Сибирский математический журнал
Июль—август, 2010. Том 51, № 4

УДК 512.552.4

ОБ УНИТАРНОЙ ЗАМКНУТОСТИ ПЕРВИЧНЫХ МНОГООБРАЗИЙ АССОЦИАТИВНЫХ АЛГЕБР

Л. М. Самойлов

Аннотация. Доказывается, что каждое первичное многообразие ассоциативных алгебр над бесконечным полем характеристики $p > 0$ порождается или алгеброй с единицей, или нильалгеброй ограниченного индекса. Для энгелевых вербально первичных T-идеалов показано, что они остаются вербально первичными при добавлении тождества $x^{p^N} = 0$ для достаточно больших N. В качестве следствия описаны все первичные многообразия в одном интересном классе многообразий ассоциативных алгебр.

Ключевые слова: полиномиальное тождество, первичное многообразие, тождество энгелевости.

В работе рассматриваются ассоциативные алгебры над бесконечным полем F положительной характеристики p. Через $F\langle X\rangle$ и $F^\sharp\langle X\rangle$ будем обозначать свободную ассоциативную алгебру счетного ранга без единицы и с единицей соответственно. Напомним, что T-идеал Γ алгебры $F\langle X\rangle$ или $F^\sharp\langle X\rangle$ называется *вербально первичным*, если для произвольных T-идеалов Γ_1, Γ_2 из включения $\Gamma_1\Gamma_2 \subseteq \Gamma$ следует, что $\Gamma_1 \subseteq \Gamma$ или $\Gamma_2 \subseteq \Gamma$. При этом удобно считать, что идеалы (0) и $F\langle X\rangle$ $(F^\sharp\langle X\rangle)$ вербально первичными не являются. Многообразие называется *первичным*, если соответствующий ему идеал тождеств является вербально первичным.

В [1, 2] разными способами доказано, что каждый вербально первичный T-идеал Γ *унитарно замкнут на полилинейном уровне*. Это означает, что если $f(x_1, \dots, x_m) \in \Gamma$ и полином $f(x_1, \dots, x_m)$ полилинеен, то $f(x_1, \dots, x_m)|_{x_i=1} \in \Gamma$.

На полиоднородном уровне вербально первичные T-идеалы не обязаны быть унитарно замкнутыми, в качестве примера можно рассмотреть вербально первичный T-идеал $\{[x, y] = 0, x^p = 0\}^T$. Тем не менее приведенная ниже теорема 1 показывает, что для вербально первичных T-идеалов Γ, не содержащих полиномов x^n, унитарная замкнутость на полиоднородном уровне выполняется.

Теорема 1. *Пусть Γ — вербально первичный T-идеал. Тогда либо Γ является унитарно замкнутым T-идеалом, либо $x^n \in \Gamma$ для некоторого n.*

Таким образом, каждое первичное многообразие ассоциативных алгебр порождается или алгеброй с единицей, или нильалгеброй ограниченного индекса. Ясно, что эти случаи взаимно исключают друг друга.

В работе [3] показано, что каждое унитарно замкнутое первичное многообразие порождается алгебраической алгеброй ограниченного индекса алгебраичности над основным полем F. Если T-идеал содержит тождество $x^n = 0$, то

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 07–01–00080).

относительно свободная алгебра $F\langle X\rangle/\Gamma$ является, очевидно, алгебраической алгеброй ограниченного индекса алгебраичности и порождает многообразие с идеалом тождеств Γ. Таким образом, имеет место следующее утверждение.

Следствие 1. *Каждое первичное многообразие порождается алгебраической алгеброй ограниченного индекса алгебраичности над основным полем F.*

Теорема 1 будет использоваться в доказательстве следующей теоремы.

Теорема 2. *Пусть Γ — вербально первичный T-идеал, содержащий тождество энгелевости. Тогда для всех достаточно больших N (зависящих от Γ) T-идеал $\{\Gamma, x^{p^N}\}^T$ будет вербально первичным.*

Теоремы 1 и 2 применим для описания (на полиоднородном уровне) одного хорошо известного и интересного класса первичных многообразий. Рассмотрим при $p \geq 5$ в свободной ассоциативной алгебре со следом счетного ранга $\widetilde{F}\langle X\rangle$ $\widetilde{T}$-идеал $\widetilde{U}$, порожденный полиномами со следом

$$\mathrm{Tr}(1)-2, \quad \chi_2(x,y), \quad \rho_{p-2}(x_1,\dots,x_{p-2}).$$

Здесь $\chi_2(x,y) = xy + yx - x\,\mathrm{Tr}(y) - y\,\mathrm{Tr}(x) - \mathrm{Tr}(xy) + \mathrm{Tr}(x)\,\mathrm{Tr}(y)$ — полином Кэли — Гамильтона, $\rho_{p-2}(x_1,\dots,x_{p-2})$ — симметрический полином Кэли — Гамильтона, равный сумме всех полилинейных мономов со следом от переменных $x_1,\dots,x_{p-2}$. Обозначим через U T-идеал алгебры $F\langle X\rangle$, порожденный всеми обычными полилинейными полиномами из $\widetilde{U}$: $U = \{\widetilde{U} \cap P\}^T$, где P — множество всех полилинейных полиномов из $F\langle X\rangle$. Ограничение $p \geq 5$ нужно для исключения тривиальных случаев $p = 2$ и $p = 3$, в которых рассматриваемое многообразие интереса не представляет.

T-идеал U впервые был построен Ю. П. Размысловым в [4] совершенно другим способом. В [4] показано (для использованного в [4] определения U), что при $p \geq 5$ относительно свободная алгебра $F\langle X\rangle/U$ является $(p-1)$-энгелевой, но не лиево нильпотентной. Кроме того, построенный в [4] T-идеал является вербально первичным на полилинейном уровне. То, что построенный Ю. П. Размысловым в [4] T-идеал совпадает с U, следует, например, из полной классификации полилинейных компонент первичных подмногообразий многообразия, порожденного алгеброй матриц второго порядка. Эта классификация получена А. Р. Кемером в работе [5].

В работе А. Р. Кемера [6] рассмотрен $\widetilde{T}$-идеал $\widetilde{U}'$, порождаемый всеми тождествами со следом алгебры матриц второго порядка, а также полиномами $\left(x - \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}(x)\right)^{p-2}$ и x^p. Из результатов [5, 6] снова вытекает, что T-идеал $\{\widetilde{U}' \cap P\}^T$ совпадает с U. Таким образом, T-идеал U может быть построен тремя разными способами. Четвертая характеризация T-идеала U состоит в том, что он порождается полилинейными тождествами единственного минимального 2-классического многообразия алгебр со следом (см. подробности в [7]). При любом способе определения можно доказать, что T-идеал U является вербально первичным на полилинейном уровне.

Следующая теорема описывает все вербально первичные T-идеалы, полилинейная компонента которых совпадает с $U \cap P$.

Теорема 3. *Пусть $p \geq 5$.*

1. *Если Γ — вербально первичный T-идеал и $\Gamma \cap P = U \cap P$, то или $\Gamma = U$, или $\Gamma = \{U, x^{p^N}\}^T$ для некоторого натурального N.*

2. *T-идеалы U и $\{U, x^{p^N}\}^T$, $N \geq 1$, попарно различны и являются вербально первичными.*

1. Унитарная замкнутость T-первичных идеалов

Зафиксируем вербально первичный T-идеал Г. Рассмотрим два полинома

$$\tilde{g}_{l,t}(x_1,\dots,x_t;y_1,\dots,y_l) = \sum_{\sigma_1,\dots,\sigma_t\in S_{l+1}} (-1)^{\sigma_1}\dots(-1)^{\sigma_t} x_1^{\sigma_1(1)-1}\dots x_t^{\sigma_t(1)-1} y_1 \times x_1^{\sigma_1(2)-1}\dots x_t^{\sigma_t(2)-1} y_2 \dots y_l x_1^{\sigma_1(l+1)-1}\dots x_t^{\sigma_t(l+1)-1}$$

(полином $\tilde{g}_{0,t}(x_1,\dots,x_t)$ считаем равным $x_1\dots x_t$) и

$$g_{l,t}(x;y_1,\dots,y_l) = \tilde{g}_{l,t}(x,\dots,x;y_1,\dots,y_l) = \sum_{\sigma_1,\dots,\sigma_t\in S_{l+1}} (-1)^{\sigma_1}\dots(-1)^{\sigma_t} x^{\sigma_1(1)+\dots+\sigma_t(1)-t} y_1 x^{\sigma_1(2)+\dots+\sigma_t(2)-t} y_2 \times \dots \times y_l x^{\sigma_1(l+1)+\dots+\sigma_t(l+1)-t} \quad (1)$$

(при $l = 0$ полагаем $g_{0,t}(x) = x^t$). Эти полиномы введены А. Р. Кемером в [8].

В работе [3] полиномы $\tilde{g}_{l,t}$ и $g_{l,t}$ определялись немного иначе. Однако точно так же доказывается, что произвольный ненулевой T-идеал содержит полином $g_{l,t}$ для некоторых l и t.

Зафиксируем минимальное число $l \geq 0$, для которого $g_{l,t} \in \Gamma$ для некоторого $t = t(l)$. Несложно видеть, что из тождества $g_{l,t} = 0$ следуют все тождества $g_{l',t'} = 0$ для $l' \geq l, t' \geq t$. Поэтому T-идеал Г содержит все полиномы $g_{l,t'}$ при $t' \geq t$.

По теореме Кемера о локальной представимости (см. [9]) для каждого натурального k существует такая конечномерная классическая алгебра C_k, что $T[F\langle x_1,\dots,x_k\rangle/(\Gamma\cap F\langle x_1,\dots,x_k\rangle)] = T[C_k]$. Напомним, что конечномерная алгебра C над полем F называется *конечномерной классической алгеброй*, если C представима в виде прямой суммы подпространств $C = P\oplus J$, где $J = \operatorname{Rad} C$ — радикал Джекобсона алгебры C, P является подалгеброй в C и $P \cong C/J$ (разложение Веддербарна — Мальцева); кроме того, алгебра P должна быть изоморфна прямой сумме матричных алгебр над полем F. Алгебра P называется *полупростой частью* алгебры C.

Рассмотрим произвольную конечномерную классическую алгебру C. Полупростая часть $P(C)$ алгебры C представима в виде $P(C) = M_{n_1}\oplus\dots\oplus M_{n_r}$, $r \geq 0$, где M_{n_i} — полная матричная алгебра порядка n_i. Пусть $e^{(i)}$ — единица алгебры M_{n_i}, $i = 1,\dots,r$. Положим $e^{(0)} = 1 - (e^{(1)}+\dots+e^{(r)})$, где 1 — формальная единица. Если C — алгебра с единицей, то $e^{(0)} = 0 \in C$. Если же C — алгебра без единицы, то $e^{(0)} \notin C$. Тем не менее для каждого $a \in C$ определены элементы $ae^{(0)}, e^{(0)}a, e^{(0)}ae^{(0)} \in C$. Следуя [9], *каркасом* алгебры C будем называть объединение множеств $e^{(i)}Ce^{(j)}$, $0 \leq i,j \leq r$; каркас алгебры C будем обозначать через $\operatorname{Car} C$. Любой элемент алгебры C является суммой элементов из каркаса.

Отметим, что элементы множеств $e^{(i)}Ce^{(j)}$ при $i = 0$ или $j = 0$ лежат в радикале алгебры C. Обозначим

$$C^+ = \sum_{i\neq 0, j\neq 0} e^{(i)}Ce^{(j)}.$$

Алгебра C^+ имеет единицу и является подалгеброй алгебры C. В частности, $T[C] \subseteq T[C^+]$.

Через $E(C)$ будем обозначать множество идемпотентов $\{e^{(0)}, e^{(1)}, \dots, e^{(r)}\}$. Каждый идемпотент $e^{(i)}$, $i = 1, \dots, r$, является суммой матричных единичек $e^{(i)}_{1,1}, \dots, e^{(i)}_{n_i,n_i}$. Через $\overline{E}(C_k)$ обозначим множество, состоящее из $e^{(0)}$ и всех матричных единичек $e^{(i)}_{j,j}$, $i = 1, \dots, r$, $j = 1, \dots, n_i$.

Лемма 1. *Пусть $l > 0$, $\{e_1, \dots, e_{l+1}\}$ — упорядоченное множество попарно различных идемпотентов из $\overline{E}(C_k)$. Тогда для произвольных $c_1, \dots, c_l \in C_k$ в алгебре C_k выполняется равенство*

$$e_1 c_1 e_2 c_2 \dots c_l e_{l+1} = 0.$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда все идемпотенты $e_1, \dots, e_{l+1}$ отличны от $e^{(0)}$. Подставим в тождество (1) $y_i = e_i c_i e_{i+1}$, $i = 1, \dots, l$, $x = \sum\limits_{i=1}^{l+1} \lambda_i e_i$, $\lambda_1, \dots, \lambda_{l+1} \in F$. В результате такой подстановки получим равенство

$$f(\lambda_1, \dots, \lambda_{l+1}) e_1 c_1 e_2 c_2 \dots c_l e_{l+1} = 0, \tag{2}$$

где

$$f(t_1, \dots, t_{l+1}) = \sum_{\sigma_1, \dots, \sigma_t \in S_{l+1}} (-1)^{\sigma_1} \dots (-1)^{\sigma_t} t_1^{\sigma_1(1) + \dots + \sigma_t(1) - t} \dots t_{l+1}^{\sigma_1(l+1) + \dots + \sigma_t(l+1) - t}$$

— многочлен от коммутирующих переменных $t_1, \dots, t_{l+1}$, очевидно, отличный от нуля. Так как поле F бесконечно, найдутся такие $\lambda_1, \dots, \lambda_{l+1} \in F$, что $f(\lambda_1, \dots, \lambda_{l+1}) \neq 0$. Поэтому из (2) следует, что

$$e_1 c_1 e_2 c_2 \dots c_l e_{l+1} = 0.$$

Пусть теперь некоторый идемпотент e_j совпадает с $e^{(0)}$. Подставим в тождество (1) $y_i = e_i c_i e_{i+1}$, $i = 1, \dots, l$, $x = \sum\limits_{i \neq j} \lambda_i e_i$, $\lambda_1, \dots, \lambda_{j-1}, \lambda_{j+1}, \dots, \lambda_{l+1} \in F$. Тогда получится равенство

$$f(\lambda_1, \dots, \lambda_{j-1}, \lambda_{j+1}, \dots, \lambda_{l+1}) e_1 c_1 e_2 c_2 \dots c_l e_{l+1} = 0, \tag{3}$$

где

$$f(t_1, \dots, t_{j-1}, t_{j+1}, \dots, t_{l+1}) = \sum_{\substack{\sigma_1, \dots, \sigma_t \in S_{l+1}, \\ \sigma_1(j) = \dots = \sigma_t(j) = 1}} \prod_{i \neq j} (-1)^{\sigma_i} t_i^{\sigma_1(i) + \dots + \sigma_t(i) - t}$$

— многочлен от коммутирующих переменных. Легко видеть, что этот многочлен не равен нулю. Как и выше, из бесконечности поля F получаем, что $f(\lambda_1, \dots, \lambda_{j-1}, \lambda_{j+1}, \dots, \lambda_{l+1}) \neq 0$ для некоторых $\lambda_1, \dots, \lambda_{j-1}, \lambda_{j+1}, \dots, \lambda_{l+1} \in F$. Тогда из (3) вытекает, что $e_1 c_1 e_2 c_2 \dots c_l e_{l+1} = 0$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть $l > 0$, c — индекс нильпотентности $\operatorname{Rad} C_k$. Тогда для произвольных $c_0, c_1, \dots, c_{l-1}, a, b \in C_k$ в алгебре C_k выполняется равенство*

$$g_{l-1,c}(c_0; c_1, \dots, c_{l-1}) \cdot a e^{(0)} b = 0.$$

Доказательство. Так как

$$\{g_{l-1,c}(c_0; c_1, \dots, c_{l-1}) \mid c_i \in C_k\} \subseteq \{\tilde{g}_{l-1,c}(b_1, \dots, b_c; c_1, \dots, c_{l-1}) \mid b_i, c_i \in C_k\},$$

достаточно показать, что любое значение полинома $\tilde{g}_{l-1,c}$ на алгебре C_k аннулируется умножением справа на $ae^{(0)}b$.

Для каждого $\varnothing \neq J \subseteq E(C_k)$ рассмотрим алгебру $C_J = \sum\limits_{e^{(i)},e^{(j)}\in J} e^{(i)}C_k e^{(j)} \subseteq C_k$. Это конечномерная классическая алгебра, полупростая часть P_J которой совпадает с $\sum\limits_{e^{(0)}\neq e^{(j)}\in J} e^{(j)}Pe^{(j)}$, где P — полупростая часть алгебры C_k. Кроме того, $\operatorname{Rad} C_J \subseteq \operatorname{Rad} C_k$.

Заметим, что если $\dim P_J < l$, то $\tilde{g}_{l-1,c} \in T[C_J]$. Это доказывается точно так же, как лемма 5б) в [3], поэтому доказательство мы опускаем.

Элемент $\tilde{g}_{l-1,c}(b_1,\dots,b_c;c_1,\dots,c_{l-1})$ можно представить в виде линейной комбинации элементов $g_{(\rho)}(a_1,\dots,a_{k_{(\rho)}})$, где $g_{(\rho)}(x_1,\dots,x_{k_{(\rho)}})$ — частичная линеаризация полинома $\tilde{g}_{l-1,c}$, а каждый элемент a_k имеет вид $a_k = e^{(i_k)}_{\alpha_k,\alpha_k}a'_k e^{(j_k)}_{\beta_k,\beta_k}$, где $e^{(i)}_{\alpha,\beta}$ — матричные единички, соответствующие центральному идемпотенту $e^{(i)}$ (считаем $e^{(0)}_{\alpha_k,\alpha_k} = e^{(0)}$, $e^{(0)}_{\beta_k,\beta_k} = e^{(0)}$). Если все элементы a_k лежат в некоторой подалгебре C_J с условием $\dim P_J < l$, то $g_{(\rho)}(a_1,\dots,a_{k_{(\rho)}}) = 0$, так как $g_{(\rho)}(x_1,\dots,x_{k_{(\rho)}}) = 0$ является тождеством алгебры C_J. Иначе заменим каждый элемент $e^{(\nu_i)}_{k_i,k_i} \in \{e^{(i_k)}_{\alpha_k,\alpha_k}, e^{(j_k)}_{\beta_k,\beta_k}\}$, $\nu_i \neq 0$, таким произведением матричных единичек $e^{(\nu_i)}_{\alpha,\beta}$, которое равно $e^{(\nu_i)}_{k_i,k_i}$ и в которое входят все единички вида $e^{(\nu_i)}_{\alpha,\alpha}$. Очевидно, что такое произведение найдется. Тогда с учетом условия $\dim P_J \geq l$, элемент $g_{(\rho)}(a_1,\dots,a_{k_{(\rho)}}) = 0$ будет представим в виде линейной комбинации слагаемых вида $c'_0 e_1 c'_1 e_2 c'_2 \dots c'_{l-1} e_l c'_l$, $c'_i \in C_k \cup \{1\}$, $e_1,\dots,e_l$ — набор попарно различных идемпотентов из $E(C_k)$, не равных $e^{(0)}$.

Таким образом, элемент $\tilde{g}_{l-1,c}(b_1,\dots,b_c;c_1,\dots,c_{l-1})\cdot ae^{(0)}b$ представим в виде линейной комбинации элементов $c'_0 e_1 c'_1 e_2 c'_2 \dots c'_{l-1} e_l c'_l \cdot ae^{(0)}b$, каждый из которых равен нулю по лемме 1. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Определим для вербально первичного T-идеала Γ параметр l. Если $l = 0$, то $x^n \in \Gamma$ для некоторого n, и теорема доказана. Рассмотрим случай $l \geq 1$.

Положим

$$\Gamma^+ = \bigcap_{k=1}^{+\infty} T\bigl[C_k^+\bigr].$$

Ясно, что $\Gamma \subseteq \Gamma^+$ и Γ^+ — унитарно замкнутый T-идеал. Для доказательства теоремы достаточно показать, что $\Gamma = \Gamma^+$.

Пусть $f(x_1,\dots,x_n) \in \Gamma^+$. Тогда $f(x_1,\dots,x_n) \in T\bigl[C^+_{n+l}\bigr]$, поэтому для произвольного t выполнено

$$g_{l-1,t}(x;y_1,\dots,y_{l-1})f(x_1,\dots,x_n) \in T\bigl[C^+_{n+l}\bigr].$$

Покажем, что если t больше индекса нильпотентности $\operatorname{Rad} C_{n+l}$, то

$$g_{l-1,t}(x;y_1,\dots,y_{l-1})f(x_1,\dots,x_n) \in T[C_{n+l}]. \tag{4}$$

Обозначим через $\tilde{f}(x_1,\dots,x_m)$ некоторую частичную линеаризацию полинома $f(x_1,\dots,x_n)$. Для доказательства (4) достаточно показать, что в алгебре C_{n+l}

$$g_{l-1,t}(b_0,b_1,\dots,b_{l-1})\tilde{f}(a_1,\dots,a_m) = 0, \tag{5}$$

где $b_0,b_1,\dots,b_{l-1} \in C_{n+l}$, $a_1,\dots,a_m \in \operatorname{Car} C_{n+l}$. Пусть элемент a_i имеет вид $a_i = e^{(\alpha_i)}a'_i e^{(\beta_i)}$, $i = 1,\dots,m$. Если среди чисел $\alpha_1,\beta_1,\dots,\alpha_m,\beta_m$ нет нуля, то (5) выполнено, так как $f \in T\bigl[C_k^+\bigr]$, следовательно, $\tilde{f} \in T\bigl[C_k^+\bigr]$.

Если же среди чисел $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_m, \beta_m$ есть число, равное 0, (5) выполнено по лемме 2. Тем самым включение (4) доказано.

Так как полином $g_{l-1,t} \cdot f$ зависит от $n + l$ переменных, по определению алгебры C_{n+l} и (4) получаем, что $g_{l-1,t} \cdot f \in \Gamma$. Но $g_{l-1,t} \notin \Gamma$, поэтому $f \in \Gamma$. Теорема 1 доказана.

2. Доказательство теоремы 2

Обозначим через U_N T-идеал, порожденный тождеством $x^N = 0$. В [10] автором была доказана следующая теорема, не имеющая аналога над полями нулевой характеристики.

Теорема 4. *Пусть A — ассоциативная алгебра над полем характеристики $p > 0$, удовлетворяющая тождеству $f = 0$. Тогда если A порождается множеством $\{a_i, i \in I\}$ и любое слово от элементов a_i нильпотентно степени не выше m, то A является нильалгеброй ограниченного индекса N. При этом N зависит от характеристики p, тождества f и числа m (и не зависит от мощности множества I).*

Эту теорему можно переформулировать так.

Следствие 2. *Пусть A — ассоциативная алгебра над полем характеристики $p > 0$, порождаемая множеством $\{a_i, i \in I\}$ и удовлетворяющая тождеству $f = 0$. Пусть m — произвольное натуральное число, $U_N(A) = \{g(a_1, \ldots, a_k) \mid g(x_1, \ldots, x_k) \in U_N, a_1, \ldots, a_k \in A\}$ — идеал значений на алгебре A. Тогда для достаточно больших N (зависящих от m, p и f) любой элемент из $U_N(A)$ является линейной комбинацией элементов $av^m b$, где $a, b \in A \cup \{1\}$, v — непустое слово от элементов порождающего множества $\{a_i, i \in I\}$.*

Доказательство. Рассмотрим в свободной ассоциативной алгебре $F\langle X\rangle$ счетного ранга идеал I_m, порожденный всеми элементами u^m, где $u \in \langle X\rangle$. Обозначим $\Gamma = \{f\}^T$. Алгебра $F\langle X\rangle/(\Gamma + I_m)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 4, поэтому на $F\langle X\rangle/(\Gamma + I_m)$ выполнено тождество $x^N = 0$ для достаточно больших N. Зафиксируем любое такое число N. Тогда если $g(x_1, \ldots, x_k) \in U_N$, то $g(x_1, \ldots, x_k) \in \Gamma + I_m$. Подставляя сюда вместо переменных x_j произвольные слова w_j от образующих алгебры A, получаем, что в алгебре A элемент $g(w_1, \ldots, w_k)$ является линейной комбинацией элементов $av^m b$, где $a, b \in A \cup \{1\}$, v — непустое слово от элементов множества $\{a_i, i \in I\}$. Для завершения доказательства осталось заметить, что для произвольных $b_1, \ldots, b_k \in A$ элемент $g(b_1, \ldots, b_k)$ является линейной комбинацией элементов $g'(w_1, \ldots, w_l)$, где w_j — слова от элементов множества $\{a_i, i \in I\}$. Так как $g'(x_1, \ldots, x_l)$ — частичная линеаризация полинома $g(x_1, \ldots, x_k)$, то $g'(x_1, \ldots, x_l) \in U_N$. Следствие доказано.

Если $x^n \in \Gamma$ для некоторого n, то теорема 2 для Γ очевидна. Поэтому в силу теоремы 1 будем считать Γ унитарно замкнутым T-идеалом. Пусть Γ содержит тождество p^s-энгелевости.

Применяя следствие 2 к $A = F\langle X\rangle/\Gamma$, получаем, что для каждого числа Q любой элемент из $\Gamma + U_{p^N}$ для достаточно больших N является линейной комбинацией по модулю Γ элементов $u'u^Q u''$, $u \in \langle X\rangle$, $u', u'' \in \langle X\rangle \cup \{1\}$. В свою очередь, для энгелевых многообразий в [3, § 6] показано, что для достаточно больших Q слово u^Q является по модулю Γ линейной комбинацией элементов $a(x)^{p^s} b$, $a, b \in F^\sharp\langle X\rangle$, $x \in X$. Итак, для достаточно больших N каждый элемент из $\Gamma + U_{p^N}$ является по модулю Γ линейной комбинацией элементов $ax^{p^s}b$, $a, b \in F^\sharp\langle X\rangle$, $x \in X$.

Лемма 3. *Пусть полином $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ полиоднороден и $f(x) \in \Gamma + U_{p^N}$. Тогда если $\deg_{x_i} f = d$, то $z^d \cdot f(x)|_{x_i=1}$, $f(x)|_{x_i=1} \cdot z^d \in \Gamma + U_{p^N}$.*

Доказательство. Докажем, что $z^d \cdot f(x)|_{x_i=1} \in \Gamma$, второе включение доказывается аналогично. Представим полином $f(x)$ в виде суммы полиоднородных полиномов $f(x) = g(x) + u(x)$, где $g(x) \in \Gamma$, $u(x) \in U_{p^N}$, тогда $f(x)|_{x_i=1} = g(x)|_{x_i=1} + u(x)|_{x_i=1}$. Так как идеал Γ унитарно замкнут, то $g(x)|_{x_i=1} \in \Gamma$. Поэтому достаточно показать, что $z^d \cdot u(x)|_{x_i=1} \in U_{p^N}$.

Если $d \geq p^N$, то включение $z^d \cdot u(x)|_{x_i=1} \in U_{p^N}$ очевидно. Рассмотрим случай $d < p^N$. Полином $u(x)$ является линейной комбинацией полиномов вида $a(x)h(w_1, \dots, w_k)b(x)$, где $h(x_1, \dots, x_k)$ — частичная линеаризация полинома x^{p^N}, $w_1, \dots, w_k \in \langle X\rangle$. При подстановке $x_i = 1$ получим, что $u(x)|_{x_i=1}$ является линейной комбинацией слагаемых

$$a(x)|_{x_i=1}h(w_1', \dots, w_k')b(x)|_{x_i=1}, \tag{6}$$

где $w_j' = w_j|_{x_i=1} \in \langle X\rangle \cup \{1\}$. Если все слова $w_1', \dots, w_k'$ отличны от 1, то полином (6) лежит в U_{p^N}. Если среди слов $w_1', \dots, w_k'$ есть слова, равные 1, и при этом $k > 1$, то полином (6) является нулевым. Оставшийся случай $k = 1$ и $w_1' = 1$ невозможен, так как тогда слово w_1 должно равняться x_i^r для некоторого натурального r, следовательно, $d = \deg_{x_i} f(x) \geq r \cdot p^N \geq p^N$; противоречие с условием $d < p^N$. Итак, полином $u(x)|_{x_i} = 1$ является суммой слагаемых вида (6), каждое из которых лежит в U_{p^N}. Следовательно, $u(x)|_{x_i=1} \in U_{p^N}$ при $d < p^N$. Лемма доказана.

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы 2. Допустим от противного, что $\Gamma + U_{p^N}$ не является вербально первичным T-идеалом. Тогда найдутся полиоднородные полиномы $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$, $g(y) = g(y_1, \dots, y_m)$, зависящие от непересекающихся наборов переменных, со свойствами

$$f(x)g(y) \in \Gamma + U_{p^N}, \quad f(x) \notin \Gamma + U_{p^N}, \quad g(y) \notin \Gamma + U_{p^N}. \tag{7}$$

Среди всех пар полиномов (f, g), удовлетворяющих условиям (7), выберем пары (f, g) с наименьшим значением $\deg f + \deg g$, а среди всех таких пар выберем пару $(f(x_1, \dots, x_n), g(y_1, \dots, y_m))$ с наименьшим значением $(\deg f - n) + (\deg g - m)$. Тогда полиномы $f(x)$ и $g(y)$ будут удовлетворять двум дополнительным свойствам. Во-первых, любые собственные частичные линеаризации полиномов $f(x)$ и $g(y)$ лежат в $\Gamma + U_{p^N}$. Во-вторых,

$$x_i^{\deg_{x_i} f} \cdot f(x)|_{x_i=1}, \ g(y)|_{y_j=1} \cdot y_j^{\deg_{y_j} g} \in \Gamma + U_{p^N}. \tag{8}$$

Первое свойство очевидно, докажем второе. Если $\deg_{x_i} f \geq p^N$, то включение $x_i^{\deg_{x_i} f} \cdot f(x)|_{x_i=1} \in \Gamma + U_{p^N}$ тривиально. Если же $\deg_{x_i} f < p^N$, то из доказательства леммы 3 следует, что

$$f(x)|_{x_i=1} \cdot g(y) \in \Gamma + U_{p^N}.$$

Так как $\deg f(x)|_{x_i=1} < \deg f(x)$, в силу выбора полиномов $f(x)$ и $g(y)$ выполняется включение $f(x)|_{x_i=1} \in \Gamma + U_{p^N}$, откуда $x_i^{\deg_{x_i} f} \cdot f(x)|_{x_i=1} \in \Gamma + U_{p^N}$. Второе включение в (8) доказывается аналогично.

Пусть $\deg_{x_i} f(x) \geq p^s$ при $i = 1, \dots, q$ и $\deg_{x_i} f(x) < p^s$ при $i = q+1, \dots, n$. Аналогично пусть $\deg_{y_i} g(y) \geq p^s$ при $j = 1, \dots, r$ и $\deg_{y_j} g(y) < p^s$ при $j = r+1, \dots, m$. Так как $f(x)g(y) \in \Gamma + U_{p^N}$, по рассуждениям перед леммой 3 выполнено равенство

$$(f(x) - 0)g(y) = \sum_{i=1}^{q} \sum_{\alpha} u_{i,\alpha}(x_i)^{p^s} v_{i,\alpha} + \sum_{j=1}^{r} \sum_{\beta} u'_{j,\beta}(y_j)^{p^s} v'_{j,\beta} + h(x,y), \tag{9}$$

где $h(x,y) \in \Gamma$.

Индукцией по l покажем, что имеет место равенство вида

$$(f(x) - f_l(x))g(y) = \sum_{i=l}^{n} \sum_{\alpha} u_{i,\alpha}(x_i)^{p^s} v_{i,\alpha} + \sum_{j=1}^{r} \sum_{\beta} u'_{j,\beta}(y_j)^{p^s} v'_{j,\beta} + h(x,y), \tag{10}$$

где $f_l(x) \in \Gamma + U_{p^N}$ (в равенствах (9) и (10) $u_{i,\alpha}$, $v_{i,\alpha}$, $u'_{j,\beta}$, $v'_{j,\beta}$, $h(x,y)$ обозначают разные полиномы). Базой индукции является случай $l = 1$, т. е. равенство (9), а при $l = q+1$ первая сумма в (10) будет пустой.

Обозначим $d = \deg_{x_l} f$ и представим две суммы в правой части (10) в виде линейной комбинации слов

$$u_0 x_l^{\alpha_1} u_1 x_l^{\alpha_2} \dots u_{\nu-1} x_l^{\alpha_\nu} u_\nu, \tag{11}$$

где все слова $u_0, \dots, u_\nu$ не зависят от x_l. Слово (11) будем называть *словом* 1*-го рода*, если $\alpha_k \geq p^s$ для некоторого $k \in \{1, \dots, \nu\}$. Иначе хотя бы одно из слов $u_0, \dots, u_\nu$ содержит в качестве подслова $(x_i)^{p^s}$, $i > l$, или $(y_j)^{p_s}$, $j = 1, \dots, r$. В этом случае будем называть (11) *словом* 2*-го рода.*

Представим линейные комбинации слов 1-го и 2-го родов в виде

$$\sum_{k=0}^{d} x^k \theta_{d-k}^{(i)}(x,y), \quad i = 1, 2,$$

где полиномы $\theta_{d-k}^{(i)}$ степеней $d-k$ по x_l содержат x_l только в виде коммутаторов с элементами из $F\langle X\rangle$. При этом можно считать, что $\theta_d^{(1)}(x,y) = 0$, так как идеал Γ содержит тождество p^s-энгелевости, из которого следует, что $\left[u, x_l^{p^s}\right] = 0$. Полиномы $\theta_{d-k}^{(2)}(x,y)$ представляются в виде линейной комбинации полиномов $a(x_i)^{p^s} b$, $i > l$, и $a(y_j)^{p^s} b$, $j = 1, \dots r$, $a, b \in F^\sharp\langle X\rangle$. В итоге, обозначая $\theta_{d-k}(x,y) = \theta_{d-k}^{(1)}(x,y) + \theta_{d-k}^{(2)}(x,y)$, получаем равенство

$$(f(x) - f_l(x))g(y) = \sum_{k=0}^{d} x_l^k \theta_{d-k}(x,y) + h(x,y). \tag{12}$$

Для произвольного полинома $u(x_l) = u(\dots, x_l, \dots)$ положим $u(x_l + z_l) = u(x_l) + u^{\{d-1\}}(x_l, z_l) + \dots + u^{\{1\}}(x_l, z_l) + u(z_l)$, где полиоднородные полиномы $u^{\{i\}}(x_l, z_l)$ степени i по x_l и степени $d-i$ по z_l являются собственными частичными линеаризациями полинома $u(x_l)$ по переменной x_l. Для единообразия обозначим $u^{\{d\}}(x_l, z_l) = u(x_l)$, $u^{\{0\}}(x_l, z_l) = u(z_l)$. Пусть $u^{[i]}(x_l) = u^{\{i\}}(x_l, z_l)|_{z_l=1}$, тогда $u(x_l + 1) = \sum\limits_{i=0}^{d} u^{[i]}(x_l)$. Если $h(x,y) \in \Gamma$, то в силу унитарной замкнутости идеала Γ $h^{[i]}(x,y) \in \Gamma$ для $i = 0, 1, \dots, d$. Если $u(x,y) = u(\dots, x_l, \dots) = u(x_l) \in \Gamma + U_{p^N}$, то по лемме 3 выполнено $x_l^i \cdot u^{[d-i]}(x_l) \in \Gamma + U_{p^N}$.

Подставляя в (12) $x_l = x_l + 1$, получаем

$$\left(f(x) + \sum_{i=0}^{d-1} f^{[i]}(x) - \sum_{i=0}^{d} f_l^{[i]}(x)\right) g(y) = \sum_{k=0}^{d} (x_l + 1)^k \theta_{d-k}(x, y) + \sum_{i=0}^{d} h^{[i]}(x, y). \quad (13)$$

Выделим в этом равенстве однородную компоненту степени i по x_l, $i = 0, 1, \dots, d-1$:

$$\big(f^{[i]}(x) - f_l^{[i]}(x)\big) g(y) = \theta_i(x, y) + \sum_{k=0}^{i-1} C_{d-k}^{i-k} x^{i-k} \theta_k(x, y) + h^{[i]}(x, y).$$

В частности, при $i = 0$

$$\big(f^{[0]}(x) - f_l^{[0]}(x)\big) g(y) = \theta_0(x, y) + h^{[0]}(x, y),$$

откуда

$$\theta_0(x, y) = \big(f^{[0]}(x) - f_l^{[0]}(x)\big) g(y) - h^{[0]}(x, y). \quad (14)$$

При $i = 1$

$$\big(f^{[1]}(x) - f_l^{[1]}(x)\big) g(y) = \theta_1(x, y) + C_d^1 x_l^1 \theta_0(x, y) + h^{[0]}(x, y).$$

Выражая из этого равенства $\theta_1(x, y)$ и используя равенство (14) для $\theta_0(x, y)$, получаем

$$\theta_1(x, y) = \big(\alpha\big(x_l^1 f^{[0]}(x) - x_l^1 f^{[0]}(x)\big) + \beta\big(f^{[1]}(x) - f_l^{[1]}(x)\big)\big) g(y) + h_1(x, y),$$

где $h_1(x, y) \in \Gamma$, $\alpha, \beta \in F$. Действуя далее аналогичным образом, получаем (индукцией по i), что при $i = 0, \dots, d-1$

$$\theta_i(x, y) = \left(\sum_{j=0}^{i} \alpha_{i,j} \big(x_l^{i-j} f^{[j]}(x) - x_l^{i-j} f_l^{[j]}(x)\big)\right) g(y) + h_i(x, y),$$

где $h_i(x, y) \in \Gamma$, $\alpha_{i,j} \in F$. Подставим эти выражения для $\theta_i(x, y)$ в (12) и перенесем все слагаемые, содержащие множитель $g(y)$, в левую часть. Получим

$$\left(f(x) - f_l(x) + \sum_{j=0}^{d-1} \beta_j \big(x_l^{d-j} f^{[j]}(x) - x_l^{d-j} f_l^{[j]}(x)\big)\right) g(y) = \theta_d(x, y) + h'(x, y), \quad (15)$$

где $h'(x, y) \in \Gamma$, $\beta_j \in F$.

Так как $f_l(x) \in \Gamma + U_{p^N}$, по лемме 3 полиномы $x_l^{d-j} f_l^{[j]}(x)$ лежат в $\Gamma + U_{p^N}$. Любая собственная частичная линеаризация полинома $f(x)$ лежит в $\Gamma + U_{p^N}$, поэтому по лемме 3 $x_l^{d-j} f^{[j]}(x) \in \Gamma + U_{p^N}$ при $j = 1, \dots, d-1$. Полином $x_l^d f^{[0]}(x) = x_l^d f(x)|_{x_l=1}$ принадлежит $\Gamma + U_{p^N}$ по (8). Обозначим

$$f_{l+1}(x) = f_l(x) - \sum_{j=0}^{d-1} \beta_j \big(x_l^{d-j} f^{[j]}(x) - x_l^{d-j} f_l^{[j]}(x)\big),$$

тогда $f_{l+1}(x) \in \Gamma + U_{p^N}$. Как отмечалось выше, $\theta_d(x, y) = \theta_d^{(2)}(x, y)$. Таким образом, равенство (15) можно переписать в виде

$$(f(x) - f_{l+1}(x)) g(y) = \theta_d^{(2)}(x, y) + h'(x, y).$$

С учетом строения полиномов $\theta_d^{(2)}(x,y)$ это равенство представляет из себя равенство (10) для $l = l+1$. Индукционный переход от l к $l+1$ доказан.

Далее применим к равенству (10) при $l = q+1$ аналогичные рассуждения для переменных $y_r, y_{r-1}, \dots, y_1$. Только будем выносить степени переменных y_i в различных полиномах не влево, а вправо. В итоге получим, что

$$(f(x) - f_{q+1}(x))(g(y) - g_{r+1}(y)) \in \Gamma$$

для некоторых $f_{q+1}(x), g_{r+1}(y) \in \Gamma + U_{p^N}$. Так как идеал Γ является вербально первичным, то или $f(x) - f_{q+1}(x) \in \Gamma$, или $g(y) - g_{r+1}(y) \in \Gamma$. Следовательно, или $f(x) \in \Gamma + U_{p^N}$, или $g(y) \in \Gamma + U_{p^N}$. В любом случае получено противоречие с (7). Теорема 2 доказана.

3. Доказательство теоремы 3

Мы постоянно будем пользоваться одним важным свойством $\widetilde{T}$-идеала $\widetilde{U}'$, доказанным в [6, следствие леммы 7]: $\widetilde{U}'$ содержит любой (обычный) полином f такой, что он однороден и унитарен по переменной x и $\deg_x f \geq p-2$. Отсюда легко выводится, что $U = \{\widetilde{U}' \cap P\}^T$ содержит любой (обычный) полином f такой, что он однороден и унитарен по переменной x и $\deg_x f \geq p-2$. В частности, U содержит тождество $(p-2)$-энгелевости.

Лемма 4. *T-идеал U является вербально первичным.*

Доказательство. Предположим от противного, что

$$f_1(x_1,\dots,x_n)f_2(y_1,\dots,y_m) \in U, \quad f_1(x_1,\dots,x_n) \notin U, \quad f_2(y_1,\dots,y_m) \notin U, \tag{16}$$

где полиномы f_1 и f_2 полиоднородны. Так как T-идеал U унитарно замкнут, можно считать, что полиномы f_1 и f_2 унитарны по всем переменным. Возможны два случая.

1. Степени f_1 и f_2 по всем переменным не выше $p-3$. Пусть $\bar{f}_1$ и $\bar{f}_2$ — полные линеаризации полиномов f_1 и f_2 соответственно. Так как $f_1 f_2 \in U$, то $\bar{f}_1\bar{f}_2 \in U$. T-идеал U вербально первичен на полилинейном уровне, поэтому для некоторого $i \in \{1,2\}$ выполнено включение $\bar{f}_i \in U$. Осталось заметить, что $\bar{f}_i \in U \iff f_i \in U$, что противоречит (16).

2. Степень некоторого полинома f_i, $i \in \{1,2\}$, по некоторой переменной не ниже $p-2$, тогда $f_i \in U$. Снова получено противоречие с (16). Лемма доказана.

Рассмотрим полином

$$R = R(a,b,c,d) = [a,b][c,d] + [c,d][a,b].$$

Так как U содержит все обычные полиномы, являющиеся следствиями тождества Кэли — Гамильтона $\chi_2(x,y) = 0$, то $[R,y] \in U$.

Лемма 5. $R \notin U$.

Доказательство. Предположим от противного, что по модулю U

$$[a,b][c,d] + [c,d][a,b] \equiv 0. \tag{17}$$

Подставим $a = [a_1,a_2]$, $b = [b_1,b_2]$ и преобразуем по модулю (17):

$$\begin{aligned}
&[[a_1,a_2],[b_1,b_2]][c,d] + [c,d][[a_1,a_2],[b_1,b_2]] \\
&\qquad \equiv 2[a_1,a_2][b_1,b_2][c,d] + 2[c,d][a_1,a_2][b_1,b_2] \\
&\qquad \equiv 2[a_1,a_2][b_1,b_2][c,d] - 2[a_1,a_2][c,d][b_1,b_2] \equiv 4[a_1,a_2][b_1,b_2][c,d].
\end{aligned}$$

Так как T-идеал U вербально первичен, то $[x,y] \in U$, что при $p \geq 5$ неверно. Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть* $\Gamma \supset \{U, x^p\}^T$ *и* $\Gamma \neq \{U, x^p\}^T$. *Тогда* $\Gamma \cap P \neq \{U, x^p\}^T \cap P$.

Доказательство. Обозначим $U_0 = \{U, x^p\}^T$. Так как $\Gamma \backslash U_0 \neq \varnothing$, найдется такой полиоднородный полином $f = f(x_1, \dots, x_n) \in \Gamma \backslash U_0$, что для каждого $i = 1, \dots, n$ степень полинома f по переменной x_i будет равна p^{m_i}, $m_i \geq 0$.

Предположим, что для некоторого i имеет место неравенство $m_i \geq 2$. Обозначим $m = m_i$ и представим полином f в виде суммы полиномов $f_j x_i^{p^m - j}$, где полиномы f_j унитарны по x_i и $\deg_{x_i} f_j = j$. Так как $m \geq 2$, для каждого j выполнено одно из неравенств $j \geq p - 2$ или $p^m - j \geq p$. В любом случае $f_j x_i^{p^m - j} \in U_0$, откуда $f \in U_0$, что противоречит выбору полинома f.

Будем считать, что полином f имеет степень p по переменным $x_1, \dots, x_l$ и степень 1 по переменным $x_{l+1}, \dots, x_n$. При этом если f полилинеен, то лемма доказана.

Пусть $l \geq 1$. Снова представим полином f в виде $f = \sum\limits_{j=0}^{p} f_j x_l^{p-j}$, где полином f_j унитарен по переменной x_l. Так как $x^p \in U_0$ и $f_{p-2}, f_{p-1}, f_p \in U_0$, можно считать, что полином f имеет вид $f = \sum\limits_{j=1}^{p-3} f_j x_l^{p-j}$. Поскольку $f \notin U_0$, найдется минимальное число k с условием $f_k \notin U_0$, $k \in \{1, \dots, p-3\}$. Рассмотрим частичную линеаризацию g полинома f по переменной x_l, имеющую степень k по переменной x_l и степени 1 по переменным $y_1, \dots, y_{p-k}$. Подставим в g $y_s = R(a_a, b_s, c_s, d_s) = R_s$, $s = 1, \dots, p-k$. В силу $[R_s, y] \in \Gamma$ получим, что

$$(p-k)! f_k R_1 \dots R_{p-k} \in \Gamma, \quad f_k \notin U_0.$$

Так как $(p-k)! \neq 0$ в поле F, то $f_k R_1 \dots R_{p-k} \in \Gamma$. Пусть f_k' — полная линеаризация полинома f_k по переменной x_l. Тогда $f_k' \notin U_0$ и $f_k' R_1 \dots R_{p-k} \in \Gamma$.

Полином f_k' имеет степень p по $(l-1)$-й переменной. Проделаем с полиномом $f_k' R_1 \dots R_{p-k}$ вышеописанную операцию еще $l-1$ раз (ясно, что появившийся множитель $R_1 \dots R_s$ этой операции мешать не будет). В итоге для некоторого t получим полилинейный полином $f' R_1 \dots R_t \in \Gamma$, где $f' \notin U_0$. Поскольку $U_0 \cap P = U \cap P$ и T-идеал U вербально первичен на полилинейном уровне, с учетом леммы 5 получаем, что $f' R_1 \dots R_t \notin U_0$. Итак, $f' R_1 \dots R_t \in \Gamma \cap P \backslash U_0 \cap P$. Лемма доказана.

Лемма 7. *Для каждого* $N \geq 1$ T*-идеал* $\{U, x^{p^N}\}^T$ *является вербально первичным.*

Доказательство. Для достаточно больших N утверждение леммы вытекает из теоремы 2 и леммы 4. Для получения оценки на значения числа N проанализируем доказательство теоремы 2. В доказательстве на число N были наложены только два условия:

1) T-идеал U должен содержать тождество p^s-энгелевости;

2) любой элемент из $U + U_{p^N}$ должен являться по модулю U линейной комбинацией элементов $a x^{p^s} b$, $a, b \in F^\sharp\langle X\rangle$, $x \in X$ (см. рассуждения перед леммой 3).

U содержит тождество p-энгелевости, т. е. $s = 1$. Покажем, что для каждого натурального $N \geq 2$ любой элемент из $U + U_{p^N}$ является по модулю U линейной комбинацией элементов $a x^p b$, $a, b \in F^\sharp\langle X\rangle$, $x \in X$, откуда будет следовать доказательство леммы для $N \neq 1$.

Легко видеть, что любая собственная линеаризация $g = g(x_1, \dots, x_n)$ полинома x^{p^N} лежит в U. В самом деле, все собственные линеаризации являются следствиями таких собственных линеаризаций, у которых степени по каждой переменной x_i равны p^{m_i}, $m_i \geq 0$. Поэтому можно считать, что линеаризация g имеет такой вид. Если при этом степень g по некоторой переменной x_i не меньше, чем p, то $g \in U$. Если же полином g полилинеен, то g является следствием тождества

$$\sum_{\sigma \in S_p} x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \dots x_{\sigma(p)} = 0,$$

которое лежит в U.

Таким образом, любой элемент из $U + U_{p^N}$ является по модулю U линейной комбинацией элементов $au^{p^N}b$, где $a, b \in F^\sharp\langle X\rangle$, u — некоторое (непустое) слово над множеством X. Осталось показать, что слово $(xv)^{p^2}$ является по модулю U линейной комбинацией элементов ax^pb, где $a, b \in F^\sharp\langle X\rangle$. Слово $(xv)^{p^2}$ является линейной комбинацией элементов $f_i x^{p^2-i}$, $i = 0, 1, \dots, p^2$, где полиномы f_i унитарны по переменной x. Если $i \geq p-2$, то $f_i \in U$. Если же $i < p-2$, то $p^2 - i > p^2 - (p-2) > p$. Получаем, что слово $(xv)^{p^2}$ представимо по модулю U в требуемом виде, что доказывает лемму для $N \neq 1$.

Пусть теперь $N = 1$. Если идеал $\{U, x^p\}^T$ не является T-первичным, то найдутся такие T-идеалы Γ_1, Γ_2, что $\Gamma_1\Gamma_2 \subseteq \{U, x^p\}^T$, $\Gamma_i \supset \{U, x^p\}^T$, $\Gamma_i \neq \{U, x^p\}^T$, $i = 1, 2$. По лемме 6 $\Gamma_i \cap P \neq \{U, x^p\}^T \cap P = U \cap P$. Поэтому найдутся полилинейные полиномы $f_1 \in \Gamma_1 \cap P \backslash U \cap P$, $f_2 \in \Gamma_2 \cap P \backslash U \cap P$, которые зависят от непересекающихся наборов переменных. Тогда $f_1 f_2 \in \{U, x^p\}^T \cap P = U \cap P$, т. е. $f_1 f_2 \in U$. Идеал U вербально первичен, поэтому для некоторого $i \in \{1, 2\}$ выполнено $f_i \in U \cap P$, что противоречит выбору полинома f_i. Лемма доказана.

Лемма 8. *Пусть U' — унитарно замкнутый T-идеал и $U' \cap P = U \cap P$. Тогда $U' = U$.*

Доказательство. Если $U' \neq U$, то найдется такой унитарный по всем переменным полином $f = f(x_1, \dots, x_n)$, что $f \in U'$, $f \notin U$. Если степень полинома f по некоторой переменной x_i не меньше, чем $p-2$, то $f \in U$; противоречие. Если же степени f по всем переменным $x_1, \dots, x_n$ меньше, чем $p-2$, то рассмотрим полную линеаризацию полинома f, обозначим ее через $\bar{f}$. Тогда $\bar{f} \in U' \cap P = U \cap P$, поэтому $\bar{f} \in U$, откуда $f \in U$; противоречие. Лемма доказана.

Лемма 9. *Пусть U' — вербально первичный T-идеал, $U' \cap P = U \cap P$ и $U' \neq U$. Тогда $U' = \{U, x^{p^N}\}^T$ для некоторого $N \geq 1$.*

Доказательство. Если T-идеал U' унитарно замкнут, то по лемме 5 $U' = U$, что противоречит условию леммы. Поэтому по теореме 1 U' содержит полином x^n для некоторого натурального n. Пусть N — наименьшее натуральное число, для которого $x^{p^N} \in U'$. Обозначим $U_0 = \{U, x^{p^N}\}^T \subseteq U'$ и докажем, что $U' = U_0$.

Если $U' \neq U_0$, то существует полином $f = f(x_1, \dots, x_n)$ с пятью свойствами: 1) $f \in U' \backslash U_0$; 2) f полиоднороден; 3) любая собственная частичная линеаризация полинома f лежит в U_0; 4) степень полинома f по любой переменной x_i равна p^{m_i}, $m_i \geq 0$; 5) среди всех полиномов, удовлетворяющих условиям 1–4, полином f зависит от наименьшего числа переменных. Пусть степень f по переменной $x = x_1$ максимальна и равна m. Тогда $m \geq 1$, так как $f \notin U_0$, а $U_0 \cap P = U' \cap P$.

Запишем полином f в виде $f = \sum\limits_{i=0}^{p^m} f_i x^{p^m - i}$, где полиномы $f_0, \dots, f_{p^m}$ унитарны по x и $\deg_x f_i = i$. При $i \geq p-2$ выполнено $f_i \in U_0$, поэтому можно считать, что полином f имеет вид $f = \sum\limits_{i=0}^{p-3} f_i x^{p^m - i}$. Некоторые (но не все) полиномы $f_0, \dots, f_{p-3}$ могут лежать в U_0. Рассмотрим все числа $k_1 < k_2 < \dots < k_l$, для которых $f_{k_i} \notin U_0$. Тогда можно считать, что полином f имеет вид

$$f = f_{k_1} x^{p^m - k_1} + f_{k_2} x^{p^m - k_2} + \dots + f_{k_l} x^{p^m - k_l}, \quad 0 \leq k_i \leq p-3, \quad f_{k_i} \notin U_0. \quad (18)$$

Среди всех полиномов, удовлетворяющих пяти наложенным условиям и имеющих вид (18), выберем полином f с минимальным значением параметра l. Возможны два случая.

1. $k_1 > 0$. Рассмотрим частичную линеаризацию $\bar{f}$ полинома f по переменной x, имеющую степень $p^m - 1$ по x и степень 1 по y. Подставим в эту частичную линеаризацию $y = R$, тогда по модулю U_0 будет иметь место равенство

$$\bar{f} \equiv ((p^m - k_1) f_{k_1} x^{p^m - k_1 - 1} + (p^m - k_2) f_{k_2} x^{p^m - k_2 - 1} + \dots + (p^m - k_l) f_{k_l} x^{p^m - k_l - 1}) R.$$

По выбору полинома f выполнено включение $\bar{f} \in U_0$. Кроме того, по лемме 5 $R \notin U$, поэтому $R \notin U_0$ ввиду того, что R полилинеен и $U_0 \cap P = U \cap P$. По лемме 7 T-идеал U_0 вербально первичен, следовательно,

$$(p^m - k_1) f_{k_1} x^{p^m - k_1} + (p^m - k_2) f_{k_2} x^{p^m - k_2} + \dots + (p^m - k_l) f_{k_l} x^{p^m - k_l} \in U_0. \quad (19)$$

Пусть $l \geq 2$. Так как $p^m - k_l \neq 0$ в поле F, выразим из последнего включения $f_{k_l} x^{p^m - k_l}$ в виде линейной комбинации полиномов $f_{k_i} x^{p^m - k_i}$, $i < l$, и некоторого полинома $g \in U_0$. Вычтем полученное выражение из (18). Получим некоторый полином, удовлетворяющий свойствам 1–5 и (18), имеющий меньшее значение параметра l; противоречие.

Итак, в равенстве (18) $l = 1$. Тогда из (19) и условия $p^m - k_1 \neq 0$ в F получаем, что $f = f_{k_1} x^{p^m - k_1} \in U_0$, что противоречит условию $f \notin U_0$. Таким образом, случай $k_1 > 0$ невозможен.

2. $k_1 = 0$. Если при этом $l \geq 2$, то, действуя, как в предыдущем случае, получаем противоречие. Следовательно, $l = 1$. Это означает, что $f_0 x^{p^m} \in U'$. Так как U' вербально первичен, то или $f_0 \in U'$, или $x^{p^m} \in U'$.

Допустим, что $x^{p^m} \in U'$. Если $m < N$, то получаем противоречие с выбором N. Следовательно, $m \geq N$. Но тогда $x^{p^m} \in U_0$, откуда $f_0 x^{p^m} \in U_0$, что противоречит условию $f = f_0 x^{p^m} \in U' \backslash U_0$.

Допустим, что $f_0 \in U'$, тогда $f_0 \notin U_0$. Полином f_0 удовлетворяет четырем свойствам: 1) $f_0 \in U' \backslash U_0$; 2) f_0 полиоднороден; 3) любая собственная частичная линеаризация полинома f_0 лежит в U_0; 4) степень полинома f_0 по любой переменной x_i равна p^{m_i}, $m_i \geq 0$. При этом полином f_0 зависит от строго меньшего числа переменных, чем полином f. Противоречие с выбором полинома f. Итак, во всех случаях получено противоречие с предположением $U' \neq U_0$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 3. Первая часть теоремы вытекает из леммы 9, вторая — из лемм 4 и 7. То, что идеалы U и $\{U, x^{p^N}\}^T$, $N \geq 1$, попарно различны, очевидно ввиду унитарной замкнутости T-идеала U. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kemer A.* On the multilinear components of the regular prime varieties // Methods in ring theory: Proc. Trento conf., 1998 P. 171–183. (Lect. Notes Pure Appl. Math.; V. 198).
2. *Белов А. Я.* Ассоциативных PI-алгебр, совпадающих со своим коммутантом, не существует // Сиб. мат. журн. 2003. Т. 44, № 6. С. 1239–1254.
3. *Самойлов Л. М.* Алгебраические алгебры и первичные многообразия ассоциативных алгебр // Мат. сб. 2009. Т. 200, № 5. С. 99–128.
4. *Размыслов Ю. П.* Тождества со следом полных матричных алгебр над полем характеристики нуль // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1974. Т. 38, № 4. С. 723–756.
5. *Kemer A.* Multilinear components of the prime subvarieties of the variety $\mathrm{Var}(M_2(F))$ // Algebr. Represent. Theory. 2001. V. 4, N 1. P. 87–104.
6. *Kemer A.* Remarks on the prime varieties // Israel J. Math. 1996. V. 96, N 2. P. 341–356.
7. *Самойлов Л. М.* О γ-классических многообразиях // Фунд. и прикл. математика. 2002. Т. 8, № 3. С. 887–910.
8. *Kemer A. R.* Ideals of identities of associative algebras. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1991. (Transl. Math. Monogr.; V. 87).
9. *Кемер А. Р.* Тождества конечнопорожденных алгебр над бесконечным полем // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1990. Т. 54, № 4. С. 726–753.
10. *Самойлов Л. М.* Аналог теоремы Левицкого для бесконечно порожденных ассоциативных алгебр // Мат. заметки. 2009. Т. 86, № 1. С. 151–153.

Статья поступила 16 сентября 2009 г.

Самойлов Леонид Михайлович
Ульяновский гос. университет,
факультет математики и информационных технологий,
ул Л. Толстого, 42, Ульяновск 432970
`samoilov_l@rambler.ru`