Сибирский математический журнал
Июль—август, 2010. Том 51, № 4

УДК 517.9

ОБ УСЛОВИЯХ РАЗРЕШИМОСТИ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ С НАЧАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ИЗ ПОДПРОСТРАНСТВА

М. С. Бичегкуев

Аннотация. Получены необходимые и достаточные условия разрешимости разностных уравнений в банаховом пространстве векторных последовательностей с начальным условием из подпространства.

Ключевые слова: разностное уравнение, оператор взвешенного сдвига, линейное отношение, сужение отношения, упорядоченная пара, спектр пары.

§ 1. Введение

Пусть X — комплексное банахово пространство и $LB(X)$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в X. Через $l_p = l_p(\mathbb{Z}_+, X)$, $p \in [1, \infty]$, обозначаются банаховы пространства последовательностей $x : \mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\} \to X$ векторов из X с нормой

$$\|x\|_p = \Big(\sum_{n\geq 0} \|x(n)\|^p\Big)^{1/p}, \ p \in [1, \infty); \quad \|x\|_\infty = \sup_{n\geq 0} \|x(n)\|, \ p = \infty.$$

Основные результаты данной статьи связаны с вопросами разрешимости разностного уравнения в пространстве l_p вида

$$x(n+1) = Bx(n) + f(n), \quad f \in l_p, \ n \in \mathbb{Z}_+, \tag{1.1}$$

решение $x \in l_p$ которого удовлетворяет условию

$$x(0) \in E, \tag{1.2}$$

где E — замкнутое подпространство в X и оператор B принадлежит алгебре $LB(X)$.

Основной метод исследования задачи (1.1), (1.2) состоит в использовании оператора

$$T : D(T) \subset l_p \to l_p, \quad (Tx)(n) = x(n+1) - Bx(n), \quad x \in l_p, \ n \geq 0, \tag{1.3}$$

с областью определения

$$D(T) = \{x \in l_p : x(0) \in E\}. \tag{1.4}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 10–01–00276).

Если $E \neq X$, то такой оператор ограничен на замкнутом подпространстве $D(T)$ и поэтому замкнут. Таким образом, вопрос о разрешимости задачи (1.1), (1.2) сводится к разрешимости уравнения

$$Tx = f, \quad f \in l_p, \tag{1.5}$$

рассматриваемого в $l_p = l_p(\mathbb{Z}_+, X)$, $p \in [1, \infty]$.

Результаты данной статьи (теоремы 3.1, 3.2) связаны с выяснением условий обратимости линейного оператора T, т. е. однозначной разрешимости задачи (1.1), (1.2) для любой последовательности f из l_p. В свою очередь, для исследования обратимости оператора T существенно привлекается спектральная теория линейных отношений (многозначных линейных операторов) на банаховых пространствах. Основные используемые здесь понятия и результаты из теории линейных отношений излагаются в § 2.

Рассматриваемые разностные уравнения возникают при изучении ограниченных решений дифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами, исследовании теплицевых операторов в пространствах векторных последовательностей и уравнений Винера — Хопфа. Вопрос приложений разностных уравнений обсуждается в § 4. В § 5 приводятся оценки решений уравнения (1.1), удовлетворяющих условию (1.2). История вопроса, связанная с разрешимостью разностных уравнений, подробно обсуждалась в [1].

§ 2. Некоторые сведения из теории линейных отношений

Излагаемые здесь понятия и результаты из теории линейных отношений можно найти в монографиях [2, 3] и статье [4].

Пусть $\mathscr{X}$ — комплексное банахово пространство. Любое линейное подпространство $\mathscr{A}$ из декартова произведения $\mathscr{X} \times \mathscr{X}$ называется *линейным отношением* на банаховом пространстве $\mathscr{X}$. Если подпространство $\mathscr{A}$ замкнуто в $\mathscr{X} \times \mathscr{X}$, то $\mathscr{A}$ называется *замкнутым линейным отношением.* Совокупность всех линейных отношений обозначим через $LR(\mathscr{X})$, а совокупность замкнутых линейных отношений — через $LRC(\mathscr{X})$.

Подпространство $D(\mathscr{A}) = \{x \in \mathscr{X} : \text{существует } y \in \mathscr{X} \text{ такой, что } (x, y) \in \mathscr{A}\}$ называется *областью определения отношения* $\mathscr{A} \in LR(\mathscr{X})$. Для каждого элемента $x_0 \in D(\mathscr{A})$ отношение $\mathscr{A}$ определяет множество

$$\mathscr{A}x_0 = \{y \in \mathscr{X} : (x_0, y) \in \mathscr{A}\},$$

которое может быть представлено в виде $\mathscr{A}x_0 = y + \mathscr{A}0$ для любого $y \in \mathscr{A}x_0$. При этом $\mathscr{A}0 = \{y \in \mathscr{X} : (0, y) \in \mathscr{A}\}$ — линейное подпространство в $\mathscr{X}$.

Подпространства

$$\operatorname{Ker} \mathscr{A} = \{x \in D(\mathscr{A}) : (x, 0) \in \mathscr{A}\}, \quad \operatorname{Im} \mathscr{A} = \bigcup_{x \in D(\mathscr{A})} \mathscr{A}x$$

называются соответственно *ядром* и *образом линейного отношения* $\mathscr{A} \in LR(\mathscr{X})$. Отметим, что далее в выражении «линейное отношение» слово «линейное» будет часто опускаться.

Обратное к $\mathscr{A} \in LR(\mathscr{X})$ *отношение* $\mathscr{A}^{-1}$ определяется равенством

$$\mathscr{A}^{-1} = \{(y, x) \in \mathscr{X} \times \mathscr{X} : (x, y) \in \mathscr{A}\}.$$

Суммой двух отношений $\mathscr{A}, \mathscr{B} \in LR(\mathscr{X})$ называется линейное подпространство из $\mathscr{X} \times \mathscr{X}$ вида

$$\mathscr{A} + \mathscr{B} = \{(x, y) \in \mathscr{X} \times \mathscr{X} : x \in D(\mathscr{A}) \cap D(\mathscr{B}),\ y \in \mathscr{A}x + \mathscr{B}x\},$$

где под $\mathscr{A}x + \mathscr{B}x$ понимается алгебраическая сумма множеств $\mathscr{A}x$ и $\mathscr{B}x$. Значит, $D(\mathscr{A} + \mathscr{B}) = D(\mathscr{A}) \cap D(\mathscr{B})$.

Произведением отношений $\mathscr{A} \in LR(\mathscr{X})$, $\mathscr{B} \in LR(\mathscr{X})$ называется линейное подпространство из $\mathscr{X} \times \mathscr{X}$ вида

$$\mathscr{B}\mathscr{A} = \{(x, z) \in \mathscr{X} \times \mathscr{X} : \text{ существует } y \in \mathscr{X} \text{ такой, что } (x, y) \in \mathscr{A},\ (y, z) \in \mathscr{B}\}.$$

Отметим, что $(\mathscr{B}\mathscr{A})^{-1} = \mathscr{A}^{-1}\mathscr{B}^{-1}$.

Каждое отношение $\mathscr{A} \in LR(\mathscr{X})$ является графиком многозначного отображения $\widetilde{\mathscr{A}} : D(\widetilde{A}) \subset \mathscr{X} \to 2^{\mathscr{X}}$, где $D(\widetilde{\mathscr{A}}) = D(\mathscr{A})$, $\widetilde{\mathscr{A}}x = \mathscr{A}x$ для каждого $x \in D(\mathscr{A})$, а $2^{\mathscr{X}}$ — совокупность всех подмножеств множества $\mathscr{X}$. В дальнейшем они отождествляются и для них используется один и тот же символ $\mathscr{A}$. Таким образом, множество $LO(\mathscr{X})$ линейных операторов, содержащее алгебру $LB(\mathscr{X})$, можно считать включенным в $LR(\mathscr{X})$.

Определение 2.1. Отношение $\mathscr{A} \in LRC(\mathscr{X})$ называется *непрерывно обратимым*, если $\mathscr{A}^{-1} \in LB(\mathscr{X})$, т. е. $\operatorname{Ker} \mathscr{A} = \{0\}$ (отношение $\mathscr{A}$ инъективно) и $\operatorname{Im} \mathscr{A} = \mathscr{X}$ (отношение $\mathscr{A}$ сюръективно). *Резольвентным множеством* отношения $\mathscr{A} \in LR(\mathscr{X})$ называется множество $\rho(\mathscr{A})$ всех $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых $(\mathscr{A} - \lambda I)^{-1} \in LB(\mathscr{X})$. *Спектром* отношения $A \in LR(\mathscr{X})$ называется множество $\sigma(\mathscr{A}) = \mathbb{C} \setminus \rho(\mathscr{A})$.

Отметим, что множество $\rho(\mathscr{A})$ открыто, а спектр отношения $\mathscr{A} \in LR(\mathscr{X})$ замкнут.

Определение 2.2. Отображение

$$R(\cdot, \mathscr{A}) : \rho(\mathscr{A}) \to LB(\mathscr{X}), \quad R(\lambda, \mathscr{A}) = (\mathscr{A} - \lambda I)^{-1},\ \lambda \in \rho(\mathscr{A}),$$

называется *резольвентой* отношения $\mathscr{A} \in LR(\mathscr{X})$.

Резольвента отношения $\mathscr{A}$ является псевдорезольвентой в общепринятом смысле (см., например, [5, гл. VII, § 4; 6, § 4.8]), причем

$$\mathscr{A}0 = \operatorname{Ker} R(\lambda_0, \mathscr{A}), \quad D(\mathscr{A}) = \operatorname{Im} R(\lambda_0, \mathscr{A}), \quad \lambda_0 \in \rho(\mathscr{A}).$$

Теорема 2.1 [4]. *Каждая псевдорезольвента $R : U \subset \mathbb{C} \to LB(\mathscr{X})$, определенная на множестве U из $\mathbb{C}$ (возможно, одноточечном), является резольвентой некоторого отношения $\mathscr{A} \in LRC(\mathscr{X})$.*

Отметим, что отношение $\mathscr{A} \in LRC(\mathscr{X})$ (в условии теоремы 2.1) строится следующим образом: $\mathscr{A} = R(\lambda_0) + \lambda_0 I$, где $\lambda_0 \in U$, и $\mathscr{A}$ не зависит от выбора точки $\lambda_0 \in U$.

Линейное подпространство $\mathscr{X}_0$ из $\mathscr{X}$ называется *инвариантным* относительно $\mathscr{A} \in LR(\mathscr{X})$ с непустым резольвентным множеством $\rho(\mathscr{A})$, если оно инвариантно относительно всех операторов $R(\lambda, \mathscr{A})$, $\lambda \in \rho(\mathscr{A})$.

Сужением отношения $\mathscr{A} \in LRC(\mathscr{X})$ с непустым $\rho(\mathscr{A})$ на замкнутое инвариантное относительно $\mathscr{A}$ подпространство $\mathscr{X}_0$ из $\mathscr{X}$ назовем отношение $\mathscr{A}_0 \in LRC(\mathscr{X}_0)$, резольвентой которого является сужение $R_0 : \rho(\mathscr{A}) \to LB(\mathscr{X}_0)$, $R_0(\lambda) = R(\lambda, \mathscr{A})|\mathscr{X}_0$, $\lambda \in \rho(\mathscr{A})$, резольвенты $R(\cdot, \mathscr{A}) : \rho(\mathscr{A}) \to LB(\mathscr{X})$ на $\mathscr{X}_0$. Такое сужение обозначим через $\mathscr{A}_0 = \mathscr{A}|\mathscr{X}_0$.

Определение 2.3. *Расширенным спектром* отношения $\mathscr{A} \in LRC(\mathscr{X})$ называется подмножество $\tilde{\sigma}(\mathscr{A})$ из расширенной комплексной плоскости $\widetilde{\mathbb{C}}$, которое совпадает с $\sigma(\mathscr{A})$, если $\mathscr{A} \in LB(\mathscr{X})$, и $\tilde{\sigma}(\mathscr{A}) = \sigma(\mathscr{A}) \cup \{\infty\}$, если $\mathscr{A} \notin LB(\mathscr{X})$.

Теорема 2.2 [4]. *Если* $\mathscr{A} \in LRC(\mathscr{X})$, *то расширенный спектр* $\tilde{\sigma}(\mathscr{A}^{-1})$ *обратного к* $\mathscr{A}$ *отношения* $\mathscr{A}^{-1} \in LRC(\mathscr{X})$ *представим в виде*

$$\tilde{\sigma}(\mathscr{A}^{-1}) = \{\lambda^{-1} : \lambda \in \tilde{\sigma}(\mathscr{A})\}.$$

Определение 2.4. Будем говорить, что оператор $T \in LB(\mathscr{X})$ *перестановочен с отношением* $\mathscr{A} \in LR(\mathscr{X})$, если $(Tx, Ty) \in \mathscr{A}$ для любых $(x, y) \in \mathscr{A}$.

В данной статье существенно используется

Теорема 2.3 [4]. *Пусть расширенный спектр* $\tilde{\sigma}(\mathscr{A})$ *отношения* $\mathscr{A} \in LRC(\mathscr{X})$ *представим в виде*

$$\tilde{\sigma}(\mathscr{A}) = \sigma_0 \cup \sigma_1, \tag{2.1}$$

где σ_0 — *компактное множество из* $\mathbb{C}$, σ_1 — *замкнутое множество и* $\sigma_0 \cap \sigma_1 = \varnothing$. *Тогда существует разложение*

$$\mathscr{X} = \mathscr{X}_0 \oplus \mathscr{X}_1 \tag{2.2}$$

пространства $\mathscr{X}$ *в прямую сумму замкнутых инвариантных подпространств* $\mathscr{X}_0, \mathscr{X}_1$ *таких, что сужения* $\mathscr{A}_i = \mathscr{A}|\mathscr{X}_1$, $i = 0, 1$, *обладают следующими свойствами:*

(1) $\mathscr{A}_0 \in LB(\mathscr{X}_0)$, $\tilde{\sigma}(\mathscr{A}_0) = \sigma(\mathscr{A}_0) = \sigma_0$;

(2) $\mathscr{A}_1 0 = \mathscr{A} 0 = \operatorname{Ker} R(\lambda, \mathscr{A}) = \operatorname{Ker} R(\lambda, \mathscr{A}_1)$, $\lambda \in \rho(\mathscr{A})$, $D(\mathscr{A}) = \mathscr{X}_0 \oplus D(\mathscr{A}_1)$, $\tilde{\sigma}(\mathscr{A}_1) = \sigma_1$.

Проектор $P_0 \in LB(\mathscr{X})$, *осуществляющий разложение* (2.2) (*проектор Рисса*), *т. е.* $\mathscr{X}_0 = \operatorname{Im} P_0$, $\mathscr{X}_1 = \operatorname{Ker} P_0$, *перестановочен с* $\mathscr{A}$ *и определяется формулой*

$$P_0 = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_0} R(\lambda, \mathscr{A})\, d\lambda, \tag{2.3}$$

где γ_0 — *замкнутая жорданова кривая* (*или конечное число таких кривых*), *расположенная в* $\rho(\mathscr{A})$ *так, что* σ_0 *лежит внутри, а* σ_1 — *вне нее.*

Линейные отношения естественным образом используются при построении спектральной теории упорядоченных пар линейных операторов (пучков линейных операторов).

Пусть (G, F) — упорядоченная пара линейных операторов $G : D(G) \subset \mathscr{X} \to \mathscr{X}$, $F \in LB(\mathscr{X})$, причем G — замкнутый оператор.

Определение 2.5. К *резольвентному множеству* $\rho(G, F)$ упорядоченной пары (G, F) отнесем все числа $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых оператор $G - \lambda F : D(G) \subset \mathscr{X} \to \mathscr{X}$ непрерывно обратим. Множество $\sigma(G, F) = \mathbb{C} \backslash \rho(G, F)$ назовем *спектром* этой *пары*. Функция

$$R(\cdot; G, F) : \rho(G, F) \to LB(\mathscr{X}), \quad R(\lambda; G, F) = (G - \lambda F)^{-1},\ \lambda \in \rho(G, F),$$

называется *резольвентой пары* (G, F).

Определение 2.6. *Расширенным спектром* пары (G, F) называется подмножество $\tilde{\sigma}(G, F)$ из $\widetilde{\mathbb{C}}$, совпадающее с $\sigma(G, F)$, когда функция $R(\cdot; G, F)$ допускает голоморфное продолжение в точку ∞, причем $\lim\limits_{|\lambda| \to \infty} R(\lambda; G, F) = 0$, и $\tilde{\sigma}(G, F) = \sigma(G, F) \cup \{\infty\}$ в противном случае.

Функции $R_l(\cdot; G, F) : \rho(G, F) \to LB(\mathscr{X})$, $R_r(\cdot; G, F) : \rho(G, F) \to LB(\mathscr{X})$, определенные равенствами $R_l(\lambda; G, F) = (G - \lambda F)^{-1} F$, $R_r(\lambda; G, F) = F(G -$

$\lambda F)^{-1}$, $\lambda \in \rho(G,F)$, называются соответственно *левой* и *правой резольвентами* упорядоченной пары (G,F). Эти функции являются псевдорезольвентами, причем функция $R_l(\cdot;G,F)$ — резольвента отношения $\mathscr{A}_l = F^{-1}G \in LR(\mathscr{X})$, а $R_r(\cdot;G,F)$ — резольвента отношения $\mathscr{A}_r = GF^{-1} \in LR(\mathscr{X})$. Отношения $\mathscr{A}_l$ и $\mathscr{A}_r$ называются соответственно *левым* и *правым линейными отношениями для упорядоченной пары* (G,F). Эти отношения могут быть представлены в виде

$$\mathscr{A}_l = F^{-1}G = \{(x,y) \in D(G) \times \mathscr{X} : Gx = Fy\} \in LR(\mathscr{X}), \tag{2.4}$$

$$\mathscr{A}_r = GF^{-1} = \{(Fy, Gy) : y \in D(G)\} \in LR(\mathscr{X}). \tag{2.5}$$

Теорема 2.4 [4]. *Для упорядоченной пары (G,F) имеют место следующие свойства:*

(1) $\tilde\sigma(G,F) = \tilde\sigma(F^{-1}G) = \tilde\sigma(\mathscr{A}_l)$;

(2) $\tilde\sigma(G,F)\backslash\{0,\infty\} = \tilde\sigma(\mathscr{A}_r)\backslash\{0,\infty\}$.

В частности, оператор $G - F$ обратим тогда и только тогда, когда $1 \in \rho(F^{-1}G)$.

Определение 2.7. Два линейных отношения $\mathscr{A}, \mathscr{B} \in LR(\mathscr{X})$ называются *подобными*, если существует непрерывно обратимый оператор $U \in LB(\mathscr{X})$ такой, что $\mathscr{B} = \{(Ux, Uy) : (x,y) \in \mathscr{A}\}$.

Отметим, что для подобных отношений $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ из определения 2.7 верны равенства $\mathscr{B} = U^{-1}\mathscr{A}U$, $\mathscr{A} = U\mathscr{B}U^{-1}$ и спектры их совпадают, т. е. $\sigma(\mathscr{B}) = \sigma(\mathscr{A})$, $\tilde\sigma(\mathscr{B}) = \tilde\sigma(\mathscr{A})$.

§ 3. Основные результаты

Разностный оператор $-T$ (см. формулы (1.3), (1.4)) представим в виде

$$-T = \mathscr{B} - S,$$

где $\mathscr{B} \in LB(l_p)$, определен равенствами $(\mathscr{B}x)(n) = Bx(n)$, $x \in l_p$, $n \in \mathbb{Z}_+$, и оператор сдвига $S : D(S) = D(T) \subset l_p \to l_p$, $p \in [1,\infty]$, определен равенствами $(Sx)(n) = x(n+1)$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

Далее рассматривается упорядоченная пара $(\mathscr{B}, S)$.

Введем в рассмотрение семейство изометрических обратимых операторов $V(\gamma)$, $\gamma \in \mathbb{T} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$, имеющих вид

$$(V(\gamma)x)(n) = \gamma^n x(n), \quad n \in \mathbb{Z}_+,\ \gamma \in \mathbb{T},\ x \in l_p.$$

Лемма 3.1. *Спектр $\sigma(\mathscr{B}, S)$ упорядоченной пары $(\mathscr{B}, S)$ инвариантен относительно поворота вокруг нуля в поле комплексных чисел $\mathbb{C}$. Если $1 \notin \sigma(\mathscr{B}, S)$, т. е. если оператор $-T = \mathscr{B} - S$ обратим, то*

$$\sigma(\mathscr{B}, S) \cap \mathbb{T} = \varnothing \tag{3.1}$$

и имеют место равенства

$$V(\gamma^{-1})(-T)^{-1}V(\gamma) = (\mathscr{B} - \gamma S)^{-1} = R(\gamma; \mathscr{B}, S), \quad \gamma \in \mathbb{T}, \tag{3.2}$$

$$V(\gamma^{-1})R(\lambda; \mathscr{B}, S)V(\gamma) = (\mathscr{B} - \gamma\lambda S)^{-1} = R(\gamma\lambda; \mathscr{B}, S), \quad \lambda \in \rho(\mathscr{B}, S). \tag{3.3}$$

Доказательство. Непосредственно из определения оператора T (см. § 1) имеем, что $V(\gamma)(D(T)) = D(T)$ для всех $\gamma \in \mathbb{T}$. Кроме того, справедливы равенства

$$V(\gamma^{-1})(\mathscr{B} - \lambda S)V(\gamma) = \mathscr{B} - \gamma\lambda S, \quad \gamma \in \mathbb{T}, \tag{3.4}$$

из которых получаем, что обратимость оператора $-T = \mathscr{B} - S$ (условие $1 \in \rho(\mathscr{B}, S)$) эквивалентна обратимости всех операторов $\mathscr{B} - \gamma S$, $\gamma \in \mathbb{T}$, т. е. условию (3.1). Из равенств (3.4), учитывая, что подобные операторы имеют одинаковый спектр, следуют равенства (3.2) и (3.3). Лемма доказана.

В условиях следующей леммы используются операторы из $LB(l_p)$ вида

$$(\overline{V}(\varphi)x)(k) = \varphi(k)x(k), \quad k \in \mathbb{Z}_+,\ x \in l_p,$$

где $\varphi \in l_\infty(\mathbb{Z}_+) = l_\infty(\mathbb{Z}_+, \mathbb{C})$. Кроме того, рассматривается последовательность $\psi_n : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$, из l_p вида

$$\psi_n(k) = \begin{cases} 1, & k \leq n, \\ 2 - \frac{k}{n}, & n < k \leq 2n, \\ 0, & k > 2n, \end{cases}$$

а также соответствующая последовательность $\overline{V}(\psi_n)$, $n \geq 1$, операторов из алгебры $LB(l_p)$. Отметим, что оператор $V(\gamma)$, $\gamma \in \mathbb{T}$, может быть записан также в виде $\overline{V}(\varphi_\gamma)$, где $\varphi_\gamma(n) = \gamma^n$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

Лемма 3.2 [1]. *Пусть оператор $\mathscr{D} \in LB(l_p)$ перестановочен со всеми операторами $V(\gamma), \gamma \in \mathbb{T}$, и выполнено одно из условий:*

1) $p \in [1, \infty)$*;*

2) $p = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} \|\overline{V}(\psi_n)\mathscr{D} - \mathscr{D}\overline{V}(\psi_n)\| = 0$.

Тогда оператор $\mathscr{D}$ является оператором умножения на ограниченную функцию $\Phi : \mathbb{Z}_+ \to LB(X)$ (т. е. $(\mathscr{D}x)(n) = \Phi(n)x(n), n \in \mathbb{Z}_+$) и $\|\mathscr{D}\| = \|\Phi\|_\infty$.

Лемма 3.3. *Резольвента $R(\cdot; \mathscr{B}, S) : \rho(\mathscr{B}, S) \to LB(l_p)$ упорядоченной пары $(\mathscr{B}, S)$ обладает свойством*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\lambda \in K} \|\overline{V}(\psi_n)R(\lambda; \mathscr{B}, S) - R(\lambda; \mathscr{B}, S)\overline{V}(\psi_n)\| = 0, \tag{3.5}$$

где K — любой компакт из $\rho(\mathscr{B}, S)$.

Доказательство. Пусть $x \in D(S) = \{x \in l_p : x(0) \in E\}$. Тогда верны равенства

$$(((\mathscr{B} - \lambda S)\overline{V}(\psi_n) - \overline{V}(\psi_n)(\mathscr{B} - \lambda S))x)(k) = -\lambda(\psi_n(k+1) - \psi_n(k))(Sx)(k),$$

где $k \in \mathbb{Z}_+$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Если $\lambda \in \rho(\mathscr{B}, S)$, то последовательность x представим в виде $x = R(\lambda; \mathscr{B}, S)y$ для некоторой $y \in l_p$. Применяя к обоим частям этих равенств оператор $R(\lambda; \mathscr{B}, S)$, получим, что

$$\overline{V}(\psi_n)R(\lambda; \mathscr{B}, S) - R(\lambda; \mathscr{B}, S)\overline{V}(\psi_n) = \lambda R(\lambda; \mathscr{B}, S)(\psi_n - S(1)\psi_n)R(\lambda; \mathscr{B}, S),$$

где $S(1)\psi_n(k) = \psi_n(k+1)$, $k \geq 0$, $\lambda \in \rho(\mathscr{B}, S)$. Поскольку $\|S(1)\psi_n - \psi_n\|_\infty \leq \frac{1}{n}$, $n \geq 1$, из этих равенств следует свойство (3.5). Лемма доказана.

Одним из основных результатов статьи является

Теорема 3.1. *Для того чтобы задача (1.1), (1.2) имела единственное решение $x \in l_p(\mathbb{Z}_+, X)$ для любой последовательности $f \in l_p$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие два условия:*

1) $\sigma(B) \cap \mathbb{T} = \varnothing$*;*

2) $E = \operatorname{Ker} P_0$, *где* P_0 — *проектор Рисса, построенный по спектральному множеству* $\sigma_{\text{int}} = \{\lambda \in \sigma(B) : |\lambda| < 1\}$, *т. е.*

$$P_0 = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathbb{T}} R(\lambda, B)\, d\lambda. \tag{3.6}$$

Доказательство. Необходимость. Как отмечалось ранее, разрешимость задачи (1.1), (1.2) и единственность ее решения для любой $f \in l_p$ влекут обратимость оператора $-T = \mathscr{B} - S$, т. е. $1 \in \rho(\mathscr{B}, S)$. Тогда из леммы 3.1 следует, что для упорядоченной пары $(\mathscr{B}, S)$ выполнено условие (3.1). Отсюда следует представление

$$\tilde{\sigma}(\mathscr{B}, S) = \sigma_{\text{int}} \cup \sigma_{\text{out}}, \tag{3.7}$$

где $\sigma_{\text{int}} = \{\lambda \in \sigma(\mathscr{B}, S) : |\lambda| < 1\}, \sigma_{\text{out}} = \tilde{\sigma}(\mathscr{B}, S) \setminus \sigma_{\text{int}}$.

Рассмотрим линейное отношение (левое отношение для пары $(\mathscr{B}, S)$)

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_l = S^{-1}\mathscr{B} &= \{(x,y) \in l_p \times l_p : Bx(n) = y(n+1),\ n \geq 0,\ y(0) \in E\} \\ &= \{(x,y) \in l_p \times l_p : y(n) = Bx(n-1), n \geq 1, y(0) \in E\}.\end{aligned} \tag{3.8}$$

Согласно теореме 2.4 имеет место равенство

$$\tilde{\sigma}(\mathscr{A}_l) = \tilde{\sigma}(\mathscr{B}, S), \tag{3.9}$$

поэтому из (3.7) следует, что

$$\tilde{\sigma}(\mathscr{A}_l) = \sigma_{\text{int}} \cup \sigma_{\text{out}}, \quad \tilde{\sigma}(\mathscr{A}_l) \cap \mathbb{T} = \varnothing. \tag{3.10}$$

Таким образом, для отношения $\mathscr{A} = \mathscr{A}_l$ выполнено условие теоремы 2.3, где $\sigma_0 = \sigma_{\text{int}}$, $\sigma_1 = \sigma_{\text{out}}$ в представлении (2.1), причем $0 \notin \sigma_{\text{out}}$. Рассмотрим разложение (2.2), где $\mathscr{X} = l_p$, т. е.

$$l_p = \mathscr{X}_0 \oplus \mathscr{X}_1 \tag{3.11}$$

с отмеченными в теореме 2.3 свойствами. Это разложение осуществляет проектор $P_0 = \mathscr{P}_{\text{int}}$ (см. формулу (2.3)) вида

$$\mathscr{P}_{\text{int}} = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathbb{T}} R(\lambda, \mathscr{A}_l)\, d\lambda = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathbb{T}} (\mathscr{B} - \lambda S)^{-1} S\, d\lambda. \tag{3.12}$$

Из равенств (3.3) и (3.11) для произвольного $\gamma \in \mathbb{T}$ получаем

$$\begin{aligned}V(\gamma^{-1})\mathscr{P}_{\text{int}}V(\gamma) &= -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathbb{T}} V(\gamma^{-1}) R_l(\lambda; \mathscr{B}, S) V(\gamma)\, d\lambda \\ = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathbb{T}} V(\gamma^{-1})(\mathscr{B} - \lambda S)^{-1} S V(\gamma)\, d\lambda &= -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathbb{T}} \gamma(\mathscr{A}_l - \gamma\lambda I)^{-1}\, d\lambda = \mathscr{P}_{\text{int}}.\end{aligned}$$

Следовательно, оператор $\mathscr{P}_{\text{int}}$ перестановочен со всеми операторами $V(\gamma)$, $\gamma \in \mathbb{T}$. Если $p \in [1, \infty)$, то из леммы 3.2 следует, что проектор $\mathscr{P}_{\text{int}} \in LB(l_p)$ представим в виде

$$(\mathscr{P}_{\text{int}} x)(n) = P_{\text{int}}(n) x(n), \quad n \in \mathbb{Z}_+,\ x \in l_p, \tag{3.13}$$

где $P_{\text{int}} : \mathbb{Z}_+ \to LB(X)$ — ограниченная проекторнозначная функция.

Далее полагается $P_{\mathrm{out}}(n) = I - P_{\mathrm{int}}(n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Если $p = \infty$, то, снова используя лемму 3.2 (условие 2), рассмотрим последовательность операторов

$$\mathscr{P}_n = \overline{V}(\psi_n)\mathscr{P}_{\mathrm{int}} - \mathscr{P}_{\mathrm{int}}\overline{V}(\psi_n), \quad n \geq 1.$$

Тогда из леммы 3.3 (свойства (3.5)), представления (3.13) и соотношения

$$\lim_{n\to\infty}(\overline{V}(\psi_n)\mathscr{B} - \mathscr{B}\overline{V}(\psi_n)) = 0$$

получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty}\|\mathscr{P}_n\| = 0$. Поэтому из леммы 3.2 и в этом случае следует представление (3.13).

Теперь докажем, что функция P_{int} (а следовательно, и P_{out}) является постоянной функцией. Доказывая это свойство, будем использовать представление (3.8) отношения $\mathscr{A} = \mathscr{A}_l = S^{-1}\mathscr{B}$.

Еще раз обращаясь к теореме 2.3, рассмотрим сужения $\mathscr{A}_i = \mathscr{A}|\mathscr{X}_i$, $i = 0, 1$, отношения $\mathscr{A}$ на $\mathscr{X}_i$, $i = 0, 1$. Оператор $\mathscr{A}_0$ принадлежит алгебре $LB(\mathscr{X}_0)$, и $\sigma(\mathscr{A}_0) = \sigma_{\mathrm{int}}$. Поэтому его спектральный радиус $r(\mathscr{A}_0)$ меньше 1, а из (3.8) следует представление

$$(\mathscr{A}_0 x)(k) = \begin{cases} Bx(k-1), & k \geq 1, \\ 0, & k = 0, \ x \in \mathscr{X}_0 = \operatorname{Im}\mathscr{P}_{\mathrm{int}}, \end{cases}$$

значит,

$$\big(\mathscr{A}_0^n x\big)(k) = \begin{cases} B^n x(k-n), & k \geq n, \\ 0, & 0 \leq k \leq n-1, \ x \in \mathscr{X}_0. \end{cases} \tag{3.14}$$

Из условия $r(\mathscr{A}_0) < 1$, используя формулу Гельфанда для спектрального радиуса ограниченного оператора [6], получаем оценки

$$\sup_{y\in\mathscr{X}_{\mathrm{int}}(k),\,\|y\|\leq 1}\|B^n y\| \leq \big\|\mathscr{A}_0^n\big\|, \quad \lim_{n\to\infty}\big\|\mathscr{A}_0^n\big\|^{1/n} = r(\mathscr{A}_0) < 1, \tag{3.15}$$

где $\mathscr{X}_{\mathrm{int}}(k) = \operatorname{Im} P_{\mathrm{int}}(k)$, $k \geq 0$. Эти оценки следуют из (3.12) при подходяще выбранных последовательностях из $\mathscr{X}_0$.

Теперь рассмотрим подпространства $\mathscr{X}_{\mathrm{out}}(k) = \operatorname{Im} P_{\mathrm{out}}(k)$, $k \geq 0$. Из обратимости отношения $\mathscr{A}_1$, равенства $\mathscr{A}_1 0 = \mathscr{A} 0$ и представления (3.8) линейного отношения $\mathscr{A} = \mathscr{A}_l$ вытекает однозначная разрешимость уравнений

$$Bx(k-1) = y(k), \ k \geq 1, \quad x(0) = y(0) \in E = \operatorname{Im} P_{\mathrm{out}}(0), \tag{3.16}$$

где $x, y \in \mathscr{X}_1 = \operatorname{Im}\mathscr{P}_{\mathrm{out}}$. Поэтому оператор B осуществляет изоморфизм пространств $\mathscr{X}_{\mathrm{out}}(k-1)$, $\mathscr{X}_{\mathrm{out}}(k)$, $k \in \mathbb{N}$, причем $\operatorname{Im} P_{\mathrm{out}}(0) = E$. Следует еще отметить, что $\mathscr{A}0 = \mathscr{A}_1 0 = \{x \in l_p : x(0) \in E, \ x(k) = 0, \ k \geq 1\} = \operatorname{Ker} R(\lambda, \mathscr{A}) = \operatorname{Ker} R(\lambda, \mathscr{A}_1)$, $\lambda \in \rho(\mathscr{A})$ (см. теорему 2.3 и представление (3.8) для $\mathscr{A} = \mathscr{A}_l, D(\mathscr{A}) = \mathscr{X}_0 \oplus D(\mathscr{A}_1)$).

Из всего отмеченного и оценки $r\big(\mathscr{A}_1^{-1}\big) < 1$ следует, что

$$X_0 = X_{\mathrm{int}}(0) = \{x \in X : \|B^k x\| \leq M_1 q^k \|x\|, \ k \geq 0\}, \tag{3.17}$$

$$X_{\mathrm{out}}(0) = E = X^{(0)} \subset \{y \in X : \|B^k y\| \geq M_2 q^{-k}\|y\|, \ k \geq 0\}, \tag{3.18}$$

где $M_1, M_2 \geq 1$, $q \in (0, 1)$ — некоторые постоянные. Из (3.17), (3.18) вытекает, что подпространства X_0 и $X^{(0)}$ являются инвариантными для оператора B, причем $r(B|X_0) \leq q$, $r((B|X^{(0)})^{-1}) < 1$. Следовательно, $\sigma(B) \cap \mathbb{T} = \varnothing$.

Достаточность. Пусть теперь выполнены условия 1 и 2. Докажем непрерывную обратимость отношения $\mathscr{D} = I - \mathscr{A} = I - \mathscr{A}_l = I - S^{-1}\mathscr{B}$, и тем самым будет доказана обратимость оператора $T = S - B$ (см. теорему 2.4).

Через P_1 обозначим проектор $I - P_0 \in LB(X)$, и пусть $X_0 = \operatorname{Im} P_0$, $X_1 = \operatorname{Im} P_1$, $B_k = B|X_k$, $k = 0, 1$, — сужение оператора B на X_k.

Непосредственно из представления (3.8) отношения $\mathscr{A} = \mathscr{A}_l$ следует, что отношение $\mathscr{D} \in LR(l_p)$ определяется равенством

$$\mathscr{D} = \{(x, y) \in l_p \times l_p : y(n) = x(n) - Bx(n-1),\ n \geq 1,\ y(0) = x(0) - x_0,\ \text{где } x_0 \in E\}. \tag{3.19}$$

Из этого представления вытекает, что $\operatorname{Ker} \mathscr{D}$ отношения $\mathscr{D}$ представимо в виде

$$\operatorname{Ker} \mathscr{D} = \{x \in l_p : x(n) = B^n x(0),\ x(0) \in E\}.$$

Если $x \in \operatorname{Ker} \mathscr{D}$, то последовательность x может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} x(n) = B^n x(0) &= P_0 B^n x(0) + P_1 B^n x(0) = B^n P_0 x(0) + B^n P_1 x(0) \\ &= B^n P_0 P_1 x(0) + B^n P_1 x(0) = B^n P_1 x_0, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \end{aligned}$$

где использовалось условие $x(0) \in E = \operatorname{Im} P_1$. Поскольку $B_1 = B|X_1$ — непрерывно обратимый оператор и $r\big(B_1^{-1}\big) < 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \|B^n P_1 x(0)\| = \infty$. Действительно, это следует из равенства $\|P_1 x(0)\| = \big\|B_1^{-n} B^n P_1 x(0)\big\|$, $n \geq 1$. Следовательно, $x(0) = 0$, т. е. $x = 0$. Итак, $\operatorname{Ker} \mathscr{D} = \{0\}$.

Для доказательства обратимости отношения $\mathscr{D} = I - \mathscr{A}$ осталось установить его сюръективность. Для этого рассмотрим оператор $C \in LB(l_p)$ вида

$$(Cy)(n) = \sum_{m=0}^{\infty} G(n-m) y(m), \tag{3.20}$$

где функция $G : \mathbb{Z} \to LB(X)$ имеет вид

$$G(k) = \begin{cases} B^k P_0, & k \geq 0, \\ -B^k P_1, & k < 0, \end{cases} \tag{3.21}$$

здесь $-B^k P_1$, $k < 0$, — оператор, обращающийся в нуль на $\operatorname{Im} P_0 = X_0$ и равный оператору $-B_1^k$ на $X_1 = \operatorname{Im} P_1$.

Из формул (3.20), (3.21) следует, что для любой $f \in l_p$ и для $y = Cf$ верны равенства

$$\begin{aligned} y(0) = \sum_{m=0}^{\infty} G(-m) f(m) &= P_0 f(0) - \sum_{m=1}^{\infty} (B^m P_1 f(m)) \\ &= f(0) - P_1 \left(\sum_{m=0}^{\infty} B^m P_1 f(m) \right) = f(0) + x_0, \end{aligned}$$

где $x_0 \in \operatorname{Im} P_1 = E$. Значит, Cf принадлежит области определения отношения $\mathscr{D}$.

Пусть теперь $n \in \mathbb{N}$. Тогда справедливы равенства

$$\begin{aligned} &y(n) - By(n-1) = \sum_{m=0}^{n} B^{n-m} P_0 f(m) - \sum_{m=n+1}^{\infty} B^{n-m} P_1 f(m) \\ &- B \sum_{m=0}^{n-1} B^{n-m-1} P_0 f(m) + B \sum_{m=n}^{\infty} B^{n-m-1} P_1 f(m) = P_0 f(n) + P_1 f(n) = f(n). \end{aligned}$$

Таким образом, $(y, f) \in \mathscr{D}$, что означает сюръективность отношения $\mathscr{D}$. Теорема доказана.

Следствие 3.1. *Пусть $E = \{0\}$. Для того чтобы задача (1.1), (1.2) имела единственное решение для любой последовательности $f \in l_p(\mathbb{Z}_+, X)$, необходимо и достаточно, чтобы $r(B) < 1$.*

Следствие 3.2. *Пусть $E = X$. Для того чтобы задача (1.1), (1.2) имела единственное решение для любой последовательности $f \in l_p(\mathbb{Z}_+, X)$, необходимо и достаточно, чтобы оператор B был непрерывно обратим и $r(B^{-1}) < 1$ (что эквивалентно условию $\sigma(B) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\} = \varnothing$).*

Замечание 1. Следствие 3.1 в частном случае вытекает также из теоремы 4 работы [7].

Непосредственно из доказательства теоремы 3.1 (ее заключительной части) следует

Теорема 3.2. *Пусть $\sigma(B) \cap \mathbb{T} = \varnothing$ и $\operatorname{Ker} P_0 = E$ для проектора Рисса P_0, определенного формулой (3.6). Тогда задача (1.1), (1.2) имеет единственное решение $x \in l_p(\mathbb{Z}_+, X)$ для любой последовательности $f \in l_p(\mathbb{Z}_+, X)$ (оператор T непрерывно обратим) и оно представимо в виде*

$$x(n) = (-T^{-1}f)(n) = \sum_{m=0}^{\infty} G(n-m-1)f(m), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{3.22}$$

где функция $G : \mathbb{Z} \to LB(X)$ определена равенствами (3.21).

Доказательство. Из теоремы 3.1 следует непрерывная обратимость оператора T. Принадлежность $x(0)$, где $x \in l_p$ определена формулой (3.22), подпространству E была установлена при доказательстве теоремы 3.1. Так же проверяется, что эта последовательность x удовлетворяет равенствам (1.1). Теорема доказана.

§ 4. Линейные дифференциальные уравнения и разностные уравнения

Пусть $A : D(A) \subset X \to X$ — инфинитезимальный оператор [6] сильно непрерывной полугруппы операторов $T : [0, \infty) \to LB(X)$ класса C_0. В банаховом пространстве $L_p = L_p(\mathbb{R}_+, X)$, $p \in [1, \infty]$, измеримых по Бохнеру и суммируемых со степенью p (существенно ограниченных при $p = \infty$) функций с нормой

$$\|x\|_p = \left(\int_0^\infty \|x(t)\|^p \, dt \right)^{1/p}$$

при $p \in [1, \infty)$ ($\|x\|_\infty = \operatorname*{vrai\,sup}_{t \geq 0} \|x(t)\|$ при $p = \infty$) рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f(t), \quad t \geq 0, \ f \in L_p. \tag{4.1}$$

Обобщенным решением уравнения (4.1) будем называть непрерывную функцию $x : \mathbb{R}_+ \to X$, принадлежащую L_p, для которой имеет место равенство

$$x(t) = T(t)x(0) + \int_0^t T(t-\tau)f(\tau)\, d\tau, \quad t \geq 0. \tag{4.2}$$

Пусть E — замкнутое подпространство из X. Будем искать обобщенное решение уравнения (4.1), удовлетворяющее условию

$$x(0) \in E. \tag{4.3}$$

Исследование задачи (4.1), (4.3) естественно проводить, привлекая дифференциальный оператор

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_E = \frac{d}{dt} - A : D(\mathscr{L}) \subset L_p \to L_p = L_p(\mathbb{R}_+, X), \tag{4.4}$$

область определения $D(\mathscr{L})$ которого задается следующим образом. Непрерывную функцию $x \in L_p$ отнесем к $D(\mathscr{L})$, если существует функция $f \in L_p$ такая, что для этих функций выполняется равенство (4.2). Нетрудно видеть, что такая функция f единственна. Положим $\mathscr{L}x = f$.

Непосредственно из определения оператора $\mathscr{L}$ следует, что задача (4.1), (4.3) имеет единственное решение x для любой $f \in L_p$ тогда и только тогда, когда $\mathscr{L}$ — непрерывно обратимый оператор.

Наряду с оператором $\mathscr{L}$ рассмотрим разностный оператор

$$\mathscr{D} : D(\mathscr{D}) \subset l_p \to l_p = l_p(\mathbb{Z}_+, X)$$

вида

$$(\mathscr{D}x)(n) = x(n+1) - T(1)x(n), \quad x \in l_p,\ n \in \mathbb{Z}_+,$$

с областью определения $D(\mathscr{D}) = \{x \in l_p : x(0) \in E\}$. Именно такого вида оператор исследовался в § 3. Используемая здесь техника доказательства применялась в статье [8] для дифференциальных операторов на всей оси. Из определения операторов $\mathscr{L}$ и $\mathscr{D}$ вытекает, что их ядра имеют вид

$$\operatorname{Ker} \mathscr{D} = \{x \in l_p : x(n) = T(n)x_0,\ n \in \mathbb{Z}_+,\ x_0 \in E\},$$

$$\operatorname{Ker} \mathscr{L} = \{y \in L_p : y(t) = T(t)x_0,\ t \in \mathbb{R}_+,\ x_0 \in E\}.$$

Из вида этих подпространств следует

Лемма 4.1. *Оператор $\mathscr{D}$ инъективен тогда и только тогда, когда инъективен оператор $\mathscr{L}$.*

Лемма 4.2. *Если один из операторов $\mathscr{L}$, $\mathscr{D}$ сюръективен, то сюръективен и второй.*

Доказательство. Рассмотрим линейный оператор

$$\mathscr{I} : D(\mathscr{L}) \subset L_p \to l_p, \quad (\mathscr{I}x)(n) = x(n),\ n \in \mathbb{Z}_+,$$

и докажем, что он корректно определен, т. е. последовательность $\mathscr{I}x$ принадлежит l_p. Например, если $p = \infty$, то для пары $(x, f) \in L_\infty \times L_\infty$, для которой $\mathscr{L}x = f$, верны равенства (4.2) и, значит,

$$x(t) = T(t-s)x(s) + \int_s^t T(t-\tau)f(\tau)\,d\tau, \quad 0 \le s \le t < \infty. \tag{4.5}$$

Отсюда получаем, что

$$\|x(t)\| \le \sup_{0 \le n \le 1} \|T(n)\|\,\|x(s)\| + \int_s^t \|T(t-\tau)\|\,\|f(\tau)\|\,d\tau \tag{4.6}$$

для всех $0 \le t - s \le 1$. Из этих оценок вытекает, что $\mathscr{I}x \in l_\infty$. Аналогичным образом выводится, что $\mathscr{I}x \in l_p$, если $f \in L_p$.

Наряду с оператором $\mathscr{I}$ введем в рассмотрение операторы $C_1 : l_p \to L_p$, $C_2 : L_p \to l_p$, определяемые равенствами

$$(C_1 x)(t) = \varphi(t)T(t-n)x(n), \quad t \in [n, n+1],\ x \in l_p,$$

$$(C_2 y)(n) = \int\limits_n^{n+1} T(n+1-\tau)y(\tau)\,d\tau, \quad n \in \mathbb{Z}_+,\ y \in L_p,$$

где $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — непрерывная периодическая периода 1 функция, для которой $\varphi(t) = 6t(1-t)$, $t \in [0,1]$. Из ограниченности полугруппы T на отрезке [0,1] следует ограниченность операторов C_1, C_2.

Все три введенные в рассмотрение операторы играют вспомогательную роль в доказательстве сюръективности операторов $\mathscr{D}$ и $\mathscr{L}$ при условии сюръективности одного из них.

Пусть сюръективен оператор $\mathscr{L}$. Возьмем произвольную последовательность $f \in l_p$, и $g = C_1\tilde{f} \in L_p$, $\tilde{f}(0) = 0$ и $\tilde{f}(n) = f(n-1)$, $n \geq 1$. Докажем, что $f \in \operatorname{Im}\mathscr{D}$. Из условия $g \in \operatorname{Im}\mathscr{L} = L_p$ следует существование функции $x \in D(\mathscr{L})$ такой, что $\mathscr{L}x = g$. Поэтому верны равенства (см. (4.5))

$$x(t) = T(t-s)x(s) + \int\limits_s^t T(t-\tau)(C_1\tilde{f})(\tau)\,d\tau, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

из которых при $t = n+1$ и $s = n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, получаем

$$x(n+1) = T(1)x(n) + \int\limits_n^{n+1} T(n+1-\tau)\varphi(\tau)T(\tau-n)f(n)\,d\tau$$
$$= T(1)(x(n) + \tilde{f}(n)), \quad n \geq 0.$$

Поскольку $x(0) \in E$ (ввиду принадлежности x области определения $D(\mathscr{L})$ оператора $\mathscr{L}$), то $x \in D(\mathscr{D})$ и $\mathscr{D}x = f$. Таким образом, $\operatorname{Im}\mathscr{D} = l_p$.

Пусть теперь сюръективен оператор $\mathscr{D}$ и f — произвольная функция из L_p. Согласно сюръективности оператора $\mathscr{D}$ существует последовательность $x_0 \in l_p$ такая, что $\mathscr{D}x_0 = C_2 f$. Следовательно, верны равенства

$$x_0(n+1) - T(1)x_0(n) = \int\limits_n^{n+1} T(n+1-\tau)f(\tau)\,d\tau, \quad n \geq 0, \tag{4.7}$$

и, кроме того, $x_0(0) \in E$. Определим функцию $x : \mathbb{R}_+ \to X$ с помощью равенств

$$x(t) = T(t)x_0(n) + \int\limits_n^{n+1} T(t-\tau)f(\tau)\,d\tau, \quad t \in [n, n+1],\ n \in \mathbb{Z}_+. \tag{4.8}$$

Из соотношений (4.7) следует непрерывность этой функции x. Из конечности величины $\sup\limits_{0\leq t\leq 1} \|T(t)\|$ и принадлежности последовательности x_0 пространству l_p и функции f пространству L_p следует, что $x \in L_p$. Из равенств (4.7), (4.8) вытекает, что x и f удовлетворяют равенствам (4.2), т. е. $x \in D(\mathscr{L})$ и $\mathscr{L}x = f$. Стало быть, оператор $\mathscr{L}$ сюръективен. Лемма доказана.

Теорема 4.1. *Следующие условия эквивалентны:*

(1) $\mathscr{L} : D(\mathscr{L}) \subset L_p \to L_p$, $p \in [1, \infty]$, *— непрерывно обратимый оператор;*

(2) $\mathscr{D} : D(\mathscr{D}) \subset l_p \to l_p$ *— непрерывно обратимый оператор;*

(3) $\sigma(T(1)) \cap \mathbb{T} = \varnothing$, $\operatorname{Ker} P_0 = E$, *где* P_0 *— проектор Рисса для оператора* $T(1)$, *построенный по спектральной компоненте* $\sigma_{\text{int}} = \{\lambda \in \sigma(T(1)) : |\lambda| < 1\}$.

Если выполнено одно из условий теоремы, то обратный к $\mathscr{L}$ оператор имеет вид

$$(\mathscr{L}^{-1} f)(t) = \int\limits_0^\infty G(t-s) f(s)\, ds, \quad f \in L_p(\mathbb{R}_+, X), \tag{4.9}$$

где

$$G(\tau) = \begin{cases} T(\tau) P_0, & \tau \geq 0, \\ -T(\tau) P_1, & \tau < 0,\ P_1 = I - P_0. \end{cases} \tag{4.10}$$

Оператор $T(\tau)P_1$, $\tau < 0$, однозначно определяется равенствами

$$\begin{gathered} T(\tau) P_1 x = 0, \quad x \in \operatorname{Im} P_0, \\ (T(\tau)P_1) T(-\tau) = T(-\tau)(T(\tau)P_1) = P_1, \quad \tau < 0, \end{gathered} \tag{4.11}$$

и функция (Грина) G допускает оценку

$$\|G(\tau)\| \leq M e^{-\gamma\tau}, \quad \tau \geq 0, \tag{4.12}$$

для некоторых $M \geq 1$, $\gamma > 0$.

Доказательство. Импликация (1) $\Rightarrow$ (2) следует из лемм 4.1, 4.2 и теоремы Банаха о замкнутом графике (оператор $\mathscr{D}$ замкнут).

Эквивалентность свойств (2) и (3) доказана в теореме 3.1.

Докажем импликацию (3) $\Rightarrow$ (1). Выполнение условия (3) влечет разложение пространства X вида $X = X_0 \oplus X_1$, где $X_0 = \operatorname{Im} P_0$, $X_1 = \operatorname{Im} P_1 = \operatorname{Ker} P_0$. Проектор Рисса P_0 перестановочен с операторами $T(t)$, $t \geq 0$, и поэтому подпространства X_0, X_1 инвариантны для операторов полугруппы T. Таким образом,

$$T(t) = T_{\text{int}}(t) \oplus T_{\text{out}}(t), \quad t \geq 0,$$

где $T_{\text{int}}(t) = T(t)|X_0$, $T_{\text{out}}(t) = T(t)|X_1$, $t \geq 0$. Ввиду оценок $r(T(1)|X_0) < 1$, $r((T(1)|X_1)^{-1}) < 1$ получаем, что полугруппа $T_{\text{int}} : \mathbb{R} \to LB(X_0)$ экспоненциально убывает, операторы $T_{\text{out}}(t)$, $t > 0$, непрерывно обратимы и $(T_{\text{out}}(t))^{-1}$, $t \geq 0$, также экспоненциально убывающая функция. Из всего сказанного следует корректная определенность функции G (см. равенства (4.10) и соотношения (4.11)), а также верна оценка (4.12).

Осталось доказать, что формула (4.9) определяет непрерывно обратный к $\mathscr{L}$. Поскольку $\mathscr{L}$ инъективен (это следует из инъективности $\mathscr{D}$ и леммы 4.1), верно равенство

$$\int\limits_0^\infty G(-s) f(s) ds = -\int\limits_0^\infty T(-s) P_1 f(s) ds \in \operatorname{Im} P_1 = E$$

и, значит, $(\mathscr{L}^{-1} f)(0) \in E$ для любой $f \in L_p$, то осталось проверить, что для любой $f \in L_p$ пара функций (x, f), где $x(t) = \int\limits_0^\infty G(t-s) f(s) ds$, удовлетворяет равенствам (4.2).

Из цепочки равенств

$$
\begin{aligned}
T(t)x(0) &+ \int_0^t T(t-\tau)f(\tau)\,d\tau \\
&= -T(t)\int_0^t T(-\tau)P_1 f(\tau)\,d\tau + \int_0^t T(t-\tau)(P_0+P_1)f(\tau)\,d\tau \\
&= -\int_0^t T(t-\tau)P_1 f(\tau)\,d\tau + \int_0^t T(t-\tau)P_0 f(\tau)\,d\tau = x(t), \quad t \ge 0,
\end{aligned}
$$

вытекает справедливость (4.9). Теорема доказана.

Если $E = \{0\}$ или $E = X$ и $A \in LB(X)$, то задача (4.1), (4.3) изучалась в известных монографиях [9, 10]. Тем не менее полного аналога теоремы 4.1 даже для $A \in LB(X)$ там не было получено. Постановка и решение задачи об обратимости оператора $\mathscr{L}$ в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$ для произвольного подпространства E из конечномерного пространства $\mathbb{C}^n$, $A \in LB(\mathbb{C}^n)$, изложенные в монографии [11], связаны с совершенно другими методами, не применимыми для бесконечномерного пространства X.

Отметим еще два вытекающих из теоремы 4.1 (см. также [12, 13]) результата.

Теорема 4.2. *Пусть $E = \{0\}$ и $\mathscr{L} = \mathscr{L}_{\{0\}} = -\frac{d}{dt} + A$ — дифференциальный оператор, отвечающий этому пространству. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *$\mathscr{L} = \mathscr{L}_{\{0\}} : D(\mathscr{L}) \subset L_p \to L_p = L_p(\mathbb{R}_+, X)$ — непрерывно обратимый оператор;*

(2) *$\mathscr{D} : D(\mathscr{D}) \subset l_p \to l_p$ ($D(\mathscr{L})$ определяется по $E = \{0\}$) — непрерывно обратимый оператор;*

(3) *$r(T(1)) < 1$.*

Если выполнено условие (3), то обратимый к $\mathscr{L}$ оператор определяется формулой

$$
(\mathscr{L}^{-1}f)(t) = \int_0^t T(t-\tau)f(\tau)\,d\tau, \quad f \in L_p,\ t \ge 0. \tag{4.13}
$$

При выполнении условия $\sigma(T(1)) \cap \mathbb{T} = \varnothing$ интегральный оператор, определенный формулой (4.13), является левым обратным для оператора $\mathscr{L}$.

В следующей теореме операторы $\mathscr{L} = \mathscr{L}_E$ и $\mathscr{D} = \mathscr{D}_E$ строятся по подпространству E, совпадающему с X.

Теорема 4.3. *Следующие условия эквивалентны:*

(1) *$\mathscr{L} : D(\mathscr{L}) \subset L_p \to L_p$ — непрерывно обратимый оператор;*

(2) *$\mathscr{D} : D(\mathscr{D}) \subset l_p \to l_p$ — непрерывно обратимый оператор;*

(3) *$T(1)$ — непрерывно обратимый оператор и $r(T(1)^{-1}) < 1$.*

Если выполнено условие (3), то

$$
(\mathscr{L}^{-1}f)(t) = -\int_t^\infty T(t-\tau)f(\tau)\,d\tau, \quad f \in L_p,\ t \ge 0. \tag{4.14}
$$

Если выполнено условие $\sigma(T(1)) \cap \mathbb{T} = \varnothing$, то оператор (4.14) *является правым обратным к $\mathscr{L}$ и, в частности, $\mathscr{L}$ сюръективен.*

Следует отметить, что условие $\sigma(A) \cap (i\mathbb{R}) = \varnothing$ не всегда влечет условие $\sigma(T(1)) \cap \mathbb{T} = \varnothing$ (из-за отсутствия теоремы об отображении спектра, т. е. равенство $\sigma(T(1)) \setminus \{0\} = \{e^{\lambda} : \lambda \in \sigma(A)\}$ не всегда имеет место). Однако если A является секториальным оператором [14], то условие $\sigma(T) \cap \mathbb{T}$ может быть заменено более легко проверяемым условием $\sigma(A) \cap (i\mathbb{R}) = \varnothing$.

Теорема 4.4. *Если оператор $\mathscr{L}$ обратим в одном из пространств $L_p(\mathbb{R}_+, X)$, $p \in [1, \infty)$, то он обратим во всех остальных.*

Утверждение теоремы непосредственно следует из теоремы 4.1.

Замечание 2. Дифференциальный оператор (4.4) порождается полугруппой операторов и, следовательно, семейством эволюционных операторов «вперед». Случай, когда оператор (4.4) порождается семейством эволюционных операторов «назад», рассмотрен в [13] (а значит, не сводится к нашему случаю).

В заключение отметим, что аналогичные с § 4 результаты имеют место для дифференциальных включений (теорема единственности для них получена в [15]). При их исследовании используются соответствующие разностные отношения. Вопросы разрешимости разностных отношений в банаховом пространстве $l_p(\mathbb{Z}_+, X)$ для $E = X$ изучались в статье [16].

§ 5. Об оценках решений

Естественным образом возникает вопрос об оценках решений разностного уравнения (1.1), удовлетворяющих условию (1.2), в случае, если выполнены оба условия теоремы 3.1. В силу теоремы 3.2 решение задачи (1.1), (1.2) определяется формулой (3.22). Далее через $\|x\|_p$ будет обозначаться норма последовательности x из $l_p = l_p(\mathbb{Z}_+, X)$, $p \in [1, \infty]$. Индекс p иногда будет приписываться к норме оператора, действующего в l_p. Из формулы (3.22) получаем оценки x решения разностного уравнения (1.1) вида

$$\|x\|_p \le \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left\| \sum_{m=0}^{\infty} G(n-m-1) f(m) \right\|^p \right)^{1/p}$$
$$\le \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=n-1}^{\infty} (\|G(k)\| \|f(n-k-1)\|)^p \right)^{1/p} \le \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \|G(k)\| \right) \|f\|_p.$$

Аналогичное неравенство верно и для $p = \infty$. Таким образом,

$$\|T^{-1}\|_p \le \sum_{k=-\infty}^{\infty} \|G(k)\|. \tag{5.1}$$

Из этой оценки, не зависящей от выбора пространства последовательностей, вытекает необходимость получения оценок величин $\|G(k)\|$, $k \in \mathbb{Z}$. В частности, если $E = \{0\}$, то из следствия 3.1 получим, что $P_0 = I$. Следовательно, возникает проблема получения оценок норм степеней B^k, $k \ge 0$, оператора B, для которого $r(B) < 1$.

В случае произвольного банахова пространства X для получения оценок норм операторов $G(k)$, $k \in \mathbb{Z}$, будем использовать числовую характеристику

$$\alpha(r; B) = \sup_{|\lambda| = r} \|R(\lambda, B)\|, \quad r_{\text{int}} < r < r_{\text{out}},$$

где $r_{\text{int}} = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_{\text{int}}\}$, $r_{\text{out}} = \min\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_{\text{out}}\}$.

При $r \in (r_{\text{int}}, 1)$ для $\alpha(1; B)$ будет использоваться обозначение $\alpha(B)$.

Если $r \in (r_{\text{int}}, 1)$, то проектор Рисса P_0, построенный по спектральному множеству σ_{int}, определяется формулой

$$P_0 = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathbb{T}(r)} R(\lambda, B)\, d\lambda,$$

где интеграл вычисляется по окружности $\mathbb{T}(r) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = r\}$, ориентированной в положительном направлении. Если $r = 1$, то окружность $\mathbb{T} = \mathbb{T}(1)$ далее рассматривается в качестве компактной абелевой группы.

Из обычных свойств функционального исчисления операторов [5] получаем, что имеют место следующие равенства:

$$G(k) = B^k P_0 = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathbb{T}(r)} \lambda^k R(\lambda, B)\, d\lambda, \quad k \geq 0, \tag{5.2}$$

$$G(k) = -B^k P_1 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathbb{T}(\rho)} \lambda^k R(\lambda, B)\, d\lambda, \quad k < 0, \tag{5.3}$$

где ρ — любое число из интервала $(1, r_{\text{out}})$, а $r \in (r_{\text{int}}, 1)$.

Очевидны следующие вытекающие из (5.2) и (5.3) оценки:

$$\|G(k)\| \leq \frac{1}{2\pi} r^k \alpha(r; B), \ k \geq 0, \quad \|G(k)\| \leq \frac{1}{2\pi} \rho^k \alpha(\rho; B), \ k < 0.$$

Тем самым верна

Лемма 5.1. *Имеет место оценка*

$$\|T^{-1}\|_p \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \|G(k)\| \leq \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\alpha(r; B)}{1 - r} + \frac{\rho \alpha(r; B)}{\rho - 1} \right) \tag{5.4}$$

для любых $r \in (r_{\text{int}}, 1)$, $\rho \in (1, r_{\text{out}})$, $\rho \in [1, \infty]$.

Отметим, что в случае пустоты одного из множеств σ_{int}, σ_{out} в оценке (5.4) будет отсутствовать соответствующее слагаемое. Полученная оценка верна для нормы оператора $(-T)^{-1}$ в любом из пространств $l_p(\mathbb{Z}_+, X)$, $p \in [1, \infty]$. Она может послужить основой для получения более тонких оценок (например, в духе идей работ [17–19]).

Далее всюду будем считать, что X — гильбертово пространство, и пусть $p = 2$, т. е. оператор $(-T)^{-1}$ действует в гильбертовом пространстве $l_2(\mathbb{Z}_+, X)$ и является дискретным оператором Винера — Хопфа. Он представим в виде

$$(-T)^{-1} = \mathscr{P}\mathscr{A} : l_2(\mathbb{Z}_+, X) \to l_2(\mathbb{Z}_+, X),$$

где $\mathscr{P} : l_2(\mathbb{Z}, X) \to l_2(\mathbb{Z}, X)$ — оператор ортогонального проектирования на $l_2(\mathbb{Z}_+, X)$, рассматриваемого в качестве подпространства из $l_2(\mathbb{Z}, X)$ (при каноническом вложении $l_2(\mathbb{Z}_+, X)$ в $l_2(\mathbb{Z}, X)$), а оператор $\mathscr{A} : l_2(\mathbb{Z}, X) \to l_2(\mathbb{Z}, X)$ есть оператор свертки с функцией $G : \mathbb{Z} \to LB(X)$, $G_1(n) = G(n-1)$, $n \in \mathbb{Z}$, т. е. имеет вид

$$(\mathscr{A}x)(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} G(n - k - 1) x(k), \quad n \in \mathbb{Z}, \ x \in l_2(\mathbb{Z}, X).$$

Поэтому $\|T^{-1}\|_2 \le \|\mathscr{P}\|_2\|\mathscr{A}\|_2 = \|\mathscr{A}\|_2$.

В свою очередь, используя преобразование Фурье последовательностей из $l_2(\mathbb{Z}, X)$ и равенство Парсеваля, а также учитывая, что преобразование Фурье $\widehat{G}_1 : \mathbb{T} \to LB(X)$ функции G_1 имеет вид

$$\widehat{G}_1(\gamma) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} G(n)\gamma^{-k+1} = \gamma\widehat{G}(\gamma) = \gamma R(i\gamma, B), \quad \gamma \in \mathbb{T},$$

получаем равенство

$$\widehat{\mathscr{A}x}(\gamma) = \gamma R(\gamma, B)\hat{x}(\gamma), \quad \gamma \in \mathbb{T},\ x \in l_2(\mathbb{Z}, X).$$

Следовательно,

$$\|T^{-1}\|_2 \le \|\mathscr{A}\|_2 = \sup_{\gamma\in\mathbb{T}} \|R(\gamma, B)\| = \alpha(B). \tag{5.5}$$

Наряду с величинами $\alpha(r, B)$, $r_{\rm int} < r < r_{\rm out}$, введем в рассмотрение величины $\|H_r(B)\|$, $r \in (r_{\rm int}, r_{\rm out})$, где оператор $H_r(B) \in LB(X)$ имеет вид

$$H_r(B) = \frac{1}{i2\pi r}\int\limits_{\mathbb{T}(r)} R(\bar{\lambda}, B^*)R(\lambda, B)\, d\lambda.$$

Числовая характеристика $\|H_r(B)\|$ введена в монографии [17, гл. 9], в которой для определения величины $\|H_r(B)\|$ использовался дополнительный числовой множитель $\|B\|$, и там же получены оценки

$$\frac{\alpha(B)^2}{1 + \pi r\alpha(B)^2} \le \|H_r(B)\| \le \alpha(B)^2, \quad r_{\rm int} < r < r_{\rm out}. \tag{5.6}$$

Непосредственно из оценок (5.5), (5.6) и теоремы 6 статьи [1] получаем, что имеет место

Теорема 5.1. *Пусть $\sigma(B) \cap \mathbb{T} = \varnothing$. Тогда верны оценки*

$$\|G(0)\| = \|P_0\| \le \alpha(B), \quad \|G(k)\| \le \alpha(B),\ k \in \mathbb{Z}; \tag{5.7}$$

$$\|G(k)\| = \|B^k P_0\| \le 2\alpha(B)\left(1 + \frac{1}{2\alpha(B)}\right)^{1-k}, \quad k > 0; \tag{5.8}$$

$$\|G(k)\| = \|B^{-k} P_1\| \le 2\alpha(B)\left(1 - \frac{1}{2\alpha(B)}\right)^{1-k}, \quad k < 0, \tag{5.9}$$

если $\alpha(B) \ge 1$;

$$P_0 = 0, \quad G(k) = 0,\ k \ge 0,\ \text{если } \alpha(B) < 1; \tag{5.10}$$

$$\|T^{-1}\|_p \le 8\alpha(B)^2 - \alpha(B) + 1 \tag{5.11}$$

для любого $p \in [1, \infty]$.

Отметим, что важная для нас оценка (5.11) непосредственно следует из оценок (5.7)–(5.9), (5.1) и равенств (5.10).

Используя оценки (5.6), можно осуществить пересчет полученных в теореме (5.1) оценок величин $\|G(k)\|$, $k \in \mathbb{Z}$, через величину $\|H_1\|_2$. Важно также отметить, что при оценке этих величин и $\|T^{-1}\|_p$ не использовалась величина $\|B\|$.

В заключение отметим, что в работах [17–19] получены оценки параметров экспоненциальной дихотомии спектра матриц. С учетом матричного уравнения Ляпунова вводится интегральный критерий качества дихотомии (аналог величин $\|H_r(B)\|$) и в его терминах получены оценки операторных экспонент и функции Грина, построенной по матрице.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Баскаков А. Г., Пастухов А. И.* Спектральный анализ оператора взвешенного сдвига с неограниченными операторными коэффициентами // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 6. С. 1231–1243.
2. *Cross R.* Multivalued linear operators. New York: M. Dekker, 1998.
3. *Favini A., Yagi A.* Degenerate differential equations in Banach spaces. New York: M. Dekker, 1998.
4. *Баскаков А. Г., Чернышов К. И.* Спектральная теория линейных отношений и вырожденные полугруппы операторов // Мат. сб. 2002. Т. 193, № 11. С. 3–42.
5. *Иосида К.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1967.
6. *Хилле Е., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
7. *Баскаков А. Г.* Об обратимости линейных разностных операторов с постоянными коэффициентами // Изв. вузов. Математика. 2001. № 5. С. 3–11.
8. *Баскаков А. Г.* Полугруппы разностных операторов в спектральном анализе линейных дифференциальных операторов // Функцион. анализ и его приложения. 1996. Т. 30, № 3. С. 1–11.
9. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.
10. *Массера Х., Шеффер Х.* Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства. М.: Мир, 1970.
11. *Goldberg I., Goldberg S., Kaashoek M. A.* Classes of linear operators. Basel; Boston; Berlin: Birkhäuser Verl., 1990. V. 1.
12. *Баскаков А. Г.* Линейные дифференциальные операторы с неограниченными операторными коэффициентами и полугруппы разностных операторов // Мат. заметки. 1996. Т. 59, № 6. С. 811–820.
13. *Баскаков А. Г.* Спектральный анализ линейных дифференциальных операторов и полугруппы разностных операторов. I // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33, № 10. С. 1299–1306.
14. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. М.: Мир, 1985.
15. *Бичегкуев М. С.* Об ослабленной задаче Коши для линейного дифференциального включения // Мат. заметки. 2006. Т. 79, № 4. С. 483–487.
16. *Бичегкуев М. С.* Условия разрешимости разностных включений // Изв. РАН. Сер. мат. 2008. Т. 72, № 4. С. 25–36.
17. *Годунов С. К.* Современные аспекты линейной алгебры. Новосибирск: Научная книга, 1997.
18. *Годунов С. К., Нечепуренко Ю. М.* Оценки для главной и жесткой компонент на основе интегрального критерия качества дихотомии // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2000. Т. 40, № 1. С. 35–42.
19. *Булгаков А. Я.* Обоснование гарантированной точности выделения инвариантных подпространств несамосопряженных матриц // Тр. Ин-та математики СО АН СССР. 1989. Т. 15. С. 12–92.

Статья поступила 16 января 2009 г.

Бичегкуев Маирбек Сулейманович
Северо-Осетинский гос. университет им. К. Л. Хетагурова,
ул. Ватутина, 46, Владикавказ 362025, РСО-Алания
bichegkuev@yandex.ru