{a}_2(x, y) = a_2(x, y) - [a_2]$ *имеет нулевое среднее по переменной* x, *т. е.*

$$\frac{1}{\operatorname{mes}(T^1)} \int\limits_{T^1} \tilde{a}_1(x, y)\, dy = \frac{1}{\operatorname{mes}(T^1)} \int\limits_{T^1} \tilde{a}_2(x, y)\, dx = 0.$$

Пусть A — замыкание гиперболического оператора, определенного дифференциальным выражением (3.1) *на функциях класса* $C^\infty(T^2)$. *Тогда* $A : D(A) \to L_2(T^2)$ *— самосопряженный оператор с дискретным спектром, для функции распределения собственных чисел которого справедлива асимптотика*

$$N(\lambda; A) \sim \frac{S(T^2)}{\pi^2} \lambda \ln \lambda \quad \text{при } \lambda \to +\infty,$$

где $S(T^2)$ *— площадь тора* $T^2 = \mathbb{R}^2 / 2\pi\mathbb{Z} \times 2\pi\mathbb{Z}$.

Доказательство. Пусть A_1^0 — оператор в $\mathscr{H}_1(\mathbb{R}^2)$, определенный на многообразии $D\big(A_1^0\big) = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^2) : \varphi(x + 2\pi, y) = \varphi(x, y),\ \varphi(x, y + 2\pi) = \varphi(x, y)\}$ формулой $A_1^0 \varphi = \mathscr{L}\varphi$, и A_1 — его замыкание. Тогда операторы A и A_1 унитарно эквивалентны. Пусть, далее, $\widetilde{A} = U^{-1} A_1 U$, где оператор U действует по формуле $(U\varphi)(x, y) = e^{-(i\beta_2 x + i\beta_1 y)} \varphi(x, y)$. В этом случае

$$\widetilde{A}\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + i\tilde{a}_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i\tilde{a}_2 \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{i}{2} \frac{\partial \tilde{a}_1}{\partial x} \varphi + \frac{i}{2} \frac{\partial \tilde{a}_2}{\partial y} \varphi + \tilde{b}\varphi,$$

где $\tilde{a}_1(x, y) = a_1(x, y) - \beta_1$, $\tilde{a}_2(x, y) = a_2(x, y) - \beta_2$. Выберем β_i так, чтобы $\beta_i = [a_i]$. Тогда $\tilde{a}_i \in C^1(T^2)$, причем функция $\tilde{a}_1$ имеет нулевое среднее по второму аргументу, а функция $\tilde{a}_2$ — по первому аргументу. При таком преобразовании периодические краевые условия переходят в квазипериодические краевые условия: $\varphi(x + 2\pi, y) = \theta_1 \varphi(x, y)$, $\varphi(x, y + 2\pi) = \theta_2 \varphi(x, y)$, где $\theta_1 = e^{i\beta_2}$, $\theta_2 = e^{i\beta_1}$. Так как $\beta_i \neq 0 \pmod{2\pi}$, то $\theta_i \neq 1$. При этом многообразие $D(A_1^0)$ переходит в $C^\infty_{\theta_1, \theta_2}(\mathbb{R}^2)$. Таким образом, $\widetilde{A}$ есть замыкание оператора $\widetilde{A}^0 : C^\infty_{\theta_1, \theta_2}(\mathbb{R}^2) \to \mathscr{H}_{\theta_1, \theta_2}(\mathbb{R}^2)$, определенного дифференциальным выражением (3.1) на функциях из $C^\infty_{\theta_1, \theta_2}(\mathbb{R}^2)$. Из предложения 3.2 следует, что оператор $\widetilde{A}$ самосопряжен. Как показано выше, оператор $\widetilde{A}$ имеет дискретный спектр, и

$N(\lambda;\widetilde{A}) \sim \frac{S(T^2)}{\pi^2}\lambda\ln\lambda$ при $\lambda\to\infty$. Так как операторы A и $\widetilde{A}$ унитарно эквивалентны, $N(\lambda;A) \sim \frac{S(T^2)}{\pi^2}\lambda\ln\lambda$ при $\lambda\to+\infty$. Теорема доказана.

Остановимся вкратце на вопросе о точности найденных достаточных условий дискретности спектра. Как показывают простые примеры, при невыполнении первого условия теоремы спектр оператора, вообще говоря, не является дискретным, а именно: в случае оператора с постоянными коэффициентами при нарушении первого условия нулевое собственное значение оператора A имеет бесконечную кратность. Второе условие использовано в предложенном методе построения в явном виде регуляризатора оператора A и, возможно, может быть ослаблено. Если оператор A не является оператором с дискретным спектром, то возникает вопрос о существовании постоянной $\rho>0$ такой, что спектр оператора A дискретен в области $|\lambda|>\rho$. Так, например, обстоит дело в случае, когда коэффициенты при первых производных являются постоянными. В общем случае вопрос остается открытым. В простейшем случае оператора $A=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+b(x,y)$, где $b\in C(T^2)$, можно написать для $N_\rho(\lambda;A)$ двучленную асимптотическую формулу. Поскольку $A=A_0+B$, где оператор B подчинен оператору A_0 с порядком $p=0$, из теоремы 1.1 следует оценка

$$N_\rho(\lambda;A)-N_\rho(\lambda;A_0)=O(N_\rho(\lambda+m;A_0)-N_\rho(\lambda-m;A_0)),$$

где $m>0$ — некоторая постоянная, $N_\rho(\lambda;A)$ — число собственных значений оператора A таких, что $\rho\le|\lambda_j(A)|\le\lambda$. Как вытекает из теорем § 2, для $N_\rho(\lambda;A_0)$ справедлива асимптотика $N_\rho(\lambda;A_0)=c_0\lambda\ln\lambda+c_1\lambda+O(\sqrt{\lambda})$, где $c_0=\frac{S(T^2)}{\pi^2}$. Так как $N_\rho(\lambda+m;A_0)-N_\rho(\lambda-m;A_0)=O(\sqrt{\lambda})$, то $N_\rho(\lambda;A)=c_0\lambda\ln\lambda+c_1\lambda+O(\sqrt{\lambda})$, где $c_0=\frac{S(T^2)}{\pi^2}$. Такой же вид (с точностью до коэффициентов) имеет асимптотика функции $N_\rho(\lambda;A)$ для оператора

$$A=\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}+b(t,x),$$

где $b\in C(T^2)$.

В заключение обсудим одну формулу, выражающую асимптотику $N(\lambda;A)$ через главный символ оператора A. Если M — замкнутое дифференцируемое n-мерное многообразие, A — самосопряженный эллиптический дифференциальный оператор порядка m на M и $a_m(x,\xi)$ — его главный символ, т. е. сумма старших однородных степени m мономов по ξ, входящих в его полный символ (см. [2]), то

$$N(\lambda;A)\sim\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{|a_m(x,\xi)|<\lambda}dx\,d\xi=\frac{1}{(2\pi)^n}\operatorname{mes}\{(x,\xi)\in T^*M:|a_m(x,\xi)|<\lambda\}. \tag{3.7}$$

Здесь $T^*M=\bigcup\limits_x T^*M_x$ — кокасательное расслоение многообразия M. Если оператор A не эллиптичен, то символ $a_m(x,\xi)$ может обращаться в нуль при $\xi\ne0$. Пусть $\varepsilon>0$, $Z_x=\{(x,\xi)\in TM_x^*:a_m(x,\xi)=0\}$, Z_x^ε — ε-окрестность множества Z_x, т. е. объединение шаров с центрами в точках Z_x и радиусами ε.

Рассмотрим некоторую модификацию классической формулы (3.7). Пусть

$$V_\varepsilon(\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\{(x,\xi):|a_m(x,\xi)|<\lambda\}\setminus \bigcup\limits_{x\in M} Z_x^\varepsilon} dx d\xi$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \operatorname{mes}\Big\{(x,\xi)\in T^*M \setminus \bigcup_{x\in M} Z_x^\varepsilon : |a_m(x,\xi)| < \lambda\Big\}.$$

Смысл этой модификации состоит в том, что в каждом слое TM_x^* выбрасывается малая, но фиксированная окрестность Z_x^ε множества нулей символа $a_m(x,\xi)$ и вычисляется деленный на $(2\pi)^n$ объем оставшейся части множества тех точек кокасательного расслоения, для которых $|a_m(x,\xi)| < \lambda$. Покажем, что для гиперболического оператора A вида (3.1) с коэффициентами, удовлетворяющими условиям теоремы 3.1, справедливо соотношение:

$$N(\lambda; A) \sim V_\varepsilon(\lambda) \quad \text{при } \lambda \to \infty \tag{3.8}$$

для любого фиксированного $\varepsilon > 0$. Главный символ оператора $A = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2} i(a,\nabla) + + \frac{1}{2} i(\nabla, a) + b$ можно считать функцией на $T^2\times\mathbb{R}$, причем $a_2(x,y,\xi,\eta) = -\xi\eta$ для всех $(x,y)\in T^2$. Здесь $Z_x^\varepsilon = \{(\xi,\eta) : |\xi| < \varepsilon, |\eta| < \varepsilon\}$ и

$$V_\varepsilon(\lambda) = \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{T^2} dx dy \int\limits_{|\xi\eta|<\lambda, |\xi|>\varepsilon, |\eta|>\varepsilon} d\xi d\eta$$

$$= \frac{1}{\pi^2} S(T^2) \int\limits_{\xi\eta<\lambda, \xi>\varepsilon, \eta>\varepsilon} d\xi d\eta = \frac{1}{\pi^2} S(T^2) \int\limits_{\varepsilon}^{\frac{\lambda}{\varepsilon}} \left(\frac{\lambda}{\eta} - \varepsilon\right) d\eta$$

$$= \frac{1}{\pi^2} S(T^2)\left[\lambda\left(\ln\frac{\lambda}{\varepsilon} - \ln\varepsilon\right) - \varepsilon\left(\frac{\lambda}{\varepsilon} - \varepsilon\right)\right] \sim \frac{S(T^2)}{\pi^2}\lambda\ln\lambda \quad \text{при } \lambda\to\infty,$$

что совпадает с полученным ранее результатом. В то же время классическая формула в этом случае не применима, поскольку соответствующий интеграл расходится. Формула (3.8) правильно «предсказывает» асимптотику функции $N_\rho(\lambda; A)$ для волнового оператора на торе и для его степеней или их слабых возмущений в тех случаях, когда спектр дискретен в области $|\lambda| > \rho$. Отметим, что в книге В. И. Арнольда [19, с. 149] формулируется задача: перенести формулу Вейля на гиперболические системы. Оператор A не принадлежит ни к одному из тех классов операторов, для которых спектральная асимптотика получается с помощью метода приближенного спектрального проектора [2–5]. Было бы интересно выяснить, возможно ли, модифицируя этот метод, обосновать формулу (3.8). Это позволило бы избежать громоздких построений, связанных с нахождением регуляризатора оператора A.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бирман М. Ш., Соломяк М. З.* Асимптотика спектра дифференциальных уравнений // Математический анализ. 1977. Т. 14. С. 5–58. (Итоги науки и техники).
2. *Шубин М. А.* Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория. М.: Наука, 1978.
3. *Розенблюм Г. В., Соломяк М. З., Шубин М. А.* Спектральная теория дифференциальных операторов. М.: ВИНИТИ, 1989. (Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 64).

4. *Левендорский С. З.* Метод приближенного спектрального проектора // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1985. Т. 49, № 6. С. 1177–1229.

5. *Безяев В. И.* асимптотика собственных значений гипоэллиптических операторов на замкнутом многообразии // Мат. сб. 1982. Т. 105, № 4. С. 161–180.

6. *Волович И. В., Козлов В. В.* О суммируемых с квадратом решениях уравнения Клейна — Гордона на многообразиях // Докл. РАН. 2006. Т. 408, № 3. С. 317–320.

7. *Kozlov V. V., Volovich I. V.* Finite action Klein–Gordon solutions on Lorentzian manifolds // Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. 2006. V. 3, N 7. P. 1349–1357.

8. *Денчев Р.* О задаче Дирихле для волнового уравнения // Докл. АН СССР. 1959. Т. 127, № 3. С. 501–504.

9. *Арнольд В. И.* Малые знаменатели. I. Об отображениях окружности на себя // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1961. Т. 25. С. 21–86.

10. *Каплицкий В. М.* Асимптотика дискретного спектра квазипериодической краевой задачи для двумерного гиперболического уравнения // Мат. сб. 2009. Т. 200, № 2. С. 61–74.

11. *Титчмарш Э. К.* Теория дзета-функции Римана. М.: Изд-во иностр. лит., 1953.

12. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1965.

13. *Ky Fan.* A minimum properties and inequalities for the eigenvalues of a hermitian transformation. Eigenvalues of a sum of hermitian matrices // Amer. Math. Monthly. 1953. V. 60, N 1. P. 48–50.

14. *Маркус А. С., Мацаев В. И.* Теорема о сравнении спектров и спектральная асимптотика для пучка М. В. Келдыша // Мат. сб. 1984. Т. 123. С. 391–406.

15. *Маркус А. С., Мацаев В. И.* Об асимптотике спектра операторов, близких к нормальным // Функцион. анализ и его прил. 1979. Т. 13, № 3. С. 93–94.

16. *Параска В. И.* Об асимптотике собственных и сингулярных чисел линейных операторов, повышающих гладкость // Мат. сб. 1965. Т. 68. С. 621–631.

17. *Бухштаб А. А.* Теория чисел. М.: Просвещение, 1966.

18. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Т. I. Функциональный анализ. М.: Мир, 1978.

19. *Арнольд В. И.* Лекции об уравнениях с частными производными. М.: ФАЗИС, 1997.

Статья поступила 1 октября 2009 г.

Каплицкий Виталий Маркович
Южный федеральный университет,
факультет математики, механики и компьютерных наук,
ул. Мильчакова, 8а, Ростов-на Дону 344090;
Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А,
ул. Маркуса, 22, Владикавказ 362027
kaplitsky@donpac.ru