Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2010. Том 51, № 5

УДК 517.544

ЧАСТНЫЕ ИНДЕКСЫ УНИТАРНОЙ И ЭРМИТОВОЙ МАТРИЦ–ФУНКЦИЙ

А. Ф. Воронин

Аннотация. Показано, что все частные индексы четной унитарной матрицы-функции порядка $n > 1$ равны нулю. Найдены новые эффективные достаточные условия для существования канонической факторизации эрмитовой матрицы-функции порядка два (когда все ее частные индексы равны нулю).

Ключевые слова: факторизация, матрица-функция, частный индекс.

Введение. Будем использовать следующие обозначения [1]: $L_{n\times n}$ — пространство $n \times n$ матриц-функций с элементами из $L_1(R)$, где R — расширенная вещественная прямая $R = (-\infty, \infty) \cup \{\pm\infty\}$; $\hat{f}$ — Фурье-образ матрицы-функции $f \in L_{n\times n}$:

$$\hat{f}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{ipt}\,dt, \quad p \in R;$$

$W^{n\times n}$ — алгебра Винера непрерывных матриц-функций вида $c + \hat{f}$, где c — постоянная матрица порядка n и $f \in L_{n\times n}$; $W_+^{n\times n}$ ($W_-^{n\times n}$) — подалгебра в $W^{n\times n}$, состоящая из матриц-функций вида $c + \hat{f}$ таких, что $f(t) = 0$ при $t < 0$ (при $t > 0$).

Если A — некоторая алгебра, то через $\mathscr{G}A$ обозначим группу из обратимых элементов в A.

Матрица $G \in \mathscr{G}W^{n\times n}$ допускает стандартную факторизацию, если она представляется в виде следующего произведения матриц:

$$G(x) = G_+(x)D(x)G_-(x), \quad x \in R, \tag{0.1}$$

где $G_\pm \in \mathscr{G}W_\pm^{n\times n}$, $D(x)$ — диагональная матрица-функция:

$$D(x) = \left\{\left(\frac{x-i}{x+i}\right)^{\kappa_1}, \dots, \left(\frac{x-i}{x+i}\right)^{\kappa_n}\right\},$$

$\kappa_1 \geq \kappa_2 \geq \dots \geq \kappa_n$ — частные индексы матрицы G (целые числа), $\kappa := \operatorname{Ind}\det G(t) = \sum_{j=1}^{n} \kappa_j$ — суммарный индекс матрицы G. Если $\kappa_1 = \kappa_2 = \dots = \kappa_n = 0$ ($D = I$ — единичная матрица), то $G = G_+G_-$ — каноническая факторизация матрицы-функции G.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Интеграционного проекта СО РАН (№ 2009–93) и Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 10–01–00384).

Одной из первостепенных задач теории факторизации матриц-функций и непосредственно связанных с ней теорий систем уравнений Винера — Хопфа, характеристических систем сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши, является задача определения частных индексов матриц-функций [2, § 132–134; 3, § 5.1; 4, § 17; 5, § 5.3].

Кроме того, теория факторизации матриц-функций играет важную роль в методе обратной задачи рассеяния [6, 7] и некоторых разделах теории вероятностей [8].

К настоящему времени неизвестны методы вычисления частных индексов матриц-функций общего вида. Однако для некоторых классов матриц-функций они вычисляются. Известно, что частные индексы вычисляются для треугольных и рациональных матриц-функций (теория факторизации этих матриц-функций хорошо изучена), а также для эрмитовых положительно определенных матриц-функций, последние имеют все нулевые частные индексы [9; 10, § 8].

В [11–13] приведены критерии канонической факторизации эрмитовой матрицы-функции второго порядка (в общем случае), унитарной и круговой матрицы-функции соответственно. Отметим, что приведенные в [11–13] критерии не эффективны. Проверка условий этих критериев также является проблемой.

В данной работе в теореме 2 показано, в частности, что все частные индексы четной унитарной матрицы-функции порядка $n > 1$ равны нулю. В теореме 3 найдены эффективные достаточные условия существования канонической факторизации эрмитовой матрицы-функции порядка $n = 2$. Эти условия дополняют достаточные условия существования канонической факторизации эрмитовой матрицы-функции в [9; 10, теорема 8.1; 14]. Кроме того, в работе предложены два критерия существования канонической факторизации. Критерии эффективны по крайней мере для положительно определенных матриц-функций и четных унитарных матриц-функций. Для матриц-функций общего вида критерии имеют лишь теоретическое значение.

Перейдем к формулировкам двух непосредственно используемых в работе хорошо известных утверждений (см. [10, теоремы 7.2, 7.3]).

Теорема 1. *Пусть*

$$G \in \mathscr{G}W^{n\times n}. \tag{0.2}$$

Тогда матрица-функция G *допускает стандартную факторизацию* (0.1).

Лемма 1. *Пусть выполнено условие* (0.2) *и суммарный индекс матрицы* G *равен нулю* ($\kappa = 0$)*. Тогда любая другая стандартная факторизация матрицы* $G(x)$ *имеет следующий вид:*

$$G(x) = \widetilde{G}_+(x)D(x)\widetilde{G}_-(x), \quad x \in R, \tag{0.3}$$

где

$$\widetilde{G}_\pm \in \mathscr{G}W^{n\times n}_\pm, \quad \widetilde{G}_+(x) = G_+(x)\,\Omega_+(x), \quad \widetilde{G}_-(x) = \Omega_-(x)\,G_-(x). \tag{0.4}$$

При этом если все частные индексы равны нулю, то $\Omega := \Omega_- = \Omega_+^{-1}$ *— произвольная невырожденная постоянная матрица.*

В противном случае (когда не все частные индексы равны нулю) $\Omega_\pm$ *— рациональные матрицы-функции из* $\mathscr{G}W^{n\times n}_\pm$ *соответственно и выполняются следующие соотношения:*

1) $\omega^+_{jk}(x) \equiv 0$ *при* $\kappa_k > \kappa_j$;

2) $\omega^+_{jk}(x) = \mathrm{const}_j$ *при* $\kappa_k = \kappa_j$;

3) $\omega_{jk}^{+}(x)$ — *произвольный полином от* $(x-i)/(x+i)$ *степени* $\leq \kappa_j - \kappa_k$ *при* $\kappa_k < \kappa_j$.

Здесь $\omega_{jk}^{+}(x)$ $(j,k = 1,\dots,n)$ — *элементы матрицы* $\Omega_+(x)$,

$$\Omega_-(x) = D^{-1}(x)\Omega_+^{-1}(x)D(x), \quad x \in R. \tag{0.5}$$

Из леммы 1 следует, что матрица $\Omega_+(x)$ при условии, что не все частные индексы матрицы $G(x)$ равны нулю, имеет следующий общий вид:

$$\Omega_+(x) = \begin{pmatrix} Q_1 & * & \dots & * \\ 0 & Q_2 & \dots & * \\ 0 & \dots & Q_j & * \\ 0 & 0 & \dots & Q_m \end{pmatrix}, \tag{0.6}$$

где Q_j — произвольная невырожденная постоянная квадратная матрица, порядок которой m_j равен кратности индекса κ_j $(j = 1,\dots,m \leq n)$. Звездочками помечены места, на которых находятся матрицы с элементами, являющимися произвольными многочленами от $(x-i)/(x+i)$ соответствующих степеней.

Очевидно, что матрицы $\Omega_\pm(x)$ верхние треугольные при $\kappa_k \neq \kappa_j$, $j \neq k$ $(j,k = 1,\dots,n)$. В частности, для $n = 2$ матрица $\Omega_+(x)$ имеет следующий общий вид:

$$\Omega_+(x) = \begin{pmatrix} c_1 & P(x) \\ 0 & c_2 \end{pmatrix},$$

где c_1, c_2 — произвольные постоянные $(c_1c_2 \neq 0)$, $P(x)$ — произвольный полином от $(x-i)/(x+i)$ степени не выше $\kappa_1 - \kappa_2$.

Пусть матрица-функция G удовлетворяет условиям леммы 1 и среди ее частных индексов существует хотя бы один отличный от нуля. Тогда для такой матрицы $G(x)$ будем обозначать через $\mathscr{K}_n$ множество (набор) ее частных индексов. Таким образом, $\mathscr{K}_n = \{\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n\}$, где $\kappa_1 \geq \kappa_2 \geq \dots \geq \kappa_n$. Через $\mathscr{P}^+(R; \mathscr{K}_n)$ обозначим класс рациональных матриц-функций вида (0.6), отвечающих набору $\mathscr{K}_n$. Положим

$$\mathscr{P}^+(\mathscr{K}_n) := \{\Omega_+(\infty) : \Omega_+ \in \mathscr{P}^+(R; \mathscr{K}_n)\}.$$

Каждому набору $\mathscr{K}_n$ соответствует класс постоянных матриц $\mathscr{P}^+(\mathscr{K}_n)$. Из (0.6) вытекает, что $I, V \in \mathscr{P}^+(\mathscr{K}_n)$, $I_1 \notin \mathscr{P}^+(\mathscr{K}_n)$ для любого набора $\mathscr{K}_n$, где V — верхняя треугольная постоянная неособенная матрица порядка n, I_1 — матрица порядка n, состоящая из нулей, за исключением неглавной диагонали, которую заполняют единицы.

Легко видеть, что матрица I_1 обладает следующими свойствами:

$$I = I_1^2, \quad I_1^{-1} = I_1^T = I_1,$$

где ^{T} — знак транспонирования.

Отметим важное свойство класса $\mathscr{P}^+(\mathscr{K}_n)$. Из (0.6) можно видеть, что $\omega_{n1}^{+} = 0$, где $\left(\omega_{kj}^{+}\right) \equiv \Omega_+(\infty) \in \mathscr{P}^+(\mathscr{K}_n)$. Тогда, положив $(b_{kj}) := \Omega_+(\infty)I_1$, имеем

$$b_{nn} = 0 \quad (\omega_{n1}^{+} = 0) \tag{0.7}$$

для любого набора $\mathscr{K}_n$.

Приведем достаточно элементарный критерий канонической факторизации матрицы-функции общего вида, который вытекает из леммы 1. Кроме того, что критерий имеет самостоятельное значение, идея его доказательства лежит в основе доказательств основных результатов данной работы.

Критерий 1. *Пусть выполнено условие* (0.2) *и суммарный индекс матрицы* $G(x)$ *равен нулю* ($\kappa = 0$). *Положим*

$$\left(\omega_{kj}^{+}\right) := G_{+}^{-1}(\infty)\widetilde{G}_{+}(\infty), \tag{0.8}$$

где $\widetilde{G}_{+}$ *и* G_{+} — *факторы в факторизациях* (0.3) *и* (0.1) *соответственно. Тогда если* $\omega_{n1}^{+} \neq 0$, *то факторизация* (0.1) *каноническая* ($D = I$).

Верно и обратное утверждение. Если матрица $G(x)$ *допускает каноническую факторизацию* (0.1) ($D = I$), *то существует другая каноническая факторизация* (0.3) ($D = I$) *такая, что* $\omega_{n1}^{+} \neq 0$ *в* (0.8).

Доказательство. Пусть $\omega_{n1}^{+} \neq 0$. Предположим противное: матрица-функция G не допускает канонической факторизации. Из (0.8) и первого равенства в (0.4) получим $\left(\omega_{kj}^{+}\right) \in \mathscr{P}^{+}(\mathscr{K}_n)$. Тогда из (0.7) следует противоречивая цепочка $0 \neq \omega_{n1}^{+} = 0$. Значит, принятое предположение, что $D \neq I$, неверно.

Вторая часть критерия (обратное утверждение) непосредственно вытекает из первой части леммы 1.

Из критерия 1 легко видеть, что для его практического использования достаточно показать, что $\omega_{n1}^{+} \neq 0$. Но мы не имеем априорной информации о матрицах $G_{+}(\infty)$, $\widetilde{G}_{+}(\infty)$ в общем случае. Однако об их произведении, матрице (ω_{kj}^{+}), априорную информацию можно получить, если исходная матрица-функция $G(x)$ обладает определенной симметрией. Например, если $G(x)$ — четная унитарная или эрмитова положительно определенная матрица, то в этих случаях устанавливается, что $\omega_{n1}^{+} \neq 0$.

1. Основные результаты. В данном пункте сформулируем основные результаты работы. Доказательства результатов (критерия 2 и теорем 2, 3) будут представлены в пп. 2–4 настоящей работы.

Критерий 2. *Если выполнено условие* (0.2) *и* $G(\infty) = I$, *то матрица-функция* G *допускает каноническую факторизацию тогда и только тогда, когда существуют матрицы-функции* $A_{\pm}$ *такие, что*

$$A_{\pm} \in \mathscr{G}W_{\pm}^{n\times n}, \quad A_{\pm}(\infty) = I,$$

и справедливо одно из следующих двух равенств:

(i) $G(x) = A_{+}(x)G^{*}(x)A_{-}(x), \quad x \in R,\ G^{*} \equiv \overline{G}^{T}$,

либо

(ii) $G(x) = A_{+}(x)\overline{G}^{\perp}(-x)A_{-}(x), \quad x \in R,\ G^{\perp} \equiv (G^{T})^{-1}$.

Легко видеть, что если $A_{\pm} = I$, то критерий 2(i) следует из [9]. Из критерия 2(ii), что важно для его практической ценности, вытекает

Теорема 2. *Пусть выполнено условие* (0.2). *Если*

$$G(x) = \overline{G}^{\perp}(-x), \quad x \in R, \tag{1.1}$$

то матрица $G(x)$ *допускает каноническую факторизацию* ($D = I$).

Отметим, что для четной унитарной матрицы условие (1.1) выполняется. Теорема 2 анонсирована в [15].

Следствие. *Пусть выполнено условие* (0.2) *и матрица-функция* G *круговая,* $G(x)\overline{G}(x) = I$, $x \in R$. *Если, кроме того,* $G(x) = G^T(-x)$, $x \in R$, *то матрица-функция* G *допускает каноническую факторизацию.*

Легко видеть, что эрмитова матрица-функция из класса $\mathscr{G}W^{2\times 2}$ имеет следующий общий вид:

$$G(x) = \begin{pmatrix} g_{11}(x) & g_{12}(x) \\ \overline{g_{12}}(x) & g_{22}(x) \end{pmatrix}, \tag{1.2}$$

где

$$g_{kj} \in W^{1\times 1},\ \operatorname{Im} g_{jj}(x) = 0, \quad k, j = 1, 2,\ \det G(x) \neq 0,\ x \in R. \tag{1.3}$$

Для вычисления частных индексов матрицы (1.2) представляет интерес лишь случай $\det G(x) < 0$, $x \in R$, так как при $\det G(x) > 0$ частные индексы матрицы (1.2) равны нулю [9]. Имеет место

Теорема 3. *Пусть для матрицы* $G(x)$ *в* (1.2) *выполнено условие* (1.3) *и* $g_{11} = -g_{22}$. *Тогда если функции* g_{11} *и* g_{12} *четные, т. е.* $g_{11}(x) = g_{11}(-x)$, $g_{12}(x) = g_{12}(-x)$, *то все частные индексы матрицы-функции* G *равны нулю.*

2. Доказательство критерия 2. Из условия (i) либо (ii) следует, что суммарный индекс матрицы $G(x)$ равен нулю.

Начнем с доказательства достаточности условия (i). Предположим, что матрица-функция G не допускает канонической факторизации. Тогда из условия (i) и факторизации (0.1) получим

$$G_+(x)D(x)G_-(x) = A_+(x)\overline{G}_-^T(x)\overline{D}(x)\overline{G}_+^T(x)A_-(x), \quad x \in R. \tag{2.1}$$

Положим

$$D_1(x) := I_1\overline{D}(x)I_1.$$

Непосредственно убеждаемся, что

$$D_1(x) = \left\{ \left(\frac{x-i}{x+i}\right)^{-\kappa_n}, \dots, \left(\frac{x-i}{x+i}\right)^{-\kappa_1} \right\}, \quad -\kappa_n \geq \dots \geq -\kappa_1. \tag{2.2}$$

Из (2.1), (2.2) и очевидного равенства $I_1^{-1} = I_1$ получим

$$G_+(x)D(x)G_-(x) = A_+(x)\overline{G}_-^T(x)I_1D_1(x)I_1\overline{G}_+^T(x)A_-(x), \quad x \in R. \tag{2.3}$$

Можно видеть, что левая и правая части равенства (2.3) являются стандартными факторизациями матрицы $G(x)$. Тогда из (2.3) по теореме единственности для частных индексов [5, теорема 5.4; 10, теорема 7.1] имеем $D_1 = D$, а по лемме 1 (первое равенство в (0.4)) из (2.3) следует, что

$$G_+(x)\Omega_+(x) = A_+(x)\overline{G}_-^T(x)I_1, \quad x \in R \tag{2.4}$$

где $\Omega_+(x)$ — некоторая матрица из $\mathscr{P}^+(R; \mathscr{K}_n)$. Рассмотрев равенство (2.4) в точке $x = \infty$, после элементарных преобразований получим

$$(a_{kj}) := G_-(\infty)\overline{G}_-^T(\infty) = \Omega_+(\infty)I_1 := (b_{kj}) \tag{2.5}$$

ввиду того, что

$$A_+(\infty) = I, \quad G_+(\infty)G_-(\infty) = I \tag{2.6}$$

по условию. Из (2.5), (0.7) и условия невырожденности матрицы $G_-(\infty)$ следует невозможная цепочка соотношений:

$$0 \neq \sum_{j=1}^{n} \left|g_{nj}^{-}(\infty)\right|^2 = a_{nn} = b_{nn} = 0,$$

где g_{kj}^{-} $(k, j = 1, \dots, n)$ — элементы матрицы-функции G_-. Следовательно, предположение, что матрица-функция G не допускает канонической факторизации неверно ввиду полученного противоречия.

Доказательство достаточности условия (ii) проведем по аналогии с доказательством достаточности условия (i). Непосредственно убеждаемся, что

$$D_1(x) = I_1 \overline{D}(x) I_1 = I_1 \overline{D}^{\perp}(-x) I_1.$$

Тогда из условия (ii) и выражения для факторизации матрицы $G(x)$ в (0.1) получим

$$G_+(x) D(x) G_-(x) = A_+(x) \overline{G}_+^{\perp}(-x) I_1 D_1(x) I_1 \overline{G}_-^{\perp}(-x) A_-(x), \quad x \in R. \tag{2.7}$$

По теореме единственности для частных индексов и лемме 1 (первое равенство в (0.4)) из (2.7) следует, что

$$D_1 = D, \quad G_+(x)\Omega_+(x) = A_+(x)\overline{G}_+^{\perp}(-x) I_1, \quad x \in R, \tag{2.8}$$

где $\Omega_+(x)$ — некоторая матрица из $\mathscr{P}^+(R; \mathscr{K}_n)$. Из второго равенства в (2.8) при $x = \infty$ с учетом (2.6) и равенства $G_\pm(-\infty) = G_\pm(\infty)$ после элементарных преобразований получим (2.5). Далее доказательство полностью повторяет доказательство достаточности условия (i) начиная с равенства (2.5).

Необходимость условий (i) и (ii) очевидна. Критерий 2 доказан.

3. Доказательство теоремы 2. В частном случае, когда $G(\infty) = I$, теорема 2 непосредственно вытекает из критерия 2(ii) при $A_\pm = I$.

В общем случае ($G(\infty) \neq I$) матрица-функция $G_1(x) := G(x)G^{-1}(\infty)$ удовлетворяет условию (1.1) и $G_1(\infty) = I$. Тогда для $G_1(x)$ теорема 2 выполняется согласно критерию 2(ii) при $A_\pm = I$. Теорема 2 доказана.

4. Доказательство теоремы 3. Положим

$$U(x) := \frac{1}{d(x)} \begin{pmatrix} u_1(x) & u_2(x) \\ -\bar{u}_2(x) & u_1(x) \end{pmatrix}, \tag{4.1}$$

где $u_1, u_2 \in W^{1\times 1}$, $\operatorname{Im} u_1 = 0$, $u_1(x) = u_1(-x)$, $u_2(x) = u_2(-x)$,

$$d(x) = ((u_1(x))^2 + |u_2(x)|^2)^{1/2} \neq 0, \quad x \in R.$$

Тогда можно видеть, что матрица U в (4.1) удовлетворяет условию (1.1) и, следовательно, для нее справедлива теорема 2. Значит, все частные индексы матрицы $U(x)$ равны нулю. Следовательно, все частные индексы матрицы $G(x) := d(x) I_2 U(x)$, где $I_2 = \{1, -1\}$ — диагональная матрица, также равны нулю ввиду того, что $\operatorname{Ind} d(x) = 0$ по построению. Теорема 3 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Feldman I., Gohberg I., Krupnik N.* Convolution equations on finite intervals and factorization of matrix functions // Integr. Equations Oper. Theory. 2000. V. 36. P. 201–211.
2. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.
3. *Гахов Ф. Д., Черский Ю. И.* Уравнения типа свертки. М.: Наука, 1978.
4. *Гахов Ф. Д.* Краевая задача Римана для системы n пар функций // Успехи мат. наук. 1954. Т. 7, № 4. С. 3–54.
5. *Литвинчук Г. С.* Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. М.: Наука, 1986.
6. *Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д.* Гамильтонов подход в теории солитонов. М.: Наука, 1986.
7. *Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П.* Теория солитонов: Метод обратной задачи. М.: Наука, 1980.
8. *Боровков А. А.* Теория вероятностей. М.: Наука, 1999.
9. *Шмульян Ю. Л.* Задача Римана с положительно определенной матрицей // Успехи мат. наук. 1953. Т. 8, № 2. С. 143–145.
10. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Системы интегральных уравнений на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов // Успехи мат. наук. 1958. Т. 13, № 2. С. 3–72.
11. *Спитковский И. М., Николайчук А. М.* Факторизация эрмитовых матриц-функций и ее приложения к граничным задачам // Укр. мат. журн. 1975. Т. 27, № 6. С. 767–779.
12. *Rabindranatthan M.* On the inversion of Toeplitz operators // J. Math. Mech. 1969. V. 19, N 3. P. 195–206.
13. *Тишин П. М.* Критерий устойчивости частных индексов круговой матрицы-функции // Мат. заметки. 1988. Т. 44, № 4. С. 536–545.
14. *Литвинчук Г. С.* Две теоремы об устойчивости частных индексов краевой задачи Римана и их приложение // Изв. вузов. Математика. 1967. Т. 67, № 12. С. 47–57.
15. *Воронин А. Ф.* О корректности краевой задачи Римана с матричным коэффициентом // Докл. РАН. 2007. Т. 414, № 2. С. 156–158.

Статья поступила 30 июля 2009 г.

Воронин Анатолий Федорович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
voronin@math.nsc.ru