Сибирский математический журнал
Июль—август, 2010. Том 51, № 4

УДК 517.547.2

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ КАНОНИЧЕСКИХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ С НУЛЯМИ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

А. А. Юхименко

Аннотация. Получены точные асимптотические оценки во всей комплексной плоскости для канонических произведений с нулями вида $\lambda_n = -n^{\alpha} l(n)$, где $\alpha > 0$, а $l(t)$ — медленно меняющаяся функция.

Ключевые слова: каноническое произведение, асимптотическая оценка, медленно меняющаяся функция.

1. Введение

Напомним, что *каноническим произведением* с нулями λ_n называется целая функция следующего вида:

$$F_\Lambda(z) = z^m \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_n}\right) \exp\left(\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k}\left(\frac{z}{\lambda_n}\right)^k\right), \quad m \in \mathbb{Z}_+, \tag{1}$$

где p — целое неотрицательное число такое, что $\sum |\lambda_n|^{-p} = \infty$, а $\sum |\lambda_n|^{-(p+1)} < \infty$. Всюду по умолчанию полагаем $m = 0$.

Через $\Lambda(t)$ будем обозначать *считающую функцию* последовательности $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, т. е. функцию, значение которой в точке t равно количеству (с учетом кратностей) элементов последовательности Λ, попавших в круг $|z| \le t$.

В настоящей работе рассматриваются канонические произведения с нулями вида

$$\lambda_n = -n^{1/\rho} L(n), \quad \rho > 0,$$

где $L(t)$ — некоторая медленно меняющаяся функция. Для таких канонических произведений $p \le \rho \le p + 1$. Последовательность Λ удобнее задавать через считающую функцию

$$\Lambda(t) \sim t^\rho l(t), \quad \lambda_n \in \mathbb{R}_-, \tag{2}$$

где $l(t)$ — какая-то другая медленно меняющаяся функция (зависящая от $L(t)$). Первые оценки для канонических произведений с нулями такого вида получены Валироном [1] и Титчмаршем [2]. Они показали, что если $\Lambda(t)$ имеет вид (1), где ρ нецелое, то при любом $\varphi \ne \pi$

$$\ln F_\Lambda(re^{i\varphi}) \sim \frac{\pi}{\sin \pi\rho} z^\rho l(r), \quad r \to +\infty, \ z = re^{i\varphi}. \tag{3}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 09–01–00225а).

Понятно, почему оценка производится только на лучах, не совпадающих с отрицательной полуосью, — на ней расположены нули канонического произведения. Но если исключить из $\mathbb{R}_-$ окрестности точек λ_n, то имеет место оценка, аналогичная (2):

$$\ln F_\Lambda(-r) \sim \pi \operatorname{ctg} \pi\rho \cdot r^\rho l(r), \quad r \to +\infty, \ |r + \lambda_n| > \delta > 0.$$

Эта оценка для $0 < \rho < 1$ принадлежит Титчмаршу [2]. Распространить ее на случай произвольного нецелого ρ удалось Б. Я. Левину [3] и независимо от него Пфлюгеру [4]. Они получили равномерную оценку, аналогичную (2), во всей комплексной плоскости, за исключением некоторого множества, содержащего точки λ_n.

Множитель $\sin \pi\rho$ в знаменателе (2) указывает на то, что оценка в случае целого ρ должна быть другой. В [5] доказана следующая теорема: *если $\rho \in \mathbb{N}$, то при любом $\varphi \neq \pi$*

$$\ln F_\Lambda(re^{i\varphi}) \sim (-z)^\rho \tilde{l}(r), \quad r \to +\infty, \ z = re^{i\varphi}, \tag{4}$$

где

$$\tilde{l}(r) = \begin{cases} \int\limits_1^r \frac{l(t)}{t}\, dt, & \rho = p, \\ -\int\limits_r^\infty \frac{l(t)}{t}\, dt, & \rho = p + 1. \end{cases} \tag{5}$$

В отличие от случая нецелого порядка автору неизвестны асимптотические оценки на отрицательной полуоси при ρ целом (за исключением частного случая $F_\Lambda(z) = 1/\Gamma(z)$, соответствующего последовательности $\lambda_n = -n$).

Условие (1) слишком широкое, чтобы получить более точные асимптотические оценки для канонического произведения. К тому же вызывает интерес вопрос о поведении $F_\Lambda(z)$ вблизи точек последовательности Λ. Решение обеих этих задач можно найти, наложив дополнительные условия на распределение нулей функции $F_\Lambda(z)$. Этому и посвящена настоящая статья. Для широкого класса последовательностей Λ в работе найдены несколько первых членов асимптотики $F_\Lambda(z)$ во всей комплексной плоскости. Важно, что примененный автором подход является единообразным для всех $\rho > 0$, как целых, так и нецелых.

2. Вспомогательные предложения

Определение. Положительная функция $l(t)$ называется *медленно меняющейся* (на бесконечности), если она измерима на полуоси $[A, \infty]$, $A > 0$, и при всех $\lambda > 0$

$$\lim_{t \to \infty} \frac{l(\lambda t)}{l(t)} = 1. \tag{6}$$

Важный подкласс в классе медленно меняющихся функций образуют аналитические медленно меняющиеся функции.

Определение. Аналитическая в области $\Omega = \{|z| > a, \ |\arg z| < \alpha \leq \pi\}$ функция $l(z)$ называется *аналитической медленно меняющейся* в этой области, если

$$z \frac{l'(z)}{l(z)} \to 0, \quad z \to \infty, \ z \in \Omega.$$

Лемма A. *Пусть $l(z)$ — аналитическая в области Ω медленно меняющаяся функция, а K — произвольный компакт, лежащий в Ω. Тогда равномерно по всем $c \in K$*

$$l(c\,z) \sim l(z),\ z \to \infty,\ z \in \Omega, \quad |\arg z| + |\arg c| < \alpha. \tag{7}$$

Доказательство. По определению медленно меняющейся функции

$$\frac{l'(z)}{l(z)} = o\left(\frac{1}{z}\right), \quad z \to \infty,\ z \in \Omega.$$

Поэтому для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое R, что для всех z, по модулю больших R,

$$\left|\ln \frac{l(cz)}{l(z)}\right| = \left|\int\limits_z^{cz} \frac{l'(w)}{l(w)}\,dw\right| = \left|\int\limits_z^{cz} o\left(\frac{1}{w}\right)\,dw\right| \le \varepsilon|\ln c| < \varepsilon \max_{c\in K} |\ln c|,$$
$$|\arg z| + |\arg c| < \alpha.$$

Последнее и означает, что (7) выполняется равномерно на K.

Лемма B [6, 3.1, лемма 2]. *Пусть $l(t)$ — аналитическая медленно меняющаяся функция, а $f(t)$ — абсолютно интегрируемая на интервале $(0,\infty)$ функция, удовлетворяющая условиям*

$$|f(t)| = O(t^{\gamma-1}),\ t \to 0, \quad |f(t)| = O(t^{-\gamma-1}),\ t \to \infty,$$

при некотором $\gamma > 0$. Тогда

$$\int\limits_{a/x}^{\infty} l(xt)f(t)\,dt = l(x)\left(\int\limits_0^{\infty} f(t)\,dt + o(1)\right).$$

Анализ доказательства леммы B показывает, что верно более общее

Замечание A. Если f в лемме B есть функция двух переменных t и φ ($t > 0$, $\varphi \in B \subseteq \mathbb{R}$) и при некоторых $\gamma_1, \gamma_2 > 0$

$$\int\limits_0^{\infty} |f(t,\varphi)|\,dt = O(1),\ |f(t,\varphi)| = O(t^{\gamma_1-1}),\ t \to 0,\ |f(t,\varphi)| = O(t^{-\gamma_2-1}),\ t \to \infty,$$

равномерно по $\varphi \in B$, то

$$\int\limits_{a/x}^{\infty} l(xt)f(t,\varphi)\,dt = l(x)\left(\int\limits_0^{\infty} f(t,\varphi)\,dt + o(1)\right)$$

равномерно по $\varphi \in B$.

Лемма C [6, § 4.2, лемма 2]. *Пусть $f(z)$ — функция, аналитическая в некоторой области D, содержащей полуполосу $\operatorname{Re} z > \sigma$, $|\operatorname{Im} z| < H$ ($\sigma > 0$ — нецелое число), и удовлетворяющая условию*

$$|f(x+iy)| < \varepsilon(x)e^{a|y|}, \quad x + iy \in D,\ a < 2\pi,$$

где $\varepsilon(x) \xrightarrow{x\to\infty} 0$. Если интеграл $\int\limits_\sigma^\infty f(x)\,dx$ сходится, то

$$\sum_{n>\sigma} f(n) = \int\limits_\sigma^\infty f(x)\,dx + \int\limits_{C_\sigma^+} \frac{f(z)dz}{e^{-2\pi iz}-1} + \int\limits_{C_\sigma^-} \frac{f(z)dz}{e^{2\pi iz}-1},$$

где C_σ^+ (C_σ^-) — любой контур, идущий из точки $z = \sigma$ в бесконечность выше (ниже) действительной оси, оставаясь в D.

3. Основной результат

Мы будем искать асимптотические оценки для канонического произведения (1) с нулями, порождающая функция которого при достаточно больших t имеет вид

$$\Lambda(t) = [\lambda(t)],\ t > a, \quad \lambda(t) = t^{\rho} l(t),\ \rho > 0,\ \Lambda \subset \mathbb{R}_-, \tag{8}$$

где $l(z)$ — аналитическая в области $\Omega = \{z : |\arg z| < \alpha,\ |z| > a\}$ медленно меняющаяся функция такая, что $l([a,\infty]) \subseteq R_+$. Для удобства формулировок будем считать, что $\alpha < \pi/\max\{1,\rho\}$. Продифференцируем $\lambda(z)$:

$$\lambda'(z) = z^{\rho-1} l(z)(\rho + z l'(z)/l(z)).$$

По определению аналитических медленно меняющихся функций $|z \cdot l'(z)/l(z)| < \rho$ при достаточно больших z (без ограничения общности можно считать, что при $|z| > a$), а значит, $\lambda'(z) \neq 0$. Следовательно, в области $\lambda(\Omega)$ определена аналитическая функция $\lambda^{-1}(z)$. Из (8) видно, что $\lambda_n = \lambda^{-1}(n)$.

Обозначим

$$l_0(z) = l(z),\ l_1(z) = z\frac{l_0'(z)}{l(z)}, \dots, l_n(z) = z l_{n-1}'(z)/l_{n-1}(z);$$

$$L_0(z) = l(z),\ L_1(z) = z \cdot L_0'(z), \dots, L_n(z) = z \cdot L_{n-1}'(z)$$

и потребуем, чтобы функции $l_n(z)$, $n = 0, \dots, N$, были аналитическими медленно меняющимися. Тогда функции $L_n(z)$ являются линейными комбинациями произведений $l_n(z)$. Поскольку произведение аналитических медленно меняющихся функций есть функция аналитическая медленно меняющаяся, то $L_n(z)$ — линейная комбинация аналитических медленно меняющихся функций. Кроме того,

$$L_n(z) = o(L_{n-1}(z)), \quad n = 1, \dots, N,$$

так как $l_n(z) = o(1)$, $n = 1, \dots, N$.

Найдем асимптотику функции $F_\Lambda(z)$ во всей комплексной плоскости (за исключением разве что некоторого круга с центром в начале координат). Для удобства формулировок и доказательств мы будем использовать символ «$\doteq$»:

$$f(z) \doteq g(z) \Leftrightarrow f(z) = O(1) + g(z), \quad z \in B \subseteq \mathbb{C}.$$

Сформулируем основной результат.

Теорема 1. *Пусть Λ — последовательность* (8) *и $l_n(z)$, $n = 0, \dots, N$, — аналитические медленно меняющиеся в области Ω функции. Тогда найдется такое $R > 0$, что для канонического произведения* (1) *с нулями $\{\lambda_n\}$ в области $|z| > R$ верна следующая оценка:*

$$\ln F_\Lambda(z) = -\frac{1}{2}\ln z + Q_p(z) + G_\Lambda(z) \\ + r^{\rho} \cdot \begin{cases} \sum\limits_{n=0}^{N} a_n(\varphi) L_n(r) + o(L_N(r)), & p < \rho < p+1, \\ b_{-1}(\varphi)\tilde{l}(r) + \sum\limits_{n=0}^{N} b_n(\varphi) L_n(r) + o(L_N(r)), & \rho = p, p+1 \end{cases} \tag{9}$$

(здесь и далее выбирается ветвь логарифма, характеризующаяся условием $-\pi < \varphi = \arg z \leq \pi$), где $Q_p(z)$ — многочлен степени p (зависящий от Λ), $\tilde{l}(r)$ —

функция (5), $a_k(\varphi)$ *и* $b_k(\varphi)$ — *некоторые функции (формулы для них будут приведены в лемме* 2), *а* $G_\Lambda(z)$ *определена с точностью до* $O(1)$*:*

$$G_\Lambda(z) \doteq \begin{cases} 0, & |\varphi| \le \pi - \alpha, \\ \ln(1 - e^{-2\pi i \operatorname{sign}\varphi \cdot \lambda(-z)}), & |\varphi| > \pi - \alpha. \end{cases}$$

Докажем две леммы, теорема будет их прямым следствием.

Лемма 1. *Пусть* Λ — *последовательность из теоремы. Тогда найдется* $\sigma > 0$ *такое, что при* $|z| > \lambda^{-1}(\sigma)$

$$\ln F_\Lambda(z) = (\sigma - 1/2)\ln z + Q_p(z) + G_\Lambda(z) + \int_\sigma^\infty \left(\ln\left(1 + \frac{z}{\lambda^{-1}(t)}\right) + \sum_{k=1}^p \frac{1}{k}\left(\frac{-z}{\lambda^{-1}(t)}\right)^k\right) dt.$$

Доказательство. 1. Для удобства доказательства будем считать, что $\Lambda \subset \mathbb{R}_+$, оценка из формулировки леммы получится простой заменой z на $-z$. Кроме того, рассмотрим отдельно два случая $z \notin \Omega$ и $z \in \Omega$.

2. ($z \notin \Omega$) Выберем произвольное $0 < \eta < \alpha$ и обозначим через L_η ($L_{-\eta}$) кривую, в которую переходит луч $\arg w = \eta$($\arg w = -\eta$) при отображении $\lambda(w)$. Выберем ненатуральное $\sigma > 0$. Обозначим через $L_{\sigma,\eta}$ ($L_{\sigma,-\eta}$) контур, образованный дугой окружности радиуса σ с центром в точке $w = 0$ и частью L_η ($L_{-\eta}$), идущей от точки пересечения с этой окружностью и до бесконечности. Пусть D — область, ограниченная кривыми $L_{\sigma,\eta}$ и $L_{\sigma,-\eta}$. Потребуем, чтобы $D \subset \lambda(\Omega)$ (этого всегда можно добиться за счет выбора σ). Поскольку

$$\lambda^{-1}(D) \subset \Omega,$$

при $z \notin \Omega$ у функции

$$f_z(w) = \ln\left(1 - \frac{z}{\lambda^{-1}(w)}\right) + \sum_{k=1}^p \frac{1}{k}\left(\frac{z}{\lambda^{-1}(w)}\right)^k$$

нет особых точек в области D. К тому же

$$f_z(w) = O\left(\left(\frac{z}{\lambda^{-1}(w)}\right)^{p+1}\right), \quad w \in D,\ z \notin \Omega.$$

Из этой оценки, определения p и возрастания $\lambda^{-1}(t)$ следует, что $\int_\sigma^\infty f_z(t)\,dt < \infty$. Таким образом, $f_z(w)$ удовлетворяет всем условиям леммы С. Согласно этой лемме

$$\ln F_\Lambda(z) = \sum_{n=1}^\infty \left(\ln\left(1 - \frac{z}{\lambda_n}\right) + \sum_{k=1}^p \frac{1}{k}\left(\frac{z}{\lambda_n}\right)^k\right) \doteq [\sigma]\ln(-z) + Q_p^1(z) + \sum_{n>\sigma} f_z(n)$$

$$\doteq [\sigma]\ln(-z) + Q_p^1(z) + \sum_{n=1}^5 I_n(z), \quad z \notin \Omega,\ |z| > \lambda^{-1}(\sigma), \tag{10}$$

$$I_1(z) = \int_\sigma^\infty \left(\ln\left(1 - \frac{z}{\lambda^{-1}(t)}\right) + \sum_{k=1}^p \frac{1}{k}\left(\frac{z}{\lambda^{-1}(t)}\right)^k\right) dt, \tag{11}$$

$$I_2(z) = \int\limits_{L_{\sigma,\eta}} \ln\left(1 - \frac{z}{\lambda^{-1}(w)}\right) \frac{dw}{e^{-2\pi i w} - 1},$$

$$I_3(z) = \sum_{k=1}^{p} \frac{z^k}{k} \int\limits_{L_{\sigma,\eta}} \frac{1}{(\lambda^{-1}(w))^k} \frac{dw}{e^{-2\pi i w} - 1} = Q_p^2(z),$$

$$I_4(z) = \int\limits_{L_{\sigma,-\eta}} \ln\left(1 - \frac{z}{\lambda^{-1}(w)}\right) \frac{dw}{e^{2\pi i w} - 1},$$

$$I_5(z) = \sum_{k=1}^{p} \frac{z^k}{k} \int\limits_{L_{\sigma,-\eta}} \frac{1}{(\lambda^{-1}(w))^k} \frac{dw}{e^{2\pi i w} - 1} = Q_p^3(z)$$

(здесь и далее через $Q_p^i(z)$ обозначается многочлен степени p, а через i — его порядковый номер).

Оценим $I_2(z)$. Из леммы A следует, что $l(z) \sim l(r)$ равномерно в Ω, т. е. $\operatorname{Im} l(z) = o(|l(z)|)$, поэтому $\arg w = \rho\eta + o(1)$ на кривой $L_{\sigma,\eta}$. Пользуясь этим, запишем

$$I_2(z) = \int\limits_{L_{\sigma,\eta}} \left(\ln(-z) - \ln(\lambda^{-1}(w)) + \ln\left(1 - \frac{\lambda^{-1}(w)}{z}\right)\right) \frac{dw}{e^{-2\pi i w} - 1}$$

$$\doteq \ln(-z) \int\limits_{L_{\sigma,\eta}} \frac{dw}{e^{-2\pi i w} - 1} = \ln(-z) \int\limits_{\substack{\operatorname{Im} w > 0,\\ \operatorname{Re} w = \sigma}} \frac{dw}{e^{-2\pi i w} - 1} = \frac{i}{2\pi} \ln(1 - e^{2\pi i \sigma}) \ln(-z). \tag{12}$$

Аналогично оценивается $I_4(z)$. Имеем $I_2(z) + I_4(z) \doteq (\{\sigma\} - 1/2)\ln(-z)$. Подставляя эту формулу в (10), обозначая $Q_p(z) = \sum\limits_{i=1}^{3} Q_p^i(z)$ и учитывая замечание из п. 1, получаем оценку из формулировки леммы.

3. $(z \in \Omega)$ Пусть $\operatorname{Im} z > 0$, подберем η_1 так, чтобы точка z лежала на кривой L_{η_1}, $0 < \eta_1 < \alpha$. Выберем $0 < \eta < \eta_1 < \alpha$. Тогда функция

$$g_z(w) = \frac{1}{z - \lambda^{-1}(w)} + \sum_{k=1}^{p} \frac{z^{k-1}}{(\lambda^{-1}(w))^k}$$

не имеет особых точек в области D, ограниченной кривыми $L_{\sigma,\eta}$ и $L_{\sigma,-\eta}$. К тому же

$$g_z(w) = O\left(\frac{z^p}{(\lambda^{-1}(w))^{p+1}}\right), \quad w \in D,\ z \in \Omega.$$

Из этой оценки, определения p и возрастания $\lambda^{-1}(t)$ следует, что $\int\limits_{\sigma}^{\infty} g_z(t)\,dt < \infty$.

Таким образом, $g_z(w)$ удовлетворяет всем условиям леммы C. По этой лемме

$$\frac{F'_\Lambda(z)}{F_\Lambda(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} g_z(n) = Q^4_{p-1}(z) + \int_{\sigma}^{\infty} \left(\frac{1}{z-\lambda^{-1}(t)} + \sum_{k=1}^{p} \frac{z^{k-1}}{(\lambda^{-1}(t))^k} \right) dt$$
$$+ \int_{L_{\sigma,\eta}} \frac{1}{z-\lambda^{-1}(w)} \frac{dw}{e^{-2\pi i w}-1} + \int_{L_{\sigma,-\eta}} \frac{1}{z-\lambda^{-1}(w)} \frac{dw}{e^{2\pi i w}-1}$$
$$+ \sum_{k=1}^{p} z^{k-1} \int_{L_{\sigma,\eta}} \frac{1}{(\lambda^{-1}(w))^k} \frac{dw}{e^{-2\pi i w}-1}$$
$$+ \sum_{k=1}^{p} z^{k-1} \int_{L_{\sigma,-\eta}} \frac{1}{(\lambda^{-1}(w))^k} \frac{dw}{e^{2\pi i w}-1}, \quad |z| > \lambda^{-1}(\sigma).$$

Между кривыми $L_{\sigma,\eta}$ и $L_{\sigma,\alpha}$ в точке $w = \lambda(z)$ находится полюс функции $(z-\lambda^{-1}(w))^{-1}$, вычет в нем равен $-\lambda'(z)$. Поэтому по теореме Коши о вычетах

$$\frac{F'_\Lambda(z)}{F_\Lambda(z)} = Q^4_{p-1}(z) + \frac{2\pi i \lambda'(z)}{1-e^{-2\pi i \lambda(z)}} + \int_{\sigma}^{\infty} \left(\frac{1}{z-\lambda^{-1}(t)} + \sum_{k=1}^{p} \frac{z^{k-1}}{(\lambda^{-1}(t))^k} \right) dt$$
$$+ \int_{L_{\sigma,\alpha}} \frac{1}{z-\lambda^{-1}(w)} \frac{dw}{e^{-2\pi i w}-1} + \int_{L_{\sigma,-\alpha}} \frac{1}{z-\lambda^{-1}(w)} \frac{dw}{e^{2\pi i w}-1}$$
$$+ \sum_{k=1}^{p} z^{k-1} \int_{L_{\sigma,\alpha}} \frac{1}{(\lambda^{-1}(w))^k} \frac{dw}{e^{-2\pi i w}-1}$$
$$+ \sum_{k=1}^{p} z^{k-1} \int_{L_{\sigma,-\alpha}} \frac{1}{(\lambda^{-1}(w))^k} \frac{dw}{e^{2\pi i w}-1}, \quad |z| > \lambda^{-1}(\sigma).$$

Теперь, как видим, выражение для $F_\Lambda(z)$ от η не зависит. Интегрируя последнее равенство по z, получаем (с точностью до слагаемого $G_\Lambda(z)$) формулу (10). Случай $\operatorname{Im} z < 0$ рассматривается аналогично, а оценка в случае $\operatorname{Im} z = 0$ получается из соображений непрерывности. Лемма доказана. □

Лемма 2. *Для интеграла* (11) *из предыдущей леммы в области* $|z| > \lambda^{-1}(\sigma)$ *верна оценка*

$$I_1(-z) \doteq -\sigma \ln z + Q_p(z)$$
$$+ r^\rho \cdot \begin{cases} \sum\limits_{n=0}^{N} a_n(\varphi) L_n(r) + o(L_N(r)), & p < \rho < p+1; \\ b_{-1}(\varphi)\tilde{l}(r) + \sum\limits_{n=0}^{N} b_n(\varphi) L_n(r) + o(L_N(r)), & \rho = p, p+1, \end{cases}$$

где

$$a_n(\varphi) = (-e^{i\varphi})^p \frac{e^{i\varphi}}{n!} \int_0^\infty \ln^n(u) \frac{u^{\rho-p-1}}{u+e^{i\varphi}}\, du, \quad n = 0, \dots, N,$$

$$b_{-1}(\varphi) = (-e^{i\varphi})^\rho, \quad b_n(\varphi) = \frac{(-e^{i\varphi})^\rho}{n!} \left(\int_1^\infty \ln^n(t) \frac{e^{i\varphi}\, dt}{t(t+e^{i\varphi\rho})} - \int_0^1 \ln^n(t) \frac{dt}{t+e^{i\varphi}} \right),$$

$n = 0, \dots, N$.

Замечание. $a_0 = \frac{\pi}{\sin\pi\rho}\, e^{i\varphi\rho}$, $a_1 = \frac{\pi}{\sin\pi\rho} e^{i\varphi\rho}\big(i(\varphi+\pi) - e^{i\pi\rho}\frac{\pi}{\sin\pi\rho}\big)$, $b_0 = i\varphi(-e^{i\varphi})^\rho$.

Доказательство. 1. Будем искать оценку для $I_1(-z)$ в области $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$. Оценка на $\mathbb{R}_-$ получается из соображений непрерывности. Очевидно, что $I_1(-z) \doteq 0$ при $|z| < 2\lambda^{-1}(\sigma)$, т. е. оценка из формулировки леммы верна. Поэтому далее в доказательстве можно считать, что $|z| > 2\lambda^{-1}(\sigma)$.

2. Сделаем в $I_1(-z)$ замену переменной $u = \lambda^{-1}(t)$. Поскольку $|z| > 2\lambda^{-1}(\sigma)$, можно проинтегрировать $I_1(-z)$ по частям. Получим

$$I_1(-z) = \left(\ln\left(1+\frac{z}{u}\right) + \sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k}\left(\frac{-z}{u}\right)^k\right)\lambda(u)\Bigg|_{\lambda^{-1}(\sigma)}^{\infty} - \int\limits_{\lambda^{-1}(\sigma)}^{\infty}\frac{(-z)^{p+1}}{u^{p+1}(u+z)}\lambda(u)\,du \doteq -\sigma\ln z + Q_p^1(z) + J(z), \tag{13}$$

где

$$J(z) = -\int\limits_{\lambda^{-1}(\sigma)}^{\infty}\frac{(-z)^{p+1}}{t^{p+1}(t+z)}\lambda(t)\,dt.$$

Оценка для $J(z)$ зависит от того, целое ли ρ.

3a. В случае $p < \rho < p+1$ можно представить ρ в виде $\rho = p+\beta$, $0 < \beta < 1$. Тогда

$$J(z) = -\int\limits_{\lambda^{-1}(\sigma)}^{\infty}\frac{(-z)^{p+1}\lambda(t)}{t^{p+1}(t+z)}\,dt \overset{t/|z|=u}{=} |z|^\rho(-1)^p e^{i(p+1)\varphi}\int\limits_{\lambda^{-1}(\sigma)/|z|}^{\infty}\frac{u^{\beta-1}}{u+e^{i\varphi}}\,l(|z|u)\,du. \tag{14}$$

Обозначим

$$\Phi_\varphi^0(t) = \int\limits_0^t\frac{u^{\beta-1}}{u+e^{i\varphi}}\,du, \quad \Psi_\varphi^0(t) = -\int\limits_t^\infty\frac{u^{\beta-1}}{u+e^{i\varphi}}\,du.$$

Обе эти функции являются первообразными для $u^{\beta-1}/(u+e^{i\varphi})$, причем $\Phi_\varphi^0(t) \sim t^\beta$, $t\to 0$, и $\Psi_\varphi^0(t) \sim t^{\beta-1}, t\to\infty$, равномерно по φ. Поэтому имеет место следующее равенство:

$$\frac{J(z)}{(-1)^p e^{i(p+1)\varphi}|z|^\rho} = \int\limits_{\lambda^{-1}(\sigma)/|z|}^{1} l(|z|u)\,d\Phi_\varphi^0(u) + \int\limits_1^\infty l(|z|u)\,d\Psi_\varphi^0(u)$$
$$= l(|z|u)\Phi_\varphi^0(u)\big|_{\lambda^{-1}(\sigma)/|z|}^{1} - \int\limits_{\lambda^{-1}(\sigma)/|z|}^{1}\frac{L_1(|z|u)}{u}\Phi_\varphi^0(u)\,du$$
$$+ l(|z|u)\Psi_\varphi^0(u)\big|_1^\infty - \int\limits_1^\infty\frac{L_1(|z|u)}{u}\Psi_\varphi^0(u)\,du.$$

Оценим внеинтегральный член:

$$|z|^\rho(-1)^p e^{i(p+1)\varphi}\big(l(|z|u)\Phi_\varphi^0(u)\big|_{\lambda^{-1}(\sigma)/|z|}^{1} + l(|z|u)\Psi_\varphi^0(u)\big|_1^\infty\big)$$

$$= -|z|^\rho l(\lambda^{-1}(\sigma))(-1)^p e^{i(p+1)\varphi}$$

$$\times \int\limits_0^{\lambda^{-1}(\sigma)/|z|} \frac{u^{\beta-1}}{u+e^{i\varphi}}\,du + |z|^\rho l(|z|)(-1)^p e^{i(p+1)\varphi}\big(\Phi_\varphi^0(1)-\Psi_\varphi^0(1)\big)$$

$$= -l(\lambda^{-1}(\sigma))z^{p+1} \int\limits_0^{\lambda^{-1}(\sigma)} \frac{t^{\beta-1}}{t+z}\,dt + |z|^\rho l(|z|)(-1)^p e^{i(p+1)\varphi}\big(\Phi_\varphi^0(1)-\Psi_\varphi^0(1)\big)$$

$$\doteq Q_p^2(z) + |z|^\rho l(|z|)(-1)^p e^{i(p+1)\varphi}\big(\Phi_\varphi^0(1)-\Psi_\varphi^0(1)\big).$$

Обозначим

$$a_0(\varphi) = (-1)^p e^{i(p+1)\varphi}\big(\Phi_\varphi^0(1)-\Psi_\varphi^0(1)\big) = (-1)^p e^{i(p+1)\varphi}\int\limits_0^\infty \frac{u^{\beta-1}}{u+e^{i\varphi}}\,du,$$

$$\Phi_\varphi^1(t) = \int\limits_0^t \frac{\Phi_\varphi^0(u)}{u}\,du, \quad \Psi_\varphi^1(t) = -\int\limits_t^\infty \frac{\Psi_\varphi^0(u)}{u}\,du.$$

Повторяя интегрирование по частям, на n-м шаге получим

$$a_n(\varphi) = (-1)^p e^{i(p+1)\varphi}(-1)^n\big(\Phi_\varphi^n(1)-\Psi_\varphi^n(1)\big) = (-1)^p \frac{e^{i(p+1)\varphi}}{n!}\int\limits_0^\infty \ln^n(u)\frac{u^{\beta-1}}{u+e^{i\varphi}}\,du,$$

$$\Phi_\varphi^n(t) = \int\limits_0^t \frac{\Phi_\varphi^{n-1}(u)}{u}\,du, \quad \Psi_\varphi^n(t) = -\int\limits_t^\infty \frac{\Psi_\varphi^{n-1}(u)}{u}\,du.$$

В этих обозначениях

$$J(z) \doteq Q_p^3(z) + |z|^\rho \sum_{n=0}^{N-1} a_n(\varphi)L_n(|z|)$$

$$+ (-1)^{N+p}e^{i(p+1)\varphi}|z|^\rho \int\limits_{\lambda^{-1}(\sigma)/|z|}^1 \frac{L_N(|z|u)}{u}\Phi_\varphi^{N-1}(u)\,du$$

$$+ (-1)^{N+p}e^{i(p+1)\varphi}|z|^\rho \int\limits_1^\infty \frac{L_N(|z|u)}{u}\Psi_\varphi^{N-1}(u)\,du$$

$$\doteq Q_p^3(z) + |z|^\rho \sum_{n=0}^{N} a_n(\varphi)L_n(|z|) + o(|z|^\rho L_N(|z|)). \tag{15}$$

В последнем равенстве мы воспользовались тем, что $L_N(t)$ есть линейная комбинация аналитических медленно меняющихся функций, и применили замечание А. Равномерность по φ обеспечивается равномерной ограниченностью интегралов

$$\int\limits_0^1 \frac{\Phi_\varphi^{N-1}(u)}{u}\,du, \quad \int\limits_1^\infty \frac{\Psi_\varphi^{N-1}(u)}{u}\,du.$$

Равенство (15) вместе с (13) и (14), если обозначить $Q_p(z) = Q_p^1(z) + Q_p^3(z)$, дает оценку из формулировки леммы.

3b. Если $\rho = p$, то $J(z)$ можно представить в виде

$$J(z) = (-z)^\rho \int\limits_{\lambda^{-1}(\sigma)/|z|}^{\infty} \frac{e^{i\varphi}}{t(t+e^{i\varphi})} l(t|z|)\,dt = (-z)^\rho \left(\int\limits_{\lambda^{-1}(\sigma)/|z|}^{1} + \int\limits_{1}^{\infty} \right)$$

$$= (-z)^\rho \left(\int\limits_{\lambda^{-1}(\sigma)/|z|}^{1} \frac{l(t|z|)}{t}\,dt - \int\limits_{\lambda^{-1}(\sigma)/|z|}^{1} \frac{l(t|z|)}{t+e^{i\varphi}}\,dt + \int\limits_{1}^{\infty} \frac{e^{i\varphi}}{t(t+e^{i\varphi})}\, l(t|z|)\,dt \right). \tag{16}$$

Обозначим полученные интегралы через $K_i(z)$, $k = 1, 2, 3$:

$$K_1(z) = (-z)^\rho \int\limits_{\lambda^{-1}(\sigma)/|z|}^{1} \frac{l(t|z|)}{t}\,dt = |z|^\rho (-e^{i\varphi})^\rho \tilde{l}(|z|) + Q_p^2(z), \tag{17}$$

$$K_2(z) + K_3(z) = -(-z)^\rho \left(\int\limits_{\lambda^{-1}(\sigma)/|z|}^{1} \frac{l(t|z|)}{t+e^{i\varphi}}\,dt - \int\limits_{1}^{\infty} \frac{e^{i\varphi}}{t(t+e^{i\varphi})} l(t|z|)\,dt \right). \tag{18}$$

Теперь аналогично п. 3a обозначим

$$\Phi_\varphi^0(t) = \ln\left(1 + \frac{t}{e^{i\varphi}}\right), \quad \Psi_\varphi^0(t) = \ln\left(1 + \frac{e^{i\varphi}}{t}\right),$$

$$\Phi_\varphi^n(t) = \int\limits_0^t \frac{\Phi_\varphi^{n-1}(u)}{u}\,du, \quad \Psi_\varphi^n(t) = -\int\limits_t^\infty \frac{\Psi_\varphi^{n-1}(u)}{u}\,du,$$

$$b_n(\varphi) = (-1)^{n+1}(-e^{i\varphi})^\rho \big(\Phi_\varphi^n(1) - \Psi_\varphi^n(1)\big)$$
$$= -\frac{(-e^{i\varphi})^\rho}{n!} \left(\int\limits_0^1 \ln^n(t) \frac{dt}{t+e^{i\varphi}} - \int\limits_1^\infty \ln^n(t) \frac{e^{i\varphi}dt}{t(t+e^{i\varphi\rho})} \right).$$

В этих обозначениях

$$K_2(z) + K_3(z) = -(-z)^\rho \left(\int\limits_{\lambda^{-1}(\sigma)/|z|}^{1} l(t|z|)\,d\Phi_\varphi^0(t) + \int\limits_1^\infty l(t|z|)\,d\Psi_\varphi^0(t) \right)$$

$$\doteq Q_p^3(z) + |z|^\rho \sum_{n=0}^{N-1} b_n(\varphi) L_n(|z|)$$

$$+ (-1)^{N+1}(-z)^\rho \left(\int\limits_{\lambda^{-1}(\sigma)/|z|}^{1} \frac{L_N(t|z|)}{t} \Phi_\varphi^{N-1}(t)\,dt + \int\limits_1^\infty \frac{L_N(t|z|)}{t} \Psi_\varphi^{N-1}(t)\,dt \right)$$

$$\doteq Q_p^3(z) + |z|^\rho \sum_{n=0}^{N} b_n(\varphi) L_n(|z|) + o(|z|^\rho L_N(|z|)).$$

Соединяя последние соотношения с (13), (16)–(18) и обозначая $Q_p(z)=\sum\limits_{i=1}^{3}Q_p^i(z)$, получаем оценку из формулировки леммы.

3c. Если $\rho=p+1$, то $J(z)$ представляется в виде

$$J(z)=-(-z)^\rho\int\limits_{\lambda^{-1}(\sigma)}^{\infty}\frac{l(t)}{t+z}\,dt=(-z)^\rho\int\limits_{\lambda^{-1}(\sigma)}^{\infty}\frac{z\,l(t)}{t(t+z)}\,dt-(-z)^\rho\int\limits_{\lambda^{-1}(\sigma)}^{\infty}\frac{l(t)}{t}\,dt. \quad (19)$$

Первое слагаемое — это в точности $J(z)$ из п. 3b. Подставляя найденное в 3b значение $J(z)$ в (19), приходим к оценке из формулировки леммы. $\square$

Последовательно применяя леммы 1 и 2, убеждаемся в справедливости теоремы.

Теорема согласуется с результатами, приведенными во введении. Действительно, положим $N=0$ и подставим в (9) значения a_0 и b_0 из замечания к лемме 2. Учитывая, что $L_0(t)=l(t)$ и $l(t)=o(\tilde{l}(t))$ (см., например, [7, с. 52]), получим

$$\ln F_\Lambda(z)=-\frac{1}{2}\ln z+Q_p(z)+G_\Lambda(z)+\begin{cases}\frac{\pi}{\sin\pi\rho}\,z^\rho l(r)(1+o(1)), & p<\rho<p+1,\\ (-z)^\rho\tilde{l}(r)(1+o(1)), & \rho=p,p+1,\end{cases}$$

Замечание. Как видно из доказательства теоремы, выражение $o(L_N(t))$ следует понимать как тождественный нуль в случае, если $L_N(t)\equiv 0$.

Пример. Если $l(t)=\alpha\ln^{N-1}(t)$, $\alpha\in\mathbb{R}$, $N\in\mathbb{N}$, то

$$L_n(t)=\alpha(N-1)!/(N-n-1)!\ln^{N-n-1}(t),\ n=0,\dots,N-1,\quad L_N(t)\equiv 0,$$

поэтому остаточный член $o(L_N(t))$ равен нулю и мы получаем для $\ln F_\Lambda(z)$ оценку с точностью до $O(1)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Valiron G.* Sur les fonctions entières d'ordre fini, et d'ordre nul, et particulier les fonctions a correspondance régulière // Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse. 1913. V. 5. P. 117–257.
2. *Titchmarsh E. C.* On integral functions with real negative zeroes // Proc. London Math. Soc. 1927. V. 26. P. 185–200.
3. *Левин Б. Я.* О росте целой функции по лучу и о распределении ее нулей по аргументам // Мат. сб. 1937. Т. 44, № 6. С. 1097–1142.
4. *Pfluger A.* Die Wertverteilung und das Verhalten von Betrag und Argument einer speziellen Klasse analytischer Functionen. I, II // Comm. Math. Helv. 1938. V. 11. P. 180–213; 1939. V. 12. P. 25–69.
5. *Bowen N. A.* On the zeros of canonical products of integral order // Proc. London Math. Soc. 1962. V. 12. P. 297–314.
6. *Евграфов М. А.* Асимптотические оценки и целые функции. М.: Наука, 1978.
7. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. М.: Наука, 1985.

Статья поступила 14 мая 2009 г.

Юхименко Александр Анатольевич
Московский гос. университет, механико-математический факультет,
Воробьевы горы, Москва 119992
yukhimenko@gmail.com