Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2010. Том 51, № 3

УДК 512.540+510.5

Σ–ОГРАНИЧЕННЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И УНИВЕРСАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ. II

А. Н. Хисамиев

Аннотация. Доказано, что любые алгебры Ершова, булевы алгебры и абелевы p-группы являются Σ-ограниченными системами и в наследственно конечных допустимых множествах над ними существуют универсальные Σ-функции.

Ключевые слова: допустимое множество, Σ-определимость, вычислимость, универсальная Σ-функция, Σ-ограниченная алгебраическая система, алгебра Ершова, булева алгебра, абелева p-группа.

Статья является продолжением [1], где введено понятие Σ-ограниченной алгебраической системы и получено необходимое и достаточное условие для существования универсальной Σ-функции в наследственно конечном допустимом множестве над Σ-ограниченной системой. В данной работе доказано, что алгебра Ершова, булева алгебра, абелева p-группа являются Σ-ограниченными системами и над ними существуют универсальные Σ-функции.

Мы придерживаемся терминологии и обозначений по допустимым множествам из книги [2], по алгебрам Ершова — из [3], по группам — из [4–6].

Приведем определение Σ-ограниченной алгебраической системы и некоторые результаты из [1], необходимые в дальнейшем.

Определение 1. Пусть для локально конечной и локально конструктивизируемой алгебраической системы $\mathfrak{M}$ сигнатуры σ_0 и конечного подмножества M_0 справедливы следующие условия.

1. Определено понятие базы для любого конечного подмножества $X \subseteq M$. Предикат $\mathfrak{B}_0^{M_0}(X,Y) \rightleftharpoons$ «конечная последовательность $Y \in M^{<\omega}$ есть база подмножества X» является Δ-предикатом сигнатуры $\sigma_1(M_0)$ в $\langle \mathbb{HF}(\mathfrak{M}), M_0\rangle$. Если Y^0, Y^1 — две базы подмножества X, то $X \subseteq \langle Y^\varepsilon\rangle$, $\varepsilon = 0,1$, и либо $\mathfrak{B}_0^{M_0}(\operatorname{sp} Y^0, Y^1)$, либо $\mathfrak{B}_0^{M_0}(\operatorname{sp} Y^1, Y^0)$ истинна. Последовательность Y называется *базой*, если $\mathfrak{B}^{M_0}(Y) \rightleftharpoons \mathfrak{B}_0^{M_0}(\operatorname{sp} Y, Y)$ истинна.

2. Для каждой базы Y определено число $\chi^{M_0}(Y)$, называемое *характеристикой базы* Y, такое, что $\chi^{M_0}(Y)$ является Σ-функцией сигнатуры $\sigma_1(M_0)$ в $\langle \mathbb{HF}(\mathfrak{M}), M_0\rangle$. Множество всех характеристик Ξ^{M_0} является вычислимым подмножеством ω. Существует Δ-предикат $\operatorname{Cor}^{M_0}(z,Y,n)$ сигнатуры $\sigma_1(M_0)$ такой, что справедлива эквивалентность:

$$z \in \langle Y\rangle \Leftrightarrow \langle \mathbb{HF}(\mathfrak{M}), M_0\rangle \models \exists! n(n \neq 0 \ \&\ \operatorname{Cor}^{M_0}(z,Y,n)).$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 09–01–12140), Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ–335.2008.1), а также гранта Президента РФ (№ МК–3721.2007.1).

Число n назовем *координатой элемента z относительно базы Y*. Если элементы не равны, то и их координаты не равны.

3. Пусть даны базы Y^ε одинаковой характеристики χ и конечные подсистемы $\mathfrak{M}^\varepsilon \supseteq \langle Y^\varepsilon \rangle$, $\varepsilon < 2$. Тогда существуют база Y^2 и подсистема $\mathfrak{M}^2 \supseteq \langle Y^2 \rangle$, для которых

1) $\chi = \chi(Y^2)$;

2) существуют вложения $\varphi_0^\varepsilon : \mathfrak{M}^\varepsilon \to \mathfrak{M}^2$ такие, что $\varphi^\varepsilon \restriction \langle M_0 \rangle = \mathrm{id}$, $\varphi^\varepsilon Y^\varepsilon = Y^2$, где вложения $\varphi^\varepsilon : \mathbb{HF}(\mathfrak{M}^\varepsilon) \to \mathbb{HF}(\mathfrak{M}^2)$ естественным образом продолжают φ_0^ε.

В частности, любые две базы одной и той же характеристики имеют одинаковую длину.

4. Для любой частичной функции $f : \mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \to \mathbb{HF}(\mathfrak{M})$, определенной Σ-формулой с параметрами из M_0, справедливо: если $u \in \mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ и $u \in \delta f$, то существует такая база Y подмножества $\operatorname{sp} u$, что $\operatorname{sp} f(u) \subseteq \langle Y \rangle$.

Тогда $\mathfrak{M}$ назовем *Σ-ограниченной алгебраической системой относительно M_0*. Если для любого конечного подмножества $M_0 \subseteq M$ существует конечное подмножество $M_0' \supseteq M_0$ такое, что $\mathfrak{M}$ Σ-ограниченна относительно M_0', то $\mathfrak{M}$ назовем *Σ-ограниченной алгебраической системой.*

Пусть $\Sigma(\mathbb{HF}(\mathfrak{M}), M_0)$ — множество всех Σ-формул сигнатуры $\sigma_1(M_0)$ без параметров, $F\Sigma(\mathbb{HF}(\mathfrak{M}), M_0)$ — множество всех функций в $\langle \mathbb{HF}(\mathfrak{M}), M_0 \rangle$, определенных формулами из $\Sigma(\mathbb{HF}(\mathfrak{M}), M_0)$, $\mathfrak{F}^{M_0}$ — подмножество всех одноместных функций из $F\Sigma(\mathbb{HF}(\mathfrak{M}), M_0)$.

Теорема A [1, следствие 4]. *Если алгебраическая система $\mathfrak{M}$ Σ-ограниченна относительно конечного подмножества $M_0 \subseteq M$, то существует универсальная Σ-функция $U^{M_0}(x, y) \in F\Sigma(\mathbb{HF}(\mathfrak{M}), M_0)$ для семейства $\mathfrak{F}^{M_0}$ такая, что для любой функции $f \in \mathfrak{F}^{M_0}$ справедливо равенство: $\lambda y U^{M_0}(n, y) = f(y)$ для некоторого n.*

Теорема B [1, теорема 2]. *Пусть алгебраическая система $\mathfrak{M}$ Σ-ограниченна. Тогда в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ существует универсальная Σ-функция с параметром A, если и только если для любого конечного подмножества C, относительно которого $\mathfrak{M}$ Σ-ограниченна, найдется конечное подмножество C^1 такое, что для любого конечного подмножества X и любой базы Y_X^C существует база $Y_{X^*}^A$, для которой справедливо $\langle Y_X^C \rangle \subseteq \langle Y_{X^*}^A \rangle$, где $X^* = C^1 \cup X$.*

§ 1. Алгебры Ершова

Здесь доказываются Σ-ограниченность любой алгебры Ершова $\mathfrak{A}$ и существование универсальной функции в $\mathbb{HF}(\mathfrak{A})$.

Будем рассматривать алгебры Ершова в сигнатуре $\sigma_0 = \langle \cup, \cap, \setminus, 0 \rangle$, а булевы алгебры в сигнатуре $\sigma_1 = \langle \cup, \cap, \setminus, 0, 1 \rangle$. Приведем некоторые обозначения. Пусть $\mathfrak{A}$ — алгебра Ершова, A_0 — конечное подмножество алгебры $\mathfrak{A}$. Последовательность $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ называется *дизъюнктивной в $\mathfrak{A}$*, если $x_i \neq 0$, $1 \leq i \leq n$, и для любых $i < j \leq n$ элементы x_i и x_j не пересекаются. Запись $z = x_1 \sqcup \dots \sqcup x_n$ означает, что $z = x_1 \cup \dots \cup x_n$ и последовательность $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ является дизъюнктивной. Пусть $\mathrm{At}(\mathfrak{A}) = \{a \in \mathfrak{A} \mid a - \text{атом в } \mathfrak{A}\}$, $\hat{a} = \{x \in \mathfrak{A} \mid x \leq a\}$, $a^\perp = \{x \in \mathfrak{A} \mid x \cap a = 0\}$, где $a \in \mathfrak{A}$. Если $S \subseteq \mathfrak{A}$, то через $\langle S \rangle \rightleftharpoons \langle S \rangle_{A_0}$ обозначим подалгебру в $\mathfrak{A}$, порожденную множеством $S \cup A_0$.

Элемент $a \in \mathfrak{A}$ называется *конечным*, если он является объединением конечного числа атомов, число которых будем обозначать через $|a|$, в противном случае он называется *бесконечным.*

Теорема 1. *Любая алгебра Ершова $\mathfrak{A}$ является Σ-ограниченной алгебраической системой относительно любого конечного подмножества $A_0 \subseteq A$.*

Доказательство. Так как любая алгебра Ершова $\mathfrak{A}$ локально конструктивизируема (см. [7]) и локально конечна, для доказательства теоремы достаточно проверить справедливость условий 1–4 определения 1.

Пусть $A_0' = \{a_1, \dots, a_s\}$ — атомы алгебры $\langle A_0 \rangle$. Для определенности предположим, что $a_1, \dots, a_e$ бесконечны, а $a_{e+1}, \dots, a_s$ конечны, $1 \le e \le s$, $a = a_1 \cup \dots \cup a_s$, $b = a_{e+1} \cup \dots \cup a_s$. Если подалгебра $\langle A_0 \rangle^{\perp}$ конечна, то через a_{s+1} обозначим ее наибольший элемент, в противном случае считаем $a_{s+1} = 0$.

1. *Дизъюнктивная последовательность $Y = \langle y_1, \dots, y_q \rangle$ алгебры $\mathfrak{A}$ называется *базой подмножества* X, если подалгебра, порожденная множеством $X \cup \hat{b} \cup \hat{a}_{s+1}$ в $\langle \mathfrak{A}, A_0 \rangle$, совпадает с $\langle Y \rangle$ и существуют числа $\tilde{p}_0 = 0, p_1, \dots, p_{s+\delta}$ такие, что

$$a_i = y_{\tilde{p}_{i-1}+1} \cup \dots \cup y_{\tilde{p}_{i-1}+p_i},$$

где $\tilde{p}_i = \tilde{p}_{i-1} + p_i$, $1 \le i \le s + \delta$, $\delta = 0, 1$. Если $\langle A_0 \rangle^{\perp}$ конечна, то $\delta = 1$, $q = \tilde{p}_{s+1}$. В противном случае $\delta = 0$ и $\tilde{p}_s \le q$.

Легко заметить, что отношение «Y база подмножества X» является двуместным Δ-предикатом.

2. Определим характеристику базы $Y = \langle y_1, \dots, y_q \rangle$. Положим

$$\chi(Y) \rightleftharpoons \langle p_1, \dots, p_{s+\delta}, \alpha \rangle,$$

где $\alpha = q - \tilde{p}_{s+\delta}$.

Легко проверить, что множество всех характеристик

$$\Xi^{A_0} = \{\langle p_1, \dots, p_e, p_{e+1}, \dots, p_{s+\delta}, \alpha \rangle \mid p_i \in \omega,\ p_j = |a_j|,\ [(\delta = 0 \ \&\ \alpha \in \omega) \\ \vee (\delta = 1 \ \&\ \alpha = 0 \ \&\ p_{s+1} = |a_{s+1}|)],\ p_i > 0,\ 1 \le i \le e,\ e < j \le s,\ \delta = 0, 1\}$$

вычислимо.

Если дан элемент $z \in \langle Y \rangle$, $z \ne 0$, то существует единственная последовательность чисел $\langle m_1, \dots, m_k \rangle$ такая, что $m_j < m_l$, $1 \le j < l \le k$, и справедливо

$$z = y_{m_1} \cup \dots \cup y_{m_k}.$$

Число $n = [m_1, \dots, m_k]$, будем называть *координатой элемента* z относительно Y. Будем считать, что нулевой элемент имеет координату 0.

3. Справедливость этого условия вытекает из следующей леммы.

Лемма 1. *Пусть в алгебре Ершова $\mathfrak{A}$ даны базы Y^{ε} одной и той же характеристики $\chi = \langle p_1, \dots, p_e, p_e, \dots, p_{s+\delta}, \alpha \rangle$ и конечные подалгебры $\mathfrak{A}^{\varepsilon} \supseteq \langle Y^{\varepsilon} \rangle$, $\varepsilon < 2$. Тогда существуют база Y^2 той же характеристики χ, конечная подалгебра $\mathfrak{A}^2 \supseteq \langle Y^2 \rangle$ и вложения $\varphi^{\varepsilon} : \mathfrak{A}^{\varepsilon} \to \mathfrak{A}^2$ такие, что $\varphi \restriction A_0 = \mathrm{id}$, $\varphi^{\varepsilon} Y^{\varepsilon} = Y^2$.*

Доказательство проведем для $\delta = 0$. Случай $\delta = 1$ доказывается аналогично. Пусть атомами подалгебры $\mathfrak{A}^{\varepsilon}$ будут

$$z_1^{\varepsilon}, \dots, z_{r^{\varepsilon}}^{\varepsilon},\ y_{\tilde{p}_e+1}, \dots, y_{\tilde{p}_s}$$

и для них справедливы равенства

$$y_j^{\varepsilon} = z^{\varepsilon}_{\tilde{t}^{\varepsilon}_{j-1}+1} \cup \dots \cup z^{\varepsilon}_{\tilde{t}^{\varepsilon}_{j-1}+t^{\varepsilon}_j}, \tag{1}$$

где $j = 1,\dots,\tilde p_e, \tilde p_s + 1,\dots,q$, $\tilde t^\varepsilon_j = \tilde t^\varepsilon_{j-1} + t^\varepsilon_j$, $\tilde t^\varepsilon_0 = 0$, $t^\varepsilon_j \in \omega^+$, $\tilde t_{\tilde p_s} = \tilde t_{\tilde p_e}$, $\tilde t^\varepsilon_q \le r^\varepsilon$.

Для любого $j \in \{1,\dots,\tilde p_e\} \cup \{\tilde p_s + 1,\dots,q\}$ положим $\beta_j = \max\{t^0_j, t^1_j\}$. Пусть $\beta = \max\{r^0 - \tilde t^0_q, r^1 - \tilde t^1_q\}$. Легко понять, что существует база $Y^2 = \langle y^2_1,\dots,y^2_{\tilde p_e}, y_{\tilde p_e+1},\dots,y_{\tilde p_s}, y^2_{\tilde p_s+1},\dots,y^2_q\rangle$ такая, что

(a) элемент y^2_j либо бесконечен, либо содержит не менее β_j атомов;

(b) $a_i = y^2_{\tilde p_{i-1}+1} \cup\dots\cup y^2_{\tilde p_{i-1}+p_i}$, $1 \le i \le e$;

(c) существует дизъюнктивная последовательность $\langle d_1,\dots,d_\beta\rangle$ такая, что для любых i, j, $1 \le i \le \beta$, $1 \le j \le q$ верно $d_i \cap y^2_j = 0$.

Тогда для любых $j \in \{1,\dots,\tilde p_e\} \cup \{\tilde p_s + 1,\dots,q\}$ и $\varepsilon < 2$ найдется дизъюнктивная последовательность $c^\varepsilon_{\tilde t^\varepsilon_{j-1}+1},\dots,c^\varepsilon_{\tilde t^\varepsilon_{j-1}+t^\varepsilon_j}$ подалгебры $\hat y^2_j$ такая, что справедливо равенство
$$y^2_j = c^\varepsilon_{\tilde t^\varepsilon_{j-1}+1} \cup\dots\cup c^\varepsilon_{\tilde t^\varepsilon_{j-1}+t^\varepsilon_j}. \tag{2}$$

Также для любого $\varepsilon < 2$ существует дизъюнктивная последовательность $c^\varepsilon_{\tilde t^\varepsilon_q+1},\dots,c^\varepsilon_{r^\varepsilon}$ такая, что для любых i, j, $\tilde t^\varepsilon_q < i \le r^\varepsilon$, $1 \le j \le q$ верно $c_i \cap y^2_j = 0$.

Через $\mathfrak A^2$ обозначим подалгебру в $\mathfrak A$, порожденную этими последовательностями и множеством $\{y_{\tilde p_e+1},\dots,y_{\tilde p_s}\}$. Легко проверить, что существуют вложения $\varphi^\varepsilon : \mathfrak A^\varepsilon \to \mathfrak A^2$ такие, что
$$\varphi^\varepsilon z^\varepsilon_{k^\varepsilon} = c^\varepsilon_{k^\varepsilon},\ 1 \le k^\varepsilon \le r^\varepsilon, \quad \varphi^\varepsilon y^\varepsilon_i = y^2_i,\ \tilde p_e < i \le \tilde p_s.$$
Отсюда и из (b), (1), (2) следует, что справедливы
$$\varphi \restriction \langle A_0\rangle = \mathrm{id}, \quad \varphi^\varepsilon Y^\varepsilon = Y^2.$$
Лемма, а вместе с ней условие 3 доказаны. □

Для доказательства справедливости условия 4 докажем следующие леммы.

Лемма 2. *Пусть даны конечные подалгебры $B \subseteq C \subseteq D$, $B \ne C$, алгебры Ершова $\mathfrak A$ и бесконечный элемент $b \in B$ алгебры $\mathfrak A$. Если b — атом алгебры B, но не является атомом алгебры C, то существует вложение $\varphi : D \to \mathfrak A$ такое, что $\varphi \restriction B = \mathrm{id}$, $\varphi C \not\subseteq D$.*

Доказательство. Пусть $b = (c_1 \sqcup c_2) \sqcup c_3$, где c_1, c_2 — атомы алгебры C, c_3 — элемент из C, возможно, равный нулю. Пусть
$$c_\varepsilon = d^\varepsilon_1 \sqcup\dots\sqcup d^\varepsilon_{n_\varepsilon}, \quad \varepsilon = 1, 2,\ n_\varepsilon \ge 1, \tag{3}$$
где d^ε_i — атомы алгебры D. Для определенности будем считать, что d^1_1 — бесконечный элемент алгебры $\mathfrak A$. Тогда существуют элементы x_1, y_1, x^1_i, $1 \le i \le n_1$, такие, что
$$d^1_1 = x_1 \sqcup y_1, \quad x_1 = x^1_1 \sqcup\dots\sqcup x^1_{n_1}, \quad x_2 = (c_1 \setminus x_1) \sqcup c_2. \tag{4}$$
Для некоторых элементов x^2_i, $1 \le i \le n_2$, имеем
$$x_2 = x^2_1 \sqcup\dots\sqcup x^2_{n_2}. \tag{5}$$
Тогда существует вложение $\varphi : D \to \mathfrak A$ такое, что
$$\varphi d^\varepsilon_i = x^\varepsilon_i,\ \varepsilon = 1, 2,\ 1 \le i \le n_\varepsilon, \quad \varphi x = x \text{ для всех } x \in D,\ x \cap (c_1 \sqcup c_2) = 0. \tag{6}$$
С учетом (3)–(6) имеем $\varphi c_\varepsilon = x_\varepsilon$, $\varphi(c_1 \sqcup c_2) = c_1 \sqcup c_2$, $\varphi c_3 = c_3$, т. е. $\varphi b = b$. Так как $x_1 \notin D$, то $\varphi c_1 \notin D$. □

Лемма 3. *Пусть даны конечная подалгебра $D \subseteq \mathfrak{A}$ и элементы $c_1, c_2 \in D$ такие, что $c_1 \cap c_2 = 0$, c_2 — бесконечный элемент. Тогда существует вложение $\varphi : D \to \mathfrak{A}$ такое, что φc_1 — бесконечный элемент, $\varphi c_1 \notin D$, $\varphi(c_1 \sqcup c_2) = c_1 \sqcup c_2$, $\varphi x = x$ для любого $x \in D \cap (c_1 \sqcup c_2)^{\perp}$.*

Доказательство. Пусть $c_i = d_1^i \sqcup \dots \sqcup d_{n_i}^i$, $i = 1, 2$, где d_j^i — атомы алгебры D, $1 \leq j \leq n_i$. Можно считать, что d_1^2 — бесконечный элемент. Тогда существуют такие элементы $x_1, \dots, x_{n_1}, x_{n_1+1}$ в $\mathfrak{A}$, что $d_1^2 = x_1 \sqcup \dots \sqcup x_{n_1} \sqcup x_{n_1+1}$. Пусть для определенности элемент x_1 бесконечен. Определим вложение $\varphi : D \to \mathfrak{A}$, положив

$$\varphi d_j^1 = x_j, \quad \varphi d_1^2 = c_1, \quad \varphi\big(d_2^2\big) = d_2^2 \sqcup x_{n_1+1},$$

$$\varphi x = x \quad \text{для всех } x \text{ таких, что } x \cap \big(c_1 \cup d_1^2 \cup d_2^2\big) = 0.$$

Отсюда

$$\varphi c_1 = x_1 \sqcup \dots \sqcup x_{n_1}, \ \varphi(c_1 \sqcup c_2) = c_1 \sqcup c_2.$$

Следовательно, φc_1 бесконечен и $\varphi c_1 \notin D$. $\square$

Лемма 4. *Пусть даны подалгебры $C \subseteq D$ и элементы $c_\varepsilon < b$, $b = c_0 \sqcup c_1$, $\varepsilon = 0, 1$, алгебры D. Если c_0 — атом алгебры C и $D^{\perp}$ — бесконечная алгебра, то существуют вложения $\varphi_\varepsilon : D \to \mathfrak{A}$ такие, что*

$$\varphi_0(b) = \varphi_1(b), \quad \varphi_0(c_0) \notin \varphi_1(C), \quad \varphi x = x \ \textit{для любого}\ x \in b^{\perp} \cap D.$$

Доказательство. Допустим, что $c_\varepsilon = d_1^\varepsilon \sqcup \dots \sqcup d_{n_\varepsilon}^\varepsilon$, где d_i^ε — атомы алгебры D, $1 \leq i \leq n_\varepsilon$. Пусть $\{x_i^\varepsilon, z \mid 1 \leq n_\varepsilon, \ \varepsilon = 0, 1\}$ — дизъюнктивная последовательность элементов из $D^{\perp}$, $x^\varepsilon = x_1^\varepsilon \sqcup \dots \sqcup x_{n_\varepsilon}^\varepsilon$. Определим вложения $\varphi_\varepsilon : D \to \mathfrak{A}$, положив

$$\varphi_\varepsilon x = x \quad \text{для всех } x \in b^{\perp} \cap D,$$

$$\varphi_0\big(d_i^0\big) = x_i^0, \quad \varphi_0\big(d_1^1\big) = x_1^1 \sqcup z, \quad \varphi_0\big(d_k^1\big) = x_k^1,$$

$$\varphi_1\big(d_1^0\big) = x_1^0 \sqcup z, \quad \varphi_1\big(d_j^0\big) = x_j^0, \quad \varphi_1\big(d_s^1\big) = x_s^1,$$

где $1 \leq i \leq n_0$, $2 \leq k \leq n_1$, $2 \leq j \leq n_0$, $1 \leq s \leq n_1$. Тогда

$$\varphi_0(c_0) = x^0, \quad \varphi_0(c_1) = x^1 \sqcup z, \quad \varphi_1(c_0) = x^0 \sqcup z, \quad \varphi_1(c_1) = x^1.$$

Стало быть, x^0 — атом $\varphi_0(C)$, а $x^0 \sqcup z$ — атом в $\varphi_1(C)$. Следовательно, $\varphi_0(c_0) \notin \varphi_1(C)$. $\square$

Справедливость условия 4 вытекает из следующей леммы.

Лемма 5. *Пусть даны алгебра $\mathfrak{A}$ и функция $f : \mathbb{HF}(\mathfrak{A}) \to \mathbb{HF}(\mathfrak{A})$, график которой задан некоторой Σ-формулой $\Phi(x, y, A_0)$. Тогда для любых элемента $u = \varkappa(X) \in \mathbb{HF}(\mathfrak{A})$, $\varkappa \in \mathbb{HF}(\omega)$, и базы Y подмножества $\operatorname{sp} X$ справедливо:*

$$\textit{если } u \in \delta f, \quad \textit{то } \operatorname{sp} f(u) \subseteq \langle Y \rangle.$$

Доказательство. Допустим противное, т. е. пусть

$$f(u) = \tau(Z) \rightleftharpoons v, \quad \operatorname{sp} Z \nsubseteq \langle Y \rangle, \tag{7}$$

где $\tau \in \mathbb{HF}(\omega)$, Z — последовательность элементов алгебры $\mathfrak{A}$.

Пусть

$$B = \langle Y \rangle, \quad C = \langle \operatorname{sp} Y \cup \operatorname{sp} Z \rangle. \tag{8}$$

Через D обозначим конечную подалгебру такую, что

$$C \subseteq D, \quad \mathbb{HF}(D) \models \Phi(u, v, A_0).$$

Пусть $b_1, \dots, b_m$ — атомы алгебры B. Рассмотрим возможные случаи.

1. Для некоторого i элемент b_i бесконечен и не является атомом в C.

Тогда по лемме 2 существует вложение $\varphi : D \to \mathfrak{A}$ такое, что $\varphi \restriction B = \mathrm{id}$, $\varphi C \nsubseteq D$. Пусть $\varphi^\sharp : \mathbb{HF}(D) \to \mathbb{HF}(\mathfrak{A})$ — естественное продолжение φ. Тогда по лемме 6 имеем

$$f(u) = f(\varphi^\sharp(u)) = f(\varkappa(\varphi X)) = \tau(\varphi Z), \quad \mathrm{sp}\,\varphi Z \nsubseteq C.$$

Это противоречит (7) и (8).

2. Для некоторого i элемент b_i конечен и не является атомом в C. Пусть для определенности $i = 1$.

Здесь возможны подслучаи:

(a) $b_1 \leq a$ для некоторого элемента $a \in \langle A_0 \rangle$.

Можно считать, что a является атомом алгебры $\langle A_0 \rangle$. Так как b_1 не является атомом алгебры $\mathfrak{A}$, по определению базы Y элемент a бесконечен. Поэтому $b_1 < a$ и для некоторого i элемент $b_i < a$ бесконечен. По лемме 3 существует вложение $\varphi : D \to \mathfrak{A}$ такое, что $\varphi \restriction \langle A_0 \rangle = \mathrm{id}$, φb_1 бесконечен. Тогда из (7), (8) имеем

$$f(\varkappa(\varphi X)) = \tau(\varphi Z), \quad \mathrm{sp}\,\varphi Z \nsubseteq \varphi B.$$

Для подалгебр $\varphi B \subseteq \varphi C \subseteq \varphi D$ и элемента φb_1 справедливы условия случая 1. Поэтому $\mathrm{sp}\,\varphi Z \subseteq \varphi C$, т. е. получили противоречие.

(b) $b_1 \nleq a$ для любого $a \in \langle A_0 \rangle$.

Тогда $b_1 \in \langle A_0 \rangle^\perp$ и $\langle A_0 \rangle^\perp$ — бесконечная подалгебра.

Допустим существует такое i, что b_i бесконечен и $b_i \in \langle A_0 \rangle^\perp$. Тогда по лемме 3 существует вложение $\varphi : D \to \mathfrak{A}$ такое, что $\varphi \restriction \langle A_0 \rangle = \mathrm{id}$, φb_1 бесконечен и φb_1 не является атомом алгебры в φC. Отсюда, как и в случае 2(a), получим противоречие.

Следовательно, любой атом B, принадлежащий $\langle A_0 \rangle^\perp$, конечен. Отсюда и из $b_1 \in \langle A_0 \rangle^\perp$ следует, что подалгебра $B^\perp$ бесконечна. Можно считать, что подалгебра $D^\perp$ также бесконечна. Действительно, пусть $D^\perp$ конечна. Пусть $d_1, \dots, d_n$ — все атомы алгебры D. Пусть $d_1, \dots, d_e$ — все атомы из $B^\perp$. Так как $D^\perp$ конечно, существует такое $1 \leq i \leq e$, что d_i бесконечен. Пусть d_1 бесконечен. Тогда существуют x и y такие, что $d_1 = x \sqcup y$. Допустим, что x бесконечен и D_0 — подалгебра, порожденная $B, y, d_2, \dots, d_e$. Определим вложение $\varphi : D \to D_0$, положив

$$\varphi \restriction B = \mathrm{id}, \quad \varphi d_1 = y, \quad \varphi d_i = d_i, \quad 2 \leq i \leq e.$$

Так как $x \in D_0^\perp$, то $D_0^\perp$ — бесконечная алгебра.

Пусть $b_1 = c_0 \sqcup c_1$, где c_0 — атом алгебры C. По лемме 4 существуют вложения $\varphi_0, \varphi_1 : D \to \mathfrak{A}$ такие, что $\varphi_0 \restriction B = \varphi \restriction B$, $\varphi_0(c_0) \notin \varphi_1(C)$. По лемме 6 имеем $f(\varkappa(\varphi_0(X))) = f(\varkappa(\varphi_1(X)))$, т. е. $\mathrm{sp}\,\varphi_0(Z) = \mathrm{sp}\,\varphi_1(Z)$. Отсюда $\varphi_0(C) \subseteq \varphi_1(C)$; противоречие.

3. Случаи 1 и 2 не имеют места.

Тогда для любого $1 \leq i \leq m$ элемент b_i является атомом в C. Следовательно, $C = B \oplus C_0$ для некоторой подалгебры C_0. Из (7) следует, что $C_0 \neq 0$. С учетом определения базы Y алгебра $\langle A_0 \rangle^\perp$ бесконечна. Допустим, что выполнено условие

(B) существует бесконечный элемент $c \in C_0$.

Можно считать, что c — атом в C_0. Тогда существует вложение $\varphi : D \to \mathfrak{A}$ такое, что $\varphi \restriction B = \mathrm{id}$, $\varphi c < c$, т. е. $\varphi c \notin C$. Отсюда, как и в случае 1, получаем противоречие.

Поэтому все атомы из C_0 конечны. Рассмотрим отдельно следующие возможные случаи.

(C) существует бесконечный элемент $b_i \in \langle A_0 \rangle^{\perp}$.

Пусть c — атом алгебры C_0. По лемме 3 существует вложение $\varphi : D \to \mathfrak{A}$ такое, что $\varphi \restriction \langle A_0 \rangle = \mathrm{id}$, φc — бесконечный элемент и $\varphi c \notin \varphi B$. Тогда для подалгебры $\varphi B \subseteq \varphi C$ и элемента φc имеет место случай (B), что невозможно.

(D) подалгебра $C^{\perp}$ бесконечна.

Пусть c — атом из C_0 и $c = d_1 \sqcup \dots \sqcup d_n$, где d_i — атомы алгебры D, $1 \leq i \leq n$. Выберем в $C^{\perp}$ такой элемент x, что $x = x_1 \sqcup \dots \sqcup x_n$ для некоторых элементов x_i. Тогда существует вложение $\varphi : D \to \mathfrak{A}$ такое, что $\varphi \restriction B = \mathrm{id}$, $\varphi c \notin C$, что невозможно.

Итак, все возможные случаи приводят к противоречию. Лемма доказана. $\square$

Таким образом, доказана справедливость условий 1–4 определения 1 для любых алгебры $\mathfrak{A}$ и множества A_0. Теорема доказана. $\square$

Следствие 1. *Любая булева алгебра $\mathfrak{B}$ является Σ-ограниченной алгебраической системой относительно любого конечного подмножества $B_0 \subseteq B$.*

Действительно, любая булева алгебра может быть рассмотрена как обогащение алгебры Ершова символом константы единица.

Из теорем 1, A и следствия 1 вытекает

Следствие 2. *Пусть $\mathfrak{A}$ — алгебра Ершова или булева алгебра. Тогда для любого конечного подмножества A_0 существует универсальная Σ-функция $U^{A_0}(x, y) \in F\Sigma(\mathbb{HF}(\mathfrak{A}), A_0)$ для семейства функций $\mathfrak{F}^{A_0}$ такая, что для любой функции $f \in \mathfrak{F}^{A_0}$ справедливо равенство: $\lambda y U^{A_0}(n, y) = f(y)$ для некоторого n.*

Следствие 3. *Пусть $\mathfrak{A}$ — алгебра Ершова. Тогда в $\mathbb{HF}(\mathfrak{A})$ существует универсальная Σ-функция для семейства всех одноместных Σ-функций.*

Доказательство. Пусть $A = \varnothing$ и $A_0' = \{a_1, \dots, a_e, a_{e+1}, \dots, a_s\}$ определяется по A_0 так же, как в начале доказательства теоремы 1. Положим $A_0^1 = \big\{a_1, \dots, a_e, a^1_{e+1}, \dots, a^1_{e+\alpha_{e+1}}, \dots, a^1_{(s+1)+1}, \dots, a^1_{(s+1)+\alpha_{s+1}}\big\}$, где $a^1_{k+1}, \dots, a^1_{k+\alpha_k}$ — все атомы под a_k. Легко заметить, что для любых конечного подмножества X и баз $Y_X^{A_0}, Y_{X^*}^{\varnothing}$, где $X^* = A_0^1 \cup X$, справедливо $\big\langle Y_X^{A_0} \big\rangle \subseteq \big\langle Y_{X^*}^{\varnothing} \big\rangle$. Тогда по теореме B, где C и C^1 нужно заменить на A_0 и A_0^1, получаем требуемое. $\square$

Аналогично доказывается

Следствие 4. *Пусть $\mathfrak{B}$ — булева алгебра. Тогда в $\mathbb{HF}(\mathfrak{B})$ существует универсальная Σ-функция для семейства всех одноместных Σ-функций.*

§ 2. Абелевы p-группы

В данном параграфе доказываются Σ-ограниченность любой абелевой p-группы G и существование универсальной Σ-функции в $\mathbb{HF}(G)$.

Приведем некоторые термины и результаты по теории абелевых p-групп, необходимые в дальнейшем. Пусть G — абелева p-группа G, $G_0 \subseteq G$ — подгруппа. *Порядком* G_0 называется мощность подгруппы G_0, при этом используется обозначение $|G_0|$. *Периодом* $\mathrm{per}(G)$ называется такое наименьшее число p^m, что $p^m G = 0$. Если такого числа не существует, то $\mathrm{per}(G) = \omega$ и говорят, что группа G *неограниченна*. Период подгруппы (x) называется *порядком элемента* x и обозначается через $|x|$. *Высотой элемента* $x \in G$, обозначаемой через $h_G(x)$, называется $\max\{p^n \mid x \in p^n G\}$. Если такого n нет, то $h_G(x) = \infty$. Пусть $A_0 \subseteq G$ — конечное множество. Если $X \subseteq G$, то через $\langle X \rangle$ обозначается подгруппа, порожденная множеством X в группе $\langle G, A_0 \rangle$, а через (X) — в группе G, $G[p^n] = \{x \mid p^n x = 0\}$, C_{p^n} — циклическая группа порядка p^n, C_{p^∞} — квазициклическая группа, G^α — прямая сумма α экземпляров группы G. *Размерностью группы* G называется размерность векторного пространства $G[p]$. Группа G называется *делимой*, если для любого $x \in G$ существует такое y, что $x = py$. Если G не содержит делимой подгруппы, отличной от нуля, то она называется *редуцированной*.

Теорема C. *Любая абелева группа G является прямой суммой редуцированной подгруппы R и делимой подгруппы D, $G = R \oplus D$.*

Теорема D (первая теорема Прюфера). *Абелева p-группа конечного периода разлагается в прямую сумму циклических подгрупп.*

Теорема E (Прюфер — Л. Я. Куликов). *Если сервантная подгруппа A абелевой группы G имеет конечный период, то она выделяется в G прямым слагаемым.*

Теорема F. *Любые два разложения абелевой p-группы в прямую сумму циклических групп изоморфны.*

Из доказательства предложения 27.1 в [5, с. 139] следует

Предложение A. *Пусть период абелевой p-группы C равен p^n, $c \in C$, $|c| = p^n$, и подгруппа $B \subseteq C$ такая, что $B \cap (c) = 0$. Тогда существует подгруппа $E \supseteq B$ такая, что $C = E \oplus (c)$.*

Предложение B [6, с. 83]. *Если счетная редуцированная абелева p-группа G неограниченна, то G имеет прямое слагаемое, являющееся неограниченной прямой суммой циклических групп.*

Теорема 2. *Пусть для абелевой p-группы G справедливо хотя бы одно из следующих условий:*

1) *редуцированная часть R группы G неограниченна;*

2) *делимая часть D содержит подгруппу $C^\omega_{p^\infty}$;*

3) *существует подгруппа $G_0 \subseteq G$, изоморфная $C^\omega_{p^\alpha}$, где p^α — период группы G, $\alpha \in \omega$, $\alpha > 0$.*

Тогда G является Σ-ограниченной алгебраической системой относительно любого конечного подмножества A_0.

Для доказательства теоремы нам потребуются следующие лемма и предложение.

Лемма 6. *Пусть группа G такая же, как в теореме 2, и дана конечная подгруппа $B \subseteq G$. Тогда для любого числа $p^n \le \mathrm{per}(G)$ существует элемент $c \in G$ порядка p^n такой, что $B \cap (c) = 0$.*

Доказательство. Легко проверить, что существует счетная подгруппа H такая, что $B \subseteq H \subseteq G$ и для H справедливы условия теоремы 2. Если для H верно условие 1, то по предложению B подгруппа H имеет прямое слагаемое

H_0, являющееся прямой суммой циклических групп неограниченных порядков. Пусть для H справедливо условие 2. Тогда по теореме C верно $H = H_0 \oplus H_1$, где $H_0 \cong C^{\omega}_{p^\infty}$. Если же верно условие 3, то по теореме F справедливо $H = H_0 \oplus H_1$, где $H_0 \cong C^{\omega}_{p^\alpha}$. Во всех этих случаях искомый элемент c можно выбрать из подгруппы H_0. $\square$

Следующие предложение является обобщением предложения 6 из [7].

Предложение 1. *Пусть группа G такая же, как в теореме 2, B, C — конечные абелевы p-группы, $B \subseteq C$, $\mathrm{per}(C) \leq \mathrm{per}(G)$ и $\varphi : B \to G$ является вложением B в G. Тогда существует вложение $\psi : C \to G$, расширяющее φ, в том и только в том случае, когда для любого элемента $b \in B$ справедливо неравенство*

$$h_C(b) \leq h_G(b'), \quad \text{где } \varphi b = b'. \tag{9}$$

Доказательство. Необходимость очевидна.

Достаточность докажем индукцией по числу элементов группы C. Пусть период группы C равен p^n и $c \in C$ такой, что $|c| = p^n$. Допустим, что $(c) \cap B = 0$. Тогда по предложению А существует подгруппа $E \subseteq C$ такая, что $C = (c) \oplus E$ и $E \supseteq B$. По индукции существует вложение $\psi_0 : E \to G$, $\psi_0 \restriction B = \varphi$. По лемме 6 существует элемент c' такой, что $(c') \cap E' = 0$, $|c'| = p^n$, где $E' = \psi_0 E$. Очевидно, что ψ_0 можно продолжить до $\psi : C \to G$, положив $\psi c = c'$. Поэтому можно считать, что $(c) \cap B \neq 0$.

Для каждого элемента c порядка p^n через k_c обозначим такое наименьшее число, что $p^{k_c} c \in B$. Пусть $c_0 \in C[p^n]$ — элемент такой, что k_{c_0} имеет наименьшее значение. Положим $c = c_0$, $k = k_{c_0}$.

Пусть

$$p^k c = b_0. \tag{10}$$

Покажем, что существует такой элемент c', что $p^k c' = b'_0$, где $\varphi b_0 = b'_0$, и для любого $s < k$ верно $p^s c' \notin B'$.

Так как подгруппа (c) сервантна в C, то $h_C(b_0) = k$. Поэтому в G существует элемент g_0 такой, что $p^k g_0 = b'_0$. Пусть s — минимальное число такое, что $p^s g_0 \in B'$. Если $s = k$, то $c' = g_0$ — искомый элемент. Пусть $s < k$. По лемме 6 существует элемент $g_1 \in G$ такой, что $|g_1| = p^k$ и $(g_1) \cap G_0 = 0$, где $G_0 = \text{гр}(B', g_0)$. Положим $c' = g_0 + g_1$. Тогда имеем $p^k c' = b'_0$. Покажем, что для любого $s < k$ верно $p^s c' \notin B'$. Действительно, пусть, напротив, для некоторого $s < k$ верно $p^s c' \in B'$. Тогда $p^s g_0 + p^s g_1 = b' \in B'$. Отсюда $0 \neq p^s g_1 \in G_0$; противоречие.

Пусть $H = \text{гр}(B, c)$, $H' = \text{гр}(B', c')$. Определяющие соотношения группы H суть соотношения между элементами группы B и соотношение $p^k c = b$. Определяющие соотношения группы H' такие же. Тем самым существует изоморфизм $f : H \to H'$ такой, что $f \restriction B = \varphi$.

По теореме E существует подгруппа $E \subseteq C$ такая, что

$$C = (c) \oplus E. \tag{11}$$

Пусть $E_0 = \text{пр}_E(B)$, т. е. E_0 — проекция подгруппы B на вторую координату разложения (11). Пусть $e \in E_0$. Тогда найдутся элемент $b \in B$ и число $s \in \omega$ такие, что

$$b = p^s \alpha c + e, \quad (\alpha, p) = 1. \tag{12}$$

Покажем, что

$$h_C(e) \leq h_G(e'), \tag{13}$$

где $e' = fe$.

Пусть $h_C(e) = r$. Покажем, что либо $e \in B$, либо справедливо неравенство

$$r < s. \tag{14}$$

Если $s \geq k$, то из (10), (12) следует, что $e \in B$.

Пусть $s < k$. Покажем справедливость (14). Допустим противное: $r \geq s$. Существует элемент $e_1 \in E$ такой, что $e = p^r e_1$. Отсюда и из (12) имеем $b = p^s(\alpha c + p^{r-s} e_1)$. Так как $(\alpha, p) = 1$, то элемент $c_1 = \alpha c + p^{r-s} e_1$ имеет порядок p^n и $k_{c_1} < k$. Это противоречит выбору элемента c. Поэтому (14) справедливо.

Так как $f : H \to H'$ изоморфизм, справедливо равенство

$$b' = p^s \alpha c' + e'. \tag{15}$$

Покажем, что имеет место

$$h_G(e') \geq r. \tag{16}$$

Если $e \in B$, то (16) следует из условия предложения и определения f.

Пусть $e \notin B$. Тогда справедливо неравенство (14). С учетом (12) имеем $h_C(e) = h_G(b) = r$. Следовательно, $h_G(b') \geq r$. Отсюда и из (15) получаем $h_G(e') \geq \min\{h_G(b'), s\} \geq r$, т. е. неравенство (13) доказано.

Вложение $\varphi_0 = f \restriction E_0$ подгруппы E_0 в G и подгруппы $E_0 \subseteq E$ удовлетворяют условию (9) предложения. По индукции существует вложение $\psi_0 : E \to G$ такое, что $\psi_0 \restriction E_0 = \varphi_0$. Покажем, что верно равенство

$$\psi_0 E \cap (c') = 0. \tag{17}$$

Допустим противное, т. е. существует $e \in E$, $e \neq 0$ такой, что

$$\psi_0 e = p^s c'. \tag{18}$$

Можно считать, что $|e| = p$ и $s \geq k$. Действительно, если $s < k$, то из (18) вытекает, что $\psi_0 p^{n-s-1} e = p^{n-1} c'$. Отсюда и из $k \leq n-1$ следует, что в качестве элемента e можно взять $p^{n-s-1} e$.

Таким образом, $|e| = p$ и $s \geq k$. Покажем, что можно предполагать, что $e \in E_0$. Действительно, допустим $e \notin E_0$, $h_C(e) = h_E(e) = m$ и $p^m e_1 = e$ для некоторого элемента $e_1 \in E$. Подгруппа (e_1) сервантна в E, а поэтому по теореме Е существует подгруппа $E_1 \subseteq E$ такая, что $E = (e_1) \oplus E_1$.

Так как $e \notin E_0$, то $\mathrm{пр}_{(e_1)} B = 0$. Из (11) следует, что $C = (c) \oplus (e_1) \oplus E_1$ и $B \subseteq (c) \oplus E_1$. По лемме 6 для доказательства предложения достаточно вложить подгруппу $(c) \oplus E_1$ в G. Это возможно по индукции. Поэтому будем считать, что $e \in E_0$. Из (18) вытекает, что

$$\psi_0 e = \varphi_0 e = fe = p^s c' = p^{s-k} b_0'. \tag{19}$$

По определению изоморфизма $f : H \to H'$ имеем

$$f p^{s-k} b_0 = \varphi p^{s-k} b_0 = p^{s-k} b_0'. \tag{20}$$

Из (19) и (20) получим, что

$$e = p^{s-k} b_0.$$

Отсюда $e \in (c) \cap E$, что невозможно. Поэтому равенство (17) справедливо. Стало быть, вложения $f : (c) \to (c')$ и $\psi_0 : E \to G$ продолжаются до требуемого вложения $\psi : C \to G$. Предложение доказано. $\square$

Доказательство теоремы. В [7] доказана, что любая абелева p-группа G локально конструктивизируема. Так как G локально конечна, для доказательства теоремы достаточно проверить справедливость условий 1–4 определения 1.

1. Пусть $X \subseteq G$ — конечное подмножество. Тогда по теореме D подгруппа $\langle X\rangle$ разлагается в прямую сумму циклических групп $\langle X\rangle = (y_1) \oplus \dots \oplus (y_q)$. Последовательность $Y = \langle y_1, \dots, y_q\rangle$ назовем *базой подмножества* X. По теореме F любые две базы подмножества X имеют одну и ту же длину. Легко проверить, что предикат $\mathfrak{B}_0(X, Y)$ является Δ-предикатом в $\langle \mathbb{HF}(G), A_0\rangle$.

2. Для любой базы Y и элемента $z \in \langle Y\rangle$ существует единственная последовательность чисел $\langle n_1, \dots, n_q\rangle$, $n_j < |y_j|$, такая, что $z = n_1y_1 + \dots + n_qy_q$. Тогда $n = [n_1, \dots, n_q] + 1$ назовем *координатой элемента* z относительно Y. Легко проверить, что $\mathrm{Cor}(z, Y, n)$ является Δ-предикатом в $\langle \mathbb{HF}(G), A_0\rangle$.

Пусть для базы $Y = \langle y_1, \dots, y_q\rangle$ справедливы $|y_j| = p^{m_j}$, $\mathrm{Cor}(a_i, Y, n_i)$, где $A \rightleftharpoons \langle A_0\rangle = (a_1) \oplus \dots \oplus (a_e)$ — некоторое фиксированное разложение. Тогда последовательность $\chi(Y) = \langle p^{m_1}, \dots, p^{m_q}, n_1, \dots, n_e\rangle$ назовем *характеристикой базы* Y. Легко проверить, что отношение $\chi = \chi(Y)$ является 2-местным Σ-предикатом в $\langle \mathbb{HF}(G), A_0\rangle$.

Вычислимость множества всех характеристик вытекает из следующей леммы. Пусть $|a_i| = p^{l_i}$, $1 \le i \le e$.

Лемма 7. *Последовательность чисел*

$$\xi = \langle p_1^{m_1}, \dots, p_q^{m_q}, n_1, \dots, n_e\rangle,$$

где $q \ge e$, $n_i = [s_{i1}, \dots, s_{iq}] + 1$, $s_{ij} = p^{r_{ij}}t_{ij}$, $(t_{ij}, p) = 1$, $1 \le i \le e$, $1 \le j \le q$, *является характеристикой тогда и только тогда, когда для любых чисел* $0 \le \alpha_i \le p^{l_i}$ *справедливы условия*

(a) $\max\{m_j \mid 1 \le j \le q\} \le \mathrm{per}(G)$,

(b) $0 \le r_{ij} \le m_j,\ \max\{m_j - r_{ij} \mid 1 \le j \le q\} = l_i$,

(c) $\bigwedge\limits_{j=1}^{q}\left[\sum\limits_{i=1}^{e}\alpha_i s_{ij} \equiv 0 (\mathrm{mod}\, p^{m_j})\right] \Leftrightarrow \bigwedge\limits_{i=1}^{e}\left[\bigwedge\limits_{j=1}^{q}(\alpha_i s_{ij} \equiv 0 (\mathrm{mod}\, p^{m_j}))\right]$,

(d) $\min\left\{\exp\left(p, \sum\limits_{i=1}^{e}\alpha_i s_{ij}\right) \mid 1 \le j \le q\right\} \le h_G\left(\sum\limits_{i=1}^{e}\alpha_i a_i\right)$.

Доказательство. Необходимость. Пусть последовательность ξ является характеристикой базы Y. Тогда по определению

$$\langle Y\rangle = (y_1) \oplus \dots \oplus (y_q),\ |y_j| = p^{m_j}, \quad a_i = s_{i1}y_1 + \dots + s_{iq}y_q.$$

Проверим, например, условие (d). Пусть дан элемент $x = \sum \alpha_i a_i$. Тогда $x = \sum\limits_{j=1}^{q}\left(\sum\limits_{i=1}^{e}\alpha_i s_{ij}\right)y_j$. Отсюда $h_{\langle Y\rangle}(x) = \min\left\{\exp\left(p, \sum\limits_{i=1}^{e}\alpha_i s_{ij}\right) \mid 1 \le j \le q\right\}$. Очевидно, что $h_{\langle Y\rangle}(x) \le h_G(x)$, откуда получаем (d).

Достаточность. Пусть для последовательности ξ выполнены условия (a)–(d). По ней определим группу B^ξ, положив

$$B^\xi = \left(b_1^\xi\right) \oplus \dots \oplus \left(b_q^\xi\right), \quad \left|b_j^\xi\right| = p^{m_j}.$$

Через A^ξ обозначим ее подгруппу, порожденную элементами

$$a_i^\xi = s_{i1}b_1^\xi + \dots + s_{iq}b_q^\xi, \quad 1 \le i \le e.$$

Как легко проверить, из условий (b), (c) следует, что

$$A^\xi = \left(a_1^\xi\right) \oplus \dots \oplus \left(a_e^\xi\right), \quad \left|a_i^\xi\right| = p^{l_i}.$$

Тогда существует изоморфизм $\varphi^\xi : A^\xi \to A$ такой, что $\varphi^\xi a_i^\xi = a_i$. Из условий (a) и (d) следует, что $\mathrm{per}(B) \le \mathrm{per}(G)$ и для любого элемента $x \in A^\xi$ верно $h_{B^\xi}(x) \le h_G(\varphi^\xi x)$.

Тогда по предложению 1 существует изоморфное вложение $\psi^\xi : B^\xi \to G$, продолжающее φ^ξ. Значит, последовательность $Y = \left\langle \psi^\xi b_1^\xi, \dots, \psi^\xi b_q^\xi \right\rangle$ имеет характеристику ξ. Лемма доказана. $\square$

Справедливость условия 3 вытекает из следующего предложения, представляющего самостоятельный интерес.

Предложение 2. *Пусть группа G такая же, как в теореме 2, и даны конечные подгруппы $A \subseteq B^\varepsilon \subseteq C^\varepsilon \subseteq G$, $\varepsilon < 2$, и изоморфизм φ подгруппы B^0 на B^1, $\varphi \restriction A = \mathrm{id}$. Тогда существуют изоморфные вложения $\psi^\varepsilon : C^\varepsilon \to G$ такие, что $\psi^\varepsilon \restriction A = \mathrm{id}$, $\psi^0 x^0 = \psi^1(\varphi x^0)$ для любого $x^0 \in B^0$ и $\psi^0 B^0 \nsubseteq C^0 \cup C^1$.*

Доказательство. Сначала докажем следующую лемму.

Лемма 8. *Пусть справедливы условия предложения 2. Тогда существуют изоморфные вложения $\psi^\varepsilon : B^\varepsilon \to G$ такие, что $\psi^\varepsilon \restriction A = \mathrm{id}$, $\psi^0 x^0 = \psi^1 x^1 \rightleftharpoons x^2$, $h_{C^\varepsilon}(x^\varepsilon) \le h_G(x^2)$ для любого элемента $x^0 \in B^0$, где $x^1 \rightleftharpoons \varphi x^0$ и $\psi^0 B^0 \nsubseteq C^0 \cup C^1$.*

Доказательство. По шагам t построим конечные подгруппы B_t^α, $\alpha < 3$, и изоморфизмы $\psi_t^\varepsilon : B_t^\varepsilon \to B_t^2$, $B_t^\varepsilon \subseteq B^\varepsilon$ такие, что для любого элемента $x^0 \in B_t^0$ справедливы свойства

1^0) $\psi_t^\varepsilon \restriction A = \mathrm{id}$,

2^0) $x^0 \in B_t^0 \Leftrightarrow x^1 \in B_t^1$,

3^0) $\psi_t^0 x^0 = \psi_t^1 x^1 \rightleftharpoons x^2$,

4^0) $\max\{h_{C^\varepsilon}(x^\varepsilon) \mid \varepsilon < 2\} \le h_G(x^2)$.

Шаг 0. $B_0^\alpha = 0$, $\psi_0^\varepsilon = \mathrm{id}$.

Пусть сделаны t шагов.

Шаг $t+1$. Пусть $D_{t+1}^\varepsilon = \left\{x \in B^\varepsilon \mid x \notin B_t^\varepsilon,\, px \in B_t^\varepsilon\right\}$, $n_{t+1}^\varepsilon = \max\{h_{C^\varepsilon}(x) \mid x \in D_{t+1}^\varepsilon\}$, $H_{t+1}^\varepsilon = \left\{x \in D_{t+1}^\varepsilon \mid h_{c^\varepsilon}(x) = n_{t+1}^\varepsilon\right\}$, $E_{t+1}^\varepsilon = A \cap H_{t+1}^\varepsilon$.

Определим число $\gamma < 2$ и элемент b_{t+1}^γ. Рассмотрим следующие возможные случаи.

1. $n_{t+1}^0 \ne n_{t+1}^1$.

Тогда через γ обозначим такое число, что $n_{t+1}^\gamma > n_{t+1}^{1-\gamma}$. Если $E_{t+1}^\gamma \ne 0$, то в качестве b_{t+1}^γ возьмем любой элемент $a \in E_{t+1}^\gamma$, отличный от нуля. В противном случае полагаем $b_{t+1}^\gamma = x$ для некоторого $x \in H_{t+1}^\gamma$, $x \ne 0$.

2. $n_{t+1}^0 = n_{t+1}^1$.

Если существует такое $\varepsilon < 2$, что $E_{t+1}^\varepsilon \ne 0$, то полагаем $\gamma = \varepsilon$. В противном случае $\gamma = 0$. Элемент b_{t+1}^γ выбираем, как и в случае 1.

Элемент b_{t+1}^γ назовем $(t+1)$-*высоким*. Положим $n \rightleftharpoons n_{t+1}^\gamma$, $b_{t+1}^{1-\gamma} = \varphi^{-\gamma} b_{t+1}^\gamma$, где $\varphi^{-0} = \varphi$.

Теперь определим элемент b_{t+1}^2. Если $b_{t+1}^\gamma = a \in A$, то полагаем $b_{t+1}^2 = a$. Пусть $b_{t+1}^\gamma \notin A$ и $pb_{t+1}^\gamma \rightleftharpoons b_\gamma \in B_t^\gamma$. Следовательно, $h_G\left(b_\gamma^2\right) \ge p^{n+1}$, где $b_\gamma^2 = \psi_t^\gamma b_\gamma$. Поэтому в группе G существуют элементы c и z такие, что

$$b_\gamma^2 = p^{n+1} c, \quad |z| = p, \quad h_G(z) \ge p^n, \tag{21}$$

$$(z) \cap \bigl(C^0 \cup C^1 \cup \{c\} \cup B_t^2\bigr) = 0. \tag{22}$$

Положим $b_{t+1}^2 = p^n c + z$. Тогда из (21), (22) следует

$$pb_{t+1}^2 = b_\gamma^2, \quad h_G\bigl(b_{t+1}^2\bigr) \geq p^n, \quad b_{t+1}^2 \notin C^0 \cup C^1 \cup B_t^2.$$

Положим $B_{t+1}^\alpha = B_t^\alpha + \bigl(b_{t+1}^\alpha\bigr)$, $\alpha < 3$. Легко проверить, что существует изоморфизм $\psi_{t+1}^\varepsilon : B_{t+1}^\varepsilon \to b_{t+1}^2$ такой, что $\psi_{t+1}^\varepsilon \restriction B_t^\varepsilon = \psi_t^\varepsilon$, $\psi_{t+1}^\varepsilon b_{t+1}^\varepsilon = b_{t+1}^2$.

Шаг $t+1$ закончен. Переходим к следующему шагу.

Для доказательства справедливости свойств 1^0–4^0 на шаге $t+1$ нам нужна следующая

Лемма 9. *Для любых чисел $\varepsilon, \delta < 2$, шага t и элементов $c_t^\varepsilon \in B_t^\varepsilon$, $d_t^\delta \in B^\delta \setminus B_t^\delta$ справедливо неравенство*

$$h_G\bigl(c_t^2\bigr) \geq h_{C^\delta}\bigl(d_t^\delta\bigr), \tag{23}$$

где $c_t^2 \rightleftharpoons \psi_t^\varepsilon\bigl(c_t^\varepsilon\bigr)$.

Доказательство проведем индукцией по t. Пусть даны элементы $c_{t+1}^\varepsilon \in B_{t+1}^\varepsilon$, $d_{t+1}^\delta \in B^\delta \setminus B_{t+1}^\delta$ и b_{t+1}^γ — $(t+1)$-высокий элемент. Можно считать, что $c_{t+1}^\varepsilon \notin B_t^\varepsilon$. Тогда по определению подгруппы B_{t+1}^ε верно равенство $c_{t+1}^\varepsilon = c_t^\varepsilon + mb_{t+1}^\varepsilon$ для некоторых элемента $c_t^\varepsilon \in B_t^\varepsilon$ и числа $0 < m < p$. Отсюда

$$c_{t+1}^2 = c_t^2 + mb_{t+1}^2. \tag{24}$$

По индукционному предположению

$$h_G\bigl(c_t^2\bigr) \geq h_{C^\delta}\bigl(d_{t+1}^\delta\bigr). \tag{25}$$

Из определений b_{t+1}^γ и ψ_{t+1}^ε следуют

$$h_{C^\gamma}\bigl(b_{t+1}^\gamma\bigr) \geq h_{C^\delta}\bigl(d_{t+1}^\delta\bigr), \tag{26}$$

$$h_G\bigl(b_{t+1}^2\bigr) \geq h_{C^\gamma}\bigl(b_{t+1}^\gamma\bigr). \tag{27}$$

Из (26) и (27) выводим

$$h_G\bigl(b_{t+1}^2\bigr) \geq h_{C^\delta}\bigl(d_{t+1}^\delta\bigr).$$

Отсюда и из (24), (27) получим справедливость (23) для $t+1$. Лемма 9 доказана. □

Докажем справедливость свойств 1^0–4^0 на шаге $t+1$. Пусть на шаге t они выполнены. Справедливость 2^0 и 3^0 непосредственно следует из построения. Докажем 1^0. Пусть $a \in B_{t+1}^\varepsilon \setminus B_t^\varepsilon$. Если $a = b_{t+1}^\gamma$, то $\psi_{t+1}^\varepsilon a = a$ по построению ψ_{t+1}^ε. Пусть $a \neq b_{t+1}^\gamma$. Покажем, что $a \in B_{t+1}^\gamma$. Действительно, пусть $\varepsilon \neq \gamma$. Тогда $a = \varphi^{-\gamma} x^\gamma$ для некоторого $x^\gamma \in B_{t+1}^\gamma$, где $\varphi^0 = \varphi$. Из условия леммы $\varphi \restriction A = \mathrm{id}$ имеем $x^\gamma = a$, т. е. $a \in B_{t+1}^\gamma$. Тогда $a = c_t^\gamma + mb_{t+1}^\gamma$ для некоторых $c_t^\gamma \in B_t^\gamma$, $0 < m < p$. По построению $h_{C^\gamma}\bigl(c_t^\gamma\bigr) \geq h_{C^\gamma}\bigl(mb_{t+1}^\gamma\bigr)$. Отсюда $h_{C^\gamma}(a) \geq h_{C^\gamma}\bigl(b_{t+1}^\gamma\bigr)$. Это противоречит тому, что $b_{t+1}^\gamma \neq a$. Таким образом, свойство 1^0 доказано.

Докажем свойство 4^0. Пусть дан элемент $x^\varepsilon \in B_{t+1}^\varepsilon \setminus B_t^\varepsilon$. Тогда $x^\varepsilon = c_t^\varepsilon + mb_{t+1}^\varepsilon$, $c_t^\varepsilon \in B_t^\varepsilon$, $0 < m < p$. Тем самым

$$x^2 = c_t^2 + mb_{t+1}^2. \tag{28}$$

Из определения $(t+1)$-высокого элемента и ψ_t^ε следует, что

$$h_{C^\varepsilon}(x^\varepsilon) \le h_{C^\gamma}\big(mb_{t+1}^\gamma\big), \tag{29}$$

$$h_{C^\gamma}\big(mb_{t+1}^\gamma\big) \le h_G\big(mb_{t+1}^2\big), \tag{30}$$

из леммы 9 — что $h_G\big(c_t^2\big) \ge h_{C^\gamma}\big(mb_{t+1}^\gamma\big)$, и с учетом (28), (30) получаем

$$h_G(x^2) \ge h_{C^\gamma}\big(mb_{t+1}^\gamma\big).$$

Отсюда и из (29) вытекает $h_{C^\varepsilon}(x^\varepsilon) \le h_G(x^2)$, т. е. свойство 4^0, тем самым и лемма 8 доказаны. □

Закончим доказательство предложения 2. Пусть выполнены условия этого предложения. Тогда по лемме 8 существуют изоморфные вложения $\psi^\varepsilon : B^\varepsilon \to G$ такие, что $\psi^\varepsilon \restriction A = \mathrm{id}$, $\psi^0 x^0 = \psi^1 x^1 \rightleftharpoons x^2$ и $h_{C^\varepsilon}(x^\varepsilon) \le h_G(x^2)$ для любого элемента $x^0 \in B^0$, где $x^1 \rightleftharpoons \varphi x^0$. По предложению 1 существуют требуемые изоморфные вложения $f^\varepsilon : C^\varepsilon \to G$, расширяющие ψ^ε.

Предложение 2, а вместе с ним и справедливость условия 3 доказаны. □

Следствие 5. *Пусть группа G такая же, как в теореме 2, и даны ее конечные подгруппы $A \subseteq B \subseteq C$, $B \ne A$. Тогда существует такое вложение $\psi : C \to G$, что $\psi \restriction A = \mathrm{id}$, $\psi B \not\subseteq C$.*

Действительно, пусть $B^\varepsilon = B$, $C^\varepsilon = C$, $\varphi : B \to B$, $\varphi = \mathrm{id}$. Тогда все условия предложения 2 выполнены. Поэтому существует требуемое вложение $\psi : C \to G$. □

4. Докажем справедливость последнего условия. Пусть график функции $f : \mathbb{HF}(G) \to HF(G)$ задан Σ-формулой $\Phi(x, y, A_0)$, $A_0 \subseteq G$, и $u = \varkappa(X)$, $f(u) = \tau(Z)$, $X, Z \in G^{<\omega}$. Положим $A = (A_0 \cup \operatorname{sp} X)$, $B = (A \cup \operatorname{sp} Z)$. Пусть C — конечная подгруппа в G такая, что

$$\mathbb{HF}(C) \models \Phi(u, \tau(Z), A_0), \quad C \supseteq B.$$

Допустим $B \ne A$. Тогда по следствию 5 существует такое вложение $\psi : C \to G$, что $\psi \restriction A = \mathrm{id}$, $\psi B \not\subseteq C$, т. е. $\operatorname{sp}\psi Z \not\subseteq \operatorname{sp} Z$. Пусть $\psi^\# : \mathbb{HF}(C) \to \mathbb{HF}(C)$ — естественное продолжение ψ, т. е. $\psi^\#(\varkappa(X)) = \varkappa(\psi X)$, где $\varkappa \in \mathbb{HF}(\omega)$. Тогда по лемме 6 из [1] имеем

$$f(\psi^\#(\varkappa(X))) = f(\varkappa(\psi X)) = \tau(\psi Z).$$

Поскольку $\psi X = X$, то $f(\varkappa(\psi X)) = \tau(Z)$. Отсюда $\tau(Z) = \tau(\psi Z)$, т. е. $\operatorname{sp} Z = \operatorname{sp}\psi Z$, что невозможно. Следовательно, $B = A$ и $\operatorname{sp} Z \subseteq A$.

Таким образом, условие 4, а вместе с ним и теорема доказаны. □

Из теорем 2 и А получаем

Следствие 6. *Пусть G — абелева p-группа такая же, как в теореме 2. Тогда для любого конечного подмножества A_0 существует универсальная Σ-функция $U^{A_0}(x, y) \in F\Sigma(\mathbb{HF}(G), A_0)$ для семейства одноместных функций $\mathfrak{F}^{A_0}$ такая, что для любой функции $f \in \mathfrak{F}^{A_0}$ справедливо равенство: $\lambda y U^{A_0}(n, y) = f(y)$ для некоторого n.*

Теорема 3. *Пусть абелева p-группа является прямой суммой конечного периода и делимой группы конечной размерности. Тогда она Σ-ограниченная.*

Доказательство. По первой теореме Прюфера существуют такие числа $\alpha, \beta, \gamma \in \omega$, кардинал λ и подгруппы G_0, G_1, G_2, что

$$G = G_0 \oplus G_1 \oplus G_2 \oplus D,$$

где $\mathrm{per}(G_0) < p^\alpha$, $G_1 \cong C^\lambda_{p^\alpha}$, $G_2 = (g_1) \oplus \dots \oplus (g_\beta)$, $|g_i| > p^\alpha$, $1 \le i \le \beta$, $D \cong C^\gamma_{p^\infty}$, $\lambda \ge \omega$.

Рассмотрим случай $\alpha > 0$. Доказательство для случая $\alpha = 0$ аналогично и проще. Пусть дано конечное подмножество $A_0 \subseteq G$, содержащее элементы $g_1, \dots, g_\beta$. Для доказательства теоремы достаточно установить, что группа G Σ-ограниченна относительно A_0. Для этого нужно проверить справедливость условий 1–4 определения 1.

1. Пусть $Y = \langle y_1, \dots, y_q\rangle$, $y_i = g_i$, $1 \le i \le \beta$, является базой для конечного подмножества $X \subseteq G$ (относительно A_0), если существует число m такое, что $p^m \ge \mathrm{per}(\langle X\rangle)$ и

$$H \rightleftharpoons (\langle X\rangle, D_m) = (y_1) \oplus \dots \oplus (y_q), \tag{31}$$

где $D_m \subseteq D$, $D_m \cong C^\gamma_{p^m}$, $|y_i| \le p^\alpha$, $\beta + 1 \le i \le e \rightleftharpoons q - \gamma$, $|y_j| = p^m$, $e + 1 \le j \le q$. Отсюда следует, что $D_m = (y_{e+1}) \oplus \dots \oplus (y_q)$.

Заметим, что разложение (31) всегда существует, так как по теореме Е подгруппы G_2 и D_m выделяются прямым слагаемым из H. Легко проверить, что предикат $\mathfrak{B}_0(X, Y)$ является Δ-предикатом в $\langle \mathbb{HF}(G), A_0\rangle$.

Допустим, что даны две базы Y^ε, $\varepsilon = 0, 1$, подмножества X. Тогда существуют числа m^ε такие, что

$$H^\varepsilon = (\langle X\rangle, D_{m^\varepsilon}) = (g_1) \oplus \dots \oplus (g_\beta) \oplus \left(y^\varepsilon_{\beta+1}\right) \oplus \dots \oplus \left(y^\varepsilon_q\right), \tag{32}$$

где $m^\varepsilon \ge \mathrm{per}(\langle X\rangle)$, $D_{m^\varepsilon} = \left(y^\varepsilon_{e+1}\right) \oplus \dots \oplus \left(y^\varepsilon_q\right) \subseteq D$, $q = e + \gamma$. Допустим, что $m^0 < m^1$. Тогда $D_{m^0} \subseteq D_{m^1}$, поэтому $H^0 \subseteq H^1$. Стало быть,

$$H^1 = (\langle X\rangle, D_{m^1}) \text{ и } p^{m^1} \ge p^{m^0} = \mathrm{per}(\langle Y^0\rangle).$$

Отсюда и из (32) следует, что Y^1 является базой для Y^0. Таким образом условие 1 доказано.

2. Пусть дана база $Y = \langle y_1, \dots, y_q\rangle$, где $y_i = g_i$, $1 \le i \le \beta$, $|y_j| = p^{m_j}$, $m_j \le \alpha$, $\beta + 1 \le j \le e = q - \gamma$, $|y_k| = p^m$, $e + 1 \le k \le q$. Тогда

$$\langle Y\rangle = (y_1) \oplus \dots \oplus (y_q), \quad D_m = (y_{e+1}) \oplus \dots \oplus (y_q).$$

Пусть $z \in \langle Y\rangle$. Тогда существует единственная последовательность чисел $\bar{k} = \langle k_1, \dots, k_q\rangle$ такая, что

$$z = k_1 y_1 + \dots + k_q y_q,$$

где $k_s \le |y_s|$, $1 \le s \le q$. Номер $[\bar{k}]$ назовем *координатой элемента z относительно базы Y*. Легко проверить, что $\mathrm{Cor}(Z, Y, n)$ является Δ-предикатом в $\langle \mathbb{HF}(G), A_0\rangle$.

Пусть $A = \langle A_0\rangle = (a_1) \oplus \dots \oplus (a_r)$, $a_i = g_i$, $1 \le i \le \beta \le r$, — некоторое фиксированное разложение и числа n_i такие, что $\mathrm{Cor}(a_i, Y, n_i)$. Тогда последовательность

$$\chi(Y) = \langle |y_1|, \dots, |y_q|, n_1, \dots, n_r\rangle$$

назовем *характеристикой базы Y*. Легко проверить, что $\chi = \chi(Y)$ является двухместным Δ-предикатом в $\langle \mathbb{HF}(G), A_0\rangle$.

Вычислимость множества всех характеристик вытекает из следующей леммы. Пусть $p^{l_i} = |g_i|$, $|a_j| = p^{l_j}$, где $1 \le i \le \beta$, $1 \le j \le r$.

Лемма 10. *Последовательность чисел*

$$\xi = \langle p^{m_1}, \dots, p^{m_q}, n_1, \dots, n_r \rangle,$$

где $q \geq r$, $n_i = [s_{i1}, \dots, s_{iq}] + 1$, $s_{ij} = p^{r_{ij}} t_{ij}$, $(t_{ij}, p) = 1$, $1 \leq j \leq q$, $1 \leq i \leq r$, *является характеристикой тогда и только тогда, когда для любых чисел* $0 \leq \alpha_i \leq p^{l_i}$, $1 \leq i \leq r$, *справедливы условия*

(a) $\max\{m_{\beta+1}, \dots, m_e\} \leq \alpha$, $m_{e+1} = \dots = m_q \rightleftharpoons m$, $m \geq \max\{m_1, \dots, m_e\}$, $p^{m_i} = |g_i|$, $1 \leq i \leq \beta$,

(b) $0 \leq r_{ij} \leq m_j$, $\max\{m_j - r_{ij} \mid 1 \leq j \leq q\} = l_i$,

(c) $\bigwedge\limits_{j=1}^{q} \left[\sum\limits_{i=1}^{r} \alpha_i s_{ij} \equiv 0 (\operatorname{mod} p^{m_j})\right] \Leftrightarrow \bigwedge\limits_{i=1}^{r} \left[\bigwedge\limits_{j=1}^{q} (\alpha_i s_{ij} \equiv 0 (\operatorname{mod} p^{m_j}))\right]$,

(d) $\min\left\{\exp\left(p, \sum\limits_{i=1}^{r} \alpha_i s_{ij}\right) \mid \beta + 1 \leq j \leq e\right\} \leq h_{G_0 \oplus G_1}\left(\sum\limits_{i=1}^{r} \alpha_i a'_i\right)$,

где $a'_i \rightleftharpoons \operatorname{pr}_H(a_i)$ *— проекция элемента* a_i *на подгруппу* $G' = G_0 \oplus G_1$.

Доказательство. Так как группа G' удовлетворяет теореме 2, из леммы 7 вытекает данная лемма. $\square$

Таким образом, условие 2 справедливо.

3. Пусть даны две базы Y^ε, $\varepsilon = 0, 1$, одной и той же характеристики

$$\chi = \langle p^{m_1}, \dots, p^{m_e}, p^m, \dots, p^m, n_1, \dots, n_r \rangle$$

и конечные подгруппы

$$B^\varepsilon \supseteq (Y^\varepsilon). \tag{33}$$

По определению базы Y^ε характеристики χ имеем

$$(Y^\varepsilon) = \left(y_1^\varepsilon\right) \oplus \dots \oplus \left(y_q^\varepsilon\right) = G_2 \oplus A^\varepsilon \oplus D_m, \tag{34}$$

где $A^\varepsilon = \left(y_{\beta+1}^\varepsilon\right) \oplus \dots \oplus \left(y_e^\varepsilon\right)$, $D_m = \left(y_{e+1}^\varepsilon\right) \oplus \dots \oplus \left(y_q^\varepsilon\right) \subseteq D$. Отсюда и из (33) следует, что существуют подгруппы $D^\varepsilon \subseteq D$ и $B_0^\varepsilon \subseteq B^\varepsilon$ такие, что B_0^ε изоморфна некоторой подгруппе G' и

$$B^\varepsilon = G_2 \oplus B_0^\varepsilon \oplus D^\varepsilon, \tag{35}$$

так что с учетом (33) имеем $D^\varepsilon \supseteq D_m$. Тогда согласно (34), (35) можно считать с точностью до изоморфизма, что

$$A^\varepsilon \subseteq B_0^\varepsilon \subseteq G'. \tag{36}$$

Через n_i^ε обозначим координату элемента $\operatorname{pr}_{A^\varepsilon}(a_i) \rightleftharpoons a'_i$. Поскольку $\operatorname{Cor}(Y^\varepsilon, a_i, n_i)$, то $n_i^0 = n_i^1 \rightleftharpoons n'_i$. Подгруппа G' удовлетворяет условию 3 теоремы 2. Легко проверить, что $Y_0^\varepsilon = \left\langle y_{\beta+1}^\varepsilon, \dots, y_e^\varepsilon \right\rangle$ будет базой в группе $\langle G', a'_1, \dots, a'_r \rangle$ характеристики $\chi' = \langle p^{m_{\beta+1}}, \dots, p^{m_e}, n'_1, \dots, n'_r \rangle$. Тогда по теореме 2 существуют база $Y_0^2 = \left\langle y_{\beta+1}^2, \dots, y_e^2 \right\rangle$ характеристики χ' и подгруппа $B_0^2 \subseteq G'_0$ такие, что существуют вложения

$$\varphi_0^\varepsilon : B_0^\varepsilon \to B_0^2, \quad \varphi_0^\varepsilon Y_0^\varepsilon = Y_0^2.$$

Не умаляя общности, можно считать, что $D^0 = D^1 \cong C_{p^n}^\gamma$ для некоторого числа $n \geq m$. Положим

$$Y^2 = \left\langle g_1, \dots, g_\beta, y_{\beta+1}^2, \dots, y_e^2, y_{e+1}^2, \dots, y_q^2 \right\rangle, \quad B^2 = G_2 \oplus B_0^2 \oplus D^0,$$

где $\left|y_i^2\right| = p^n$, $e + 1 \leq i \leq q$.

Легко проверить, что существуют вложения $\varphi^\varepsilon : B^\varepsilon \to B^2$ такие, что $\varphi^\varepsilon \restriction G_2 \oplus D^0 = \mathrm{id}$, $\varphi^\varepsilon Y^\varepsilon = Y^2$, $\varphi^\varepsilon \restriction B_0^\varepsilon = \varphi_0^\varepsilon$, т. е. φ^ε — требуемые вложения.

Таким образом, условие 3 доказано.

Для доказательства справедливости условия 4 нам нужна следующая

Лемма 11. *Для любой частичной функции $f : \mathbb{HF}(G) \to \mathbb{HF}(G)$, определенной Σ-формулой с параметрами A_0, справедливо условие: если $u \in \delta f$, то существует база Y подмножества $\operatorname{sp} u$ такая, что верно $\operatorname{sp} f(u) \subseteq \langle Y \rangle$.*

Доказательство. Пусть график функции f задан Σ-формулой $\Phi(x, y, A_0)$ и

$$u = \varkappa(X),\ f(u) = \tau(Z),\ X, Z \in G^{<\omega},\ m = \operatorname{per}(A_0, \operatorname{sp} X, \operatorname{sp} Z). \tag{37}$$

Пусть $Y = \langle y_1, \dots, y_q \rangle$ — база подмножества $\operatorname{sp} X$ такая, что $|y_{\beta+1}| = \dots = |y_q| = p^m$. Положим

$$A = (Y), \quad B = (Y \cup \operatorname{sp} Z), \tag{38}$$

а через C обозначим такую конечную подгруппу G, что

$$B \subseteq C, \quad \mathbb{HF}(C) \models \Phi(u, \tau(Z), A_0). \tag{39}$$

Тогда для некоторых подгрупп A_0', B_0, C_0, изоморфных подгруппам $G' = G_0 \oplus G_1$, и $D_0^1, D^2 \subseteq D$ справедливы равенства

$$A = A_0' \oplus G_2 \oplus D^1, \tag{40}$$

$$B = B_0 \oplus G_2 \oplus D^1, \tag{41}$$

$$C = C_0 \oplus G_2 \oplus D^2, \tag{42}$$

где $D^1 \cong C_{p^m}^{\gamma}$, $D^2 \cong C_{p^n}^{\gamma}$ для некоторого $n \geq m$.

Покажем, что

$$A_0' \subseteq B_0 \subseteq C_0. \tag{43}$$

Пусть

$$x \in B_0. \tag{44}$$

Отсюда и из (39) имеем $x \in C$. В силу (42) для некоторых элементов $c_0 \in C_0$, $g \in G_2$, $d \in D^2$ верно

$$x = c_0 + g + d. \tag{45}$$

Так как $\operatorname{per}(B) = p^m$, то $|x| \leq p^m$. Следовательно, $|d| \leq p^m$, т. е. $d \in D^1$. Из (41), (42), (44) имеем $c_0 \in B_0$. Тогда из (41), (45) получим $g = d = 0$, т. е. $x = c_0 \in C$ и, значит, $B_0 \subseteq C_0$. Аналогично $A_0' \subseteq B_0$, т. е. (43) доказано.

С точностью до изоморфизма можно считать, что подгруппы $A_0' \subseteq B_0 \subseteq C_0$ содержатся в G_0', для которой справедливо условие 3 теоремы 2. Допустим, что $A_0' \neq B_0$. Тогда по следствию 5 существует вложение $\psi_0 : C_0 \to G_0'$ такое, что $\psi_0 \upharpoonright A_0' = \mathrm{id}$, $\psi_0 B_0 \not\subseteq C_0$. Вложение ψ_0 можно продолжить до вложения $\psi : C \to G$, где $\psi \upharpoonright G_2 \oplus D^2 = \mathrm{id}$. Тогда $\psi \upharpoonright A = \mathrm{id}$, $\psi B \not\subseteq C$. Из (37), (38) по лемме 6 в [1] имеем

$$f(u) = f(\varkappa(\psi X)) = \tau(\psi Z) \neq \tau(Z).$$

Получили противоречие, т. е. $A_0' = B_0$. Следовательно, $A = B$ и $\operatorname{sp} Z \in A = (Y)$.

Лемма, а вместе с ней теорема доказаны. $\square$

Из теорем 3 и A вытекает

Следствие 7. *Пусть абелева p-группа G такая же, как в теореме 3. Тогда для любого конечного подмножества $A_0 \supseteq \{g_1, \dots, g_\beta\}$ существует универсальная Σ-функция $U^{A_0}(x, y) \in F\Sigma(\mathbb{HF}(G), A_0)$ для семейства одноместных функций $\mathfrak{F}^{A_0}$ такая, что для любой функции $f \in \mathfrak{F}^{A_0}$ справедливо равенство: $\lambda y U^{A_0}(n, y) = f(y)$ для некоторого n.*

Любая абелева p-группа G есть прямая сумма редуцированной и делимой частей. Поэтому для G справедливо условие либо теоремы 2, либо теоремы 3. Отсюда и из теорем 2 и 3 вытекает

Следствие 8. *Любая абелева p-группа является Σ-ограниченной алгебраической системой.*

Следствие 9. *Пусть G — абелева p-группа. Тогда в $\mathbb{HF}(G)$ существует универсальная Σ-функция для семейства всех одноместных Σ-функций.*

Доказательство. Пусть $A_0 \subseteq G$ — конечное подмножество, относительно которого группа G Σ-ограниченная, и $\langle A_0 \rangle = (a_1) \oplus \dots \oplus (a_e)$ — некоторое фиксированное разложение, X — конечное множество и $Y_X^{A_0}$— база подмножества X относительно A_0. Положим $A_0^1 = \{a_1, \dots, a_e\}$ и $X^* = A_0^1 \cup X$.

Допустим, что для группы G справедливо условия теоремы 2. Тогда подгруппы $\langle Y_X^{A_0} \rangle$ и $\langle Y_{X^*}^{\varnothing} \rangle$ порождаются одним и тем же множеством X^*. Таким образом, $\langle Y_X^{A_0} \rangle = \langle Y_{X^*}^{\varnothing} \rangle$.

Пусть для группы G справедливо условие теоремы 3. Тогда существует такое m, что для подгруппы H, порожденной множеством $X \cup A_0^1 \cup D^m$, справедливо равенство $H = (y_1) \oplus \dots \oplus (y_q)$ и $Y_X^{A_0} = \langle y_1, \dots, y_q \rangle$, где $D^m = D[p^m]$, D — делимая часть группы G. Тогда $Y_{X^*}^{\varnothing} \rightleftharpoons Y_X^{A_0}$ будет базой и для множества $X \cup A_0^1$ относительно пустого множества.

Итак, в обоих случаях справедливо условие теоремы B. Тогда по этой теореме, где C и C^1 нужно заменить на A_0 и A_0^1, получаем требуемое. $\square$

В заключение выражаю благодарность Ю. Л. Ершову и С. С. Гончарову, работы, советы и внимание которых оказали большую помощь при работе над данной статьей.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хисамиев А. Н.* Σ-ограниченные алгебраические системы и универсальные функции. I // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 1. С. 217–235.
2. *Ершов Ю. Л.* Определимость и вычислимость. Новосибирск: Научная книга, 1996.
3. *Гончаров С. С.* Счетные булевы алгебры и разрешимость. Новосибирск: Научная книга, 1996.
4. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. Л.* Основы теории групп. М.: Наука, 1982.
5. *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы. М.: Мир, 1974. Т. 1.
6. *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы. М.: Мир, 1977. Т. 2.
7. *Хисамиев А. Н.* О верхней полурешетке Ершова // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 1. С. 211–228.

Статья поступила 28 октября 2008 г.

Хисамиев Асылхан Назифович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
hisamiev@math.nsc.ru