Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2010. Том 51, № 3

УДК 517.5+517.925.44

ОБ АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЙ И УЗЛОВЫХ ТОЧЕК ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ

А. Ю. Трынин

Аннотация. Получены асимптотические формулы для значений дифференциальных операторов второго порядка с коэффициентом ограниченной вариации, зависящим от спектрального параметра. Построен контрпример, показывающий, что требование ограниченности вариации существенно для сохранения порядка погрешности полученных асимптотических формул.

Ключевые слова: дифференциальный оператор, асимптотическая формула, ограниченная вариация.

Введение

В статье получены некоторые асимптотические формулы для значений дифференциальных операторов, являющихся решениями задачи Коши, с дифференциальным выражением в виде линейного уравнения второго порядка $y'' + [\lambda - q_\lambda(x)]y = 0$, где потенциал q_λ может меняться в зависимости от λ, т. е. является функцией двух переменных x и λ. Характер зависимости потенциала от λ обусловлен лишь тем, что при каждом λ функция q_λ принадлежит шару с центром в нулевом элементе и радиусом, растущим медленнее $\sqrt{\lambda}$, в пространстве функций ограниченной вариации, исчезающих в нуле.

Рассматриваемая задача тесно связана с изучением свойств оператора Штурма — Лиувилля в спектральной теории дифференциальных операторов и тонких исследований асимптотических свойств специальных функций математической физики, связанных с ортогональными многочленами [1–4], где потенциал или мера фиксированы. Несмотря на то, что эта проблематика достаточно хорошо изучена в классической литературе (см., например, [5–9]), и по сей день в этой области активно ведутся интересные исследования.

В [8] для фиксированного суммируемого потенциала получены асимптотические формулы для собственных функций и собственных значений классической задачи Штурма — Лиувилля с помощью современной трактовки метода Лиувилля — Стеклова [2, гл. VIII, § 8.61].

Работы [10, 11] посвящены изучению асимптотики собственных функций и собственных значений оператора Штурма — Лиувилля с сингулярным потенциалом, являющимся обобщенной функцией первого порядка, $q(x) = u'(x)$, где $u \in L_2[0, \pi]$.

К исследованиям, в которых оценки изучаемых параметров операторов Штурма — Лиувилля равномерны по потенциалу q в шаре пространства Соболева, можно отнести работу [12].

В фундаментальных работах [13–15] строится аналог осцилляционной теории Штурма распределения нулей собственных функций на пространственной сети, или графах.

Статья [16] посвящена изучению асимптотики решений задачи Штурма — Лиувилля с потенциалом и спектральным параметром, терпящими разрыв первого рода внутри области определения решения.

В работах [17, 18] проведены оценки норм в пространствах Чебышёва и Соболева соответственно некоторых обобщений операторов Штурма — Лиувилля с весовыми функциями, отделенными от нуля.

К исследованиям операторов Штурма — Лиувилля с потенциалом, зависящим от спектрального параметра, можно отнести цикл работ посвященных изучению пучков дифференциальных операторов (см., например, [19, 20]).

В работе [21] получен критерий полноты системы собственных функций в пространстве $L_2[0,1]$ оператора Штурма — Лиувилля с вещественным непрерывным потенциалом q_λ, зависящим от спектрального параметра λ, из шара фиксированного радиуса в пространстве $C[0,1]$, т. е. такого, что существует $\rho_0 > 0$, для которого $\|q_\lambda\|_{C[0,1]} \le \rho_0$ при всех действительных λ. Кроме того, здесь же приведено приложение этих исследований к изучению спектральных свойств некоторой нелинейной задачи.

В предлагаемой работе получены некоторые асимптотические формулы для значений дифференциальных операторов, являющихся решениями задачи Коши, с дифференциальным выражением в виде линейного уравнения второго порядка $y'' + [\lambda - q_\lambda(x)]y = 0$, где потенциал q_λ может меняться в зависимости от λ, т. е. является функцией двух переменных x и λ. Характер зависимости потенциала от λ обусловлен лишь тем, что при каждом λ функция q_λ принадлежит шару с центром в нулевом элементе и радиусом, растущим медленнее $\sqrt{\lambda}$, в пространстве функций ограниченной вариации, исчезающих в нуле (с нормой $\|q_\lambda\|_V = V_0^\pi[q_\lambda]$). Оценка погрешности асимптотических формул в предлагаемой работе равномерна на указанных шарах. Этим объясняется выбор таких ограничений на исследуемые объекты, как действительнозначность функций q_λ (так как в изучаемой ситуации нет ограничения на гладкость по переменной λ, например, нет требования аналитичности по λ функции q_λ) и неотрицательность λ (радиусы шаров в пространстве функций ограниченной вариации, исчезающих в нуле, растут с увеличением λ). Аналогичные задачи могут решаться и для комплексных $q_\lambda(z)$ и λ. В предлагаемой работе приведена также асимптотика нулей и производных значений рассматриваемых операторов.

Кроме того, построен пример фиксированной непрерывной функции $q \equiv q_\lambda$, для которой полученные асимптотические формулы имеют меньший порядок погрешности аппроксимации на всюду плотном множестве отрезка $[0, \pi]$. Таким образом, показано, что требование ограниченности вариации потенциала существенно в отличие от его непрерывности для сохранения порядка аппроксимации предлагаемых в этой работе, а также классических асимптотических формул (см., например, [6, гл. IV, § 7] или [7, гл. 1, § 2]).

1. Формулировки основных результатов

Пусть $\rho_\lambda \ge 0$ и при каждом неотрицательном λ функция $q_\lambda(x)$ есть произвольный элемент из шара $V_{\rho_\lambda}[0,\pi]$ радиуса ρ_λ в пространстве функций с ограниченным изменением, исчезающих в нуле, т. е.

$$V_0^\pi[q_\lambda] \le \rho_\lambda, \quad q_\lambda(0) = 0. \tag{1}$$

Тогда для любого потенциала $q_\lambda \in V_{\rho_\lambda}[0,\pi]$ при $\lambda \to +\infty$ нули решения задачи Коши

$$y'' + (\lambda - q_\lambda(x))y = 0, \quad y(0,\lambda) = 1, \quad y'(0,\lambda) = 0, \tag{2}$$

или задачи Коши

$$y'' + (\lambda - q_\lambda(x))y = 0, \quad y(0,\lambda) = 0, \quad y'(0,\lambda) = 1, \tag{3}$$

попадающие в отрезок $[0,\pi]$ и перенумерованные в порядке возрастания, обозначим

$$0 \le x_{0,\lambda} < x_{1,\lambda} < \ldots < x_{n(\lambda),\lambda} \le \pi \quad (x_{-1,\lambda} < 0, x_{n(\lambda)+1,\lambda} > \pi). \tag{4}$$

Здесь $x_{-1,\lambda}$ и $x_{n(\lambda)+1,\lambda}$ обозначают нули продолжения решения задач (2) и (3) на действительную ось после доопределения функции

$$q_\lambda(x) = \begin{cases} q_\lambda(x) & \text{при } x \in [0,\pi], \\ 0 & \text{при } x \notin [0,\pi]. \end{cases}$$

Замечание 1. Обратим внимание на инвариантность решений задач (2) и (3) относительно сдвига значения λ на произвольную константу. Поэтому ограничение $q_\lambda(0) = 0$ не только превращает полунорму $V_0^\pi[q_\lambda]$ в норму, а рассматриваемое подмножество функций ограниченной вариации в нормированное пространство, но также играет роль нормировки потенциалов. При решении обратных задач спектральной теории дифференциальных операторов (см. [22]) в подобной ситуации используется, например, ограничение вида $\int\limits_0^\pi q_\lambda(\tau)\,d\tau = 0$.

Получим асимптотические формулы решений задач Коши (2) и (3). При этом по сравнению с хорошо известными результатами классической спектральной теории дифференциальных операторов, обеспечивающими такой же порядок приближения, правда, в случае фиксированной не зависящей от λ функции q_λ (см., например, [7; 9, гл. 1, § 1.1, замечание 1.1.1] или [6, гл. IV, § 7]), удалось снять требование непрерывности потенциала q_λ.

Теорема 1. *Пусть*

$$\rho_\lambda \ge 0 \quad \rho_\lambda = o(\sqrt{\lambda}) \quad \text{при } \lambda \to \infty. \tag{5}$$

Тогда существует такое $\lambda_1 > 4\pi^2\rho_\lambda^2$, что для всех $\lambda \ge \lambda_1$, любого потенциала $q_\lambda \in V_{\rho_\lambda}[0,\pi]$ (см. (1)) и произвольного $x \in [0,\pi]$ решение задачи Коши (2) удовлетворяет следующим неравенствам:

$$\left| y(x,\lambda) - \cos\sqrt{\lambda}x - \beta(x,\lambda)\frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}} \right| \le \frac{\rho_\lambda(1+\pi\rho_\lambda)}{2\lambda}, \tag{6}$$

$$|y'(x,\lambda) + \sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x - \beta(x,\lambda)\cos\sqrt{\lambda}x| \le \frac{\rho_\lambda(1+\pi\rho_\lambda)}{2\sqrt{\lambda}}, \tag{7}$$

где

$$\beta(x,\lambda) = \frac{1}{2}\int\limits_0^x q_\lambda(\tau)\,d\tau.$$

Теорема 1′. *Пусть выполняются соотношения* (5). *Тогда существует такое* $\lambda_1 > 4\pi^2\rho_\lambda^2$, *что для всех* $\lambda \geq \lambda_1$, *любого потенциала* $q_\lambda \in V_{\rho_\lambda}[0,\pi]$ (*см.* (1)) *и произвольного* $x \in [0,\pi]$ *решение задачи Коши* (3) *удовлетворяет неравенствам*

$$\left| y(x,\lambda) - \frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}} + \delta(x,\lambda)\cos\sqrt{\lambda}x \right| \leq \frac{\rho_\lambda(1+\pi\rho_\lambda)}{2\lambda\sqrt{\lambda}}, \tag{8}$$

$$|y'(x,\lambda) - \cos\sqrt{\lambda}x - \sqrt{\lambda}\delta(x,\lambda)\sin\sqrt{\lambda}x| \leq \frac{\rho_\lambda(1+\pi\rho_\lambda)}{2\lambda}, \tag{9}$$

где

$$\delta(x,\lambda) = \frac{1}{2\lambda}\int\limits_0^x q_\lambda(\tau)\,d\tau.$$

Для исследования поведения нулей решений изучаемых задач Коши и значений производных в этих нулях можно использовать следующие теоремы.

Теорема 2. *Пусть*

$$\rho_\lambda \geq 0, \quad \rho_\lambda = o\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\ln\lambda}\right) \ \text{при } \lambda \to \infty. \tag{10}$$

Тогда для любого потенциала $q_\lambda \in V_{\rho_\lambda}[0,\pi]$ *при* $\lambda \to \infty$ *для нулей решений задачи Коши* (2), *попадающих в* $[0,\pi]$ *и перенумерованных в порядке возрастания согласно* (4), *справедливы следующие асимптотические формулы:*

$$x_{k,\lambda} = \frac{(2k+1)\pi}{2\sqrt{\lambda}} + o\left(\frac{\lambda^{-\frac{1}{2}}}{\ln\lambda}\right), \tag{11}$$

$$y'(x_{k,\lambda}) = \sqrt{\lambda}\left((-1)^{(k+1)} + o\left(\frac{1}{\ln\lambda}\right)\right) \tag{12}$$

при $\lambda \to \infty$, *где скорость стремления к нулю в о-символике не зависит ни от* $q_\lambda \in V_{\rho_\lambda}[0,\pi]$, *ни от* $k : 0 \leq k \leq n$.

Теорема 2′. *Пусть* ρ_λ *удовлетворяют соотношению* (10). *Тогда для любого потенциала* $q_\lambda \in V_{\rho_\lambda}[0,\pi]$ *для нулей решений задачи Коши* (3), *попадающих в* $[0,\pi]$ *и перенумерованных в порядке возрастания согласно* (4), *справедливы следующие асимптотические формулы:*

$$x_{k,\lambda} = \frac{k}{\sqrt{\lambda}}\pi + o\left(\frac{\lambda^{-\frac{1}{2}}}{\ln\lambda}\right), \tag{13}$$

$$y'(x_{k,\lambda},\lambda) = (-1)^k + o\left(\frac{1}{\ln\lambda}\right) \tag{14}$$

при $\lambda \to \infty$, *где стремление к нулю в о-символике равномерно по* $q_\lambda \in V_{\rho_\lambda}[0,\pi]$ *и* $k : 0 \leq k \leq n$.

Для любого фиксированного представителя $q \in L[0,\pi]$ в силу леммы Римана — Лебега и интегрального представления (20) оценка погрешности аппроксимации в (6) имеет вид

$$\left| y(x,\lambda) - \cos\sqrt{\lambda}x - \beta(x,\lambda)\frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}} \right| = o\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right),$$

где o-символика зависит от $q \in L[0,\pi]$.

Из теоремы 1 следует, что порядок погрешности асимптотической формулы (6) для любого фиксированного представителя $q_\lambda \equiv q$ множества функций ограниченной вариации есть $O\bigl(\frac{1}{\lambda}\bigr)$. Следующая теорема демонстрирует, что если отказаться от ограниченности изменения q, то такой порядок не может быть достигнут не только на классе функций из $C[0,\pi]$, например в шарах, но даже для конкретного представителя пространства непрерывных потенциалов. Для любого не более чем счетного подмножества сегмента $(0,\pi]$ существует непрерывный потенциал q такой, что асимптотическая формула (6) для решения задачи Коши (2) ни при каком фиксированном $\rho_\lambda \equiv \mathrm{const} < \infty$ не будет верна ни в какой точке этого множества.

Теорема 3. *Пусть счетное множество $X = \{x_l\}_{l=1}^{\infty}$ содержится в отрезке $[0,\pi]$ и последовательности действительных чисел $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяют условиям $\lambda_n \nearrow \infty$, $A_n \searrow 0$ при $n \to \infty$. Кроме того, существует число $\alpha : -\frac{1}{2} < \alpha < 0$ такое, что для всех натуральных n будет выполняться неравенство $A_n \geq \lambda_n^{\alpha}$. Тогда для любого $x \in X$ имеет место неравенство*

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{8\sqrt{\lambda_n}}{A_n} \left| y(x,\lambda_n) - \cos\sqrt{\lambda_n}x - \beta(x,\lambda_n)\frac{\sin\sqrt{\lambda_n}x}{\sqrt{\lambda_n}} \right| \geq x. \tag{15}$$

2. Доказательства теорем

Прежде чем доказывать эти теоремы, получим оценки скорости убывания интегралов в лемме Римана — Лебега для функций из шара (1).

Лемма 1. *Пусть $\rho_\lambda \geq 0$ при $\lambda \geq 0$. Тогда для любого потенциала $q_\lambda \in V_{\rho_\lambda}[0,\pi]$ (1) и произвольного $x \in [0,\pi]$ справедливы неравенства*

$$\left| \int\limits_0^x \sin\sqrt{\lambda}(x-2\tau) q_\lambda(\tau)\,d\tau \right| \leq \frac{\rho_\lambda}{\sqrt{\lambda}}, \tag{16}$$

$$\left| \int\limits_0^x \cos\sqrt{\lambda}(x-2\tau) q_\lambda(\tau)\,d\tau \right| \leq \frac{\rho_\lambda}{\sqrt{\lambda}}. \tag{17}$$

Доказательство. В силу теоремы о среднем в форме Бонне [23, § 4.14] для любых интегрируемой по Риману функции f и неотрицательной неубывающей на отрезке $[a,b]$ функции ϕ найдется $\xi \in [a,b]$ такая, что

$$\int\limits_a^b f(x)\phi(x)\,dx = \phi(b)\int\limits_\xi^b f(x)\,dx.$$

Потенциал q_λ как функция с ограниченным изменением, исчезающая в нуле, по теореме Жордана [24, гл. II, § 4, п. 10] может быть единственным образом представлен в виде разности своих положительного и отрицательного изменений

$$q_\lambda(x) = q_{\lambda,1}(x) - q_{\lambda,2}(x).$$

Тогда для любого $x \in [0,\pi]$ имеем $V_0^x[q_\lambda] = V_0^x[q_{\lambda,1}] + V_0^x[q_{\lambda,2}]$. Теперь

$$\left|\int_0^x \sin\sqrt{\lambda}(x-2\tau)q_\lambda(\tau)\,d\tau\right|$$
$$\le \left|q_{\lambda,1}(x)\int_{\xi_1}^x \sin\sqrt{\lambda}(x-2\tau)\,d\tau - q_{\lambda,2}(x)\int_{\xi_2}^x \sin\sqrt{\lambda}(x-2\tau)\,d\tau\right| \le V_0^x[q_\lambda]\frac{1}{\sqrt{\lambda}}.$$

Лемма 1 доказана.

Доказательство теоремы 1. Задача Коши (2) в случае, когда $q_\lambda \in L[0,\pi]$, имеет единственное обобщенное решение, которое можно интерпретировать как непрерывно дифференцируемое решение интегрального уравнения (см., например, [25, гл. IV, § 1, 2])

$$y(x,\lambda) = \cos\sqrt{\lambda}x + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_0^x \sin\sqrt{\lambda}(x-\tau)q_\lambda(\tau)y(\tau,\lambda)\,d\tau. \tag{18}$$

Для потенциала $q_\lambda \in V_{\rho_\lambda}[0,\pi]$ методом, изложенным в [7, гл. I, § 2, леммы 2.1, 2.2], устанавливается, что для $\lambda \ge \lambda_0$, где λ_0 выбирается настолько большим, чтобы для всех $\lambda \ge \lambda_0$ в силу (5) выполнялось соотношение $\lambda > 4\pi^2\rho_\lambda^2$, справедлива оценка

$$|y(x,\lambda) - \cos\sqrt{\lambda}x| \le \frac{2\rho_\lambda}{\sqrt{\lambda}}x. \tag{19}$$

Пусть $y(x,\lambda)$ — решение задачи Коши (2) или интегрального уравнения (18). Согласно методу Лиувилля — Стеклова [1, 2] подставим тождество (18) вновь под интеграл в (18):

$$\begin{aligned} y(x,\lambda) &= \cos\sqrt{\lambda}x + \left[\frac{1}{2}\int_0^x q_\lambda(\tau)\,d\tau\right]\frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}} + \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\int_0^x \sin\sqrt{\lambda}(x-2\tau)q_\lambda(\tau)\,d\tau \\ &+ \frac{1}{\lambda}\int_0^x \sin\sqrt{\lambda}(x-\tau)q_\lambda(\tau)\,d\tau\int_0^\tau \sin\sqrt{\lambda}(\tau-\xi)q_\lambda(\xi)\cos\sqrt{\lambda}\xi\,d\xi \\ &+ \frac{1}{\lambda}\int_0^x \sin\sqrt{\lambda}(x-\tau)q_\lambda(\tau)\,d\tau\int_0^\tau \sin\sqrt{\lambda}(\tau-\xi)q_\lambda(\xi)(y(\xi,\lambda)-\cos\sqrt{\lambda}\xi)\,d\xi. \end{aligned} \tag{20}$$

Рассмотрим отдельно интеграл

$$\begin{aligned} &\int_0^x \sin\sqrt{\lambda}(x-\tau)q_\lambda(\tau)\,d\tau\int_0^\tau \sin\sqrt{\lambda}(\tau-\xi)q_\lambda(\xi)\cos\sqrt{\lambda}\xi\,d\xi \\ &= \frac{1}{4}\int_0^x\int_0^\tau \cos\sqrt{\lambda}(x-2\tau+2\xi)q_\lambda(\tau)q_\lambda(\xi)\,d\xi d\tau + \frac{1}{4}\int_0^x\int_0^\tau \cos\sqrt{\lambda}(x-2\tau)q_\lambda(\tau)q_\lambda(\xi)\,d\xi d\tau \\ &- \frac{1}{4}\cos\sqrt{\lambda}x\int_0^x\int_0^\tau q_\lambda(\tau)q_\lambda(\xi)\,d\xi d\tau - \frac{1}{4}\int_0^x\int_0^\tau \cos\sqrt{\lambda}(x-2\xi)q_\lambda(\tau)q_\lambda(\xi)\,d\xi d\tau. \end{aligned} \tag{21}$$

Здесь разность второго и четвертого интегралов можно оценить с помощью теоремы Фубини следующим образом. Во втором слагаемом сменим порядок интегрирования, а в четвертом поменяем местами обозначения переменных интегрирования:

$$\frac{1}{4}\int\limits_0^x\int\limits_0^\tau \cos\sqrt{\lambda}(x-2\tau)q_\lambda(\tau)q_\lambda(\xi)\,d\xi d\tau - \frac{1}{4}\int\limits_0^x\int\limits_0^\tau \cos\sqrt{\lambda}(x-2\xi)q_\lambda(\tau)q_\lambda(\xi)\,d\xi d\tau$$

$$= \frac{1}{4}\int\limits_0^x q_\lambda(\xi)\,d\xi\int\limits_\xi^x \cos\sqrt{\lambda}(x-2\tau)q_\lambda(\tau)\,d\tau - \frac{1}{4}\int\limits_0^x q_\lambda(\xi)\,d\xi\int\limits_0^\xi \cos\sqrt{\lambda}(x-2\tau)q_\lambda(\tau)\,d\tau.$$

Для каждого фиксированного $\xi\in[0,x]\subset[0,\pi]$ положим

$$\tilde{q}_\lambda(\tau) = \begin{cases} q_\lambda(\tau) & \text{при } \tau\in[\xi,\pi], \\ -q_\lambda(\tau) & \text{при } \tau\in[0,\xi). \end{cases}$$

Для любого $\xi\in[0,x]\subset[0,\pi]$ функция $\tilde{q}_\lambda(\tau)$ принадлежит $V_{3\rho_\lambda}[0,\pi]$. Следовательно, в силу леммы 1

$$\left|\frac{1}{4}\int\limits_0^x\int\limits_0^\tau \cos\sqrt{\lambda}(x-2\tau)q_\lambda(\tau)q_\lambda(\xi)\,d\xi d\tau - \frac{1}{4}\int\limits_0^x\int\limits_0^\tau \cos\sqrt{\lambda}(x-2\xi)q_\lambda(\tau)q_\lambda(\xi)\,d\xi d\tau\right|$$

$$= \left|\frac{1}{4}\int\limits_0^x q_\lambda(\xi)\,d\xi\int\limits_0^x \cos\sqrt{\lambda}(x-2\tau)\tilde{q}_\lambda(\tau)\,d\tau\right| \le \frac{3\pi\rho_\lambda^2}{4\sqrt{\lambda}}. \tag{22}$$

После смены порядка интегрирования в первом интеграле правой части (21) и замены переменных $\eta=\tau-\xi$ получаем

$$\frac{1}{4}\int\limits_0^x q_\lambda(\xi)\,d\xi\int\limits_\xi^x \cos\sqrt{\lambda}(x-2\tau+2\xi)q_\lambda(\tau)\,d\tau$$

$$= \frac{1}{4}\int\limits_0^x q_\lambda(\xi)d\xi\int\limits_0^{x-\xi} \cos\sqrt{\lambda}(x-2\eta)q_\lambda(\eta+\xi)\,d\eta.$$

Чтобы для оценки этого слагаемого можно было применить лемму 1, при любом фиксированном ξ к функции $q_\lambda(\eta+\xi)$ добавим и отнимем $-q_\lambda(\xi)$. При этом функция $(q_\lambda(\eta+\xi)-q_\lambda(\xi))$ как функция переменной η, доопределенная на $[\pi-\xi,\pi]$ нулем, принадлежит шару $V_{2\rho_\lambda}[0,\pi]$.

Отсюда, а также из оценок (16), (17), (21), (22) получим

$$\left|\int\limits_0^x \sin\sqrt{\lambda}(x-\tau)q_\lambda(\tau)\,d\tau\int\limits_0^\tau \sin\sqrt{\lambda}(\tau-\xi)q_\lambda(\xi)\cos\sqrt{\lambda}\xi\,d\xi\right|$$

$$\le \left|\frac{1}{4}\int\limits_0^x q_\lambda(\xi)\,d\xi\int\limits_0^{x-\xi} \cos\sqrt{\lambda}(x-2\eta)[q_\lambda(\eta+\xi)-q_\lambda(\xi)]\,d\eta\right|$$

$$+\left|\frac{1}{4}\int\limits_0^x q_\lambda^2(\xi)\,d\xi\int\limits_0^{x-\xi} \cos\sqrt{\lambda}(x-2\eta)\,d\eta\right| + \left|\frac{1}{4}\cos\sqrt{\lambda}x\right|\left|\int\limits_0^x\int\limits_0^\tau q_\lambda(\tau)q_\lambda(\xi)\,d\xi d\tau\right|$$

$$+\left|\frac{1}{4}\int\limits_0^x\int\limits_0^\tau \cos\sqrt{\lambda}(x-2\tau)q_\lambda(\tau)q_\lambda(\xi)\,d\xi d\tau\right.$$

$$\left.-\frac{1}{4}\int\limits_0^x\int\limits_0^\tau \cos\sqrt{\lambda}(x-2\xi)q_\lambda(\tau)q_\lambda(\xi)\,d\xi d\tau\right| \le \frac{\rho_\lambda^2\pi}{8}\left(\frac{12}{\sqrt{\lambda}}+\pi\right). \quad (23)$$

Осталось с помощью (5) и (19) оценить

$$\left|\int\limits_0^x \sin\sqrt{\lambda}(x-\tau)q_\lambda(\tau)\,d\tau\int\limits_0^\tau \sin\sqrt{\lambda}(\tau-\xi)q_\lambda(\xi)(y(\xi,\lambda)-\cos\sqrt{\lambda}\xi)\,d\xi\right|$$

$$\le 2\pi\frac{\rho_\lambda^3}{\sqrt{\lambda}}\frac{\pi^2}{2}. \quad (24)$$

Теперь из (20), (23) и (24) для $\lambda > \lambda_0$ и всех $x \in [0,\pi]$ следует, что

$$\left|y(x,\lambda)-\cos\sqrt{\lambda}x-\left[\frac{1}{2}\int\limits_0^x q_\lambda(\tau)\,d\tau\right]\frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}}\right|$$

$$\le\frac{\rho_\lambda}{\lambda}\left(\frac{1}{2}+\pi\rho_\lambda\left\{\frac{\pi}{8}+\frac{3}{2\sqrt{\lambda}}+\frac{\rho_\lambda\pi^2}{\sqrt{\lambda}}\right\}\right).$$

В силу определения шара (5), точнее ограничения на скорость роста радиусов шаров $\rho_\lambda = o(\sqrt{\lambda})$, найдется такое $\lambda_1 \ge \lambda_0$, что для любого $\lambda \ge \lambda_1$ будет справедливо неравенство (6).

Продифференцируем тождество (20) по x и, повторяя технику доказательства (6), с учетом леммы 1 получим (7). Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы $1'$. Для доказательства (8), (9) проводятся аналогичные рассуждения. Сначала устанавливается, что решение задачи (3) для всех $x \in [0,\pi]$ удовлетворяет неравенству

$$\left|y(x,\lambda)-\frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}}\right| \le \frac{2\rho_\lambda}{\lambda}x$$

при $\lambda \ge \lambda_0$, где λ_0 выбирается настолько большим, чтобы для всех $\lambda \ge \lambda_0$ выполнялось соотношение $\lambda > 4\pi^2\rho_\lambda^2$. Так же, как и в случае задачи (2), обнаруживаем существование $\lambda_1 \ge \lambda_0$ таких, что для всех $\lambda > \lambda_1$ будут справедливы неравенства (8), (9). Теорема $1'$ доказана.

Замечание 2. Тем же методом получаются оценки остаточных членов в более точных асимптотических формулах, получаемых итерацией метода Лиувилля — Стеклова [2, § 8.61, (8.61.7)]. В частности, переместив в главную часть асимптотической формулы (6) слагаемое

$$\frac{1}{4\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x\int\limits_0^x\int\limits_0^\tau q_\lambda(\tau)q_\lambda(\xi)\,d\xi d\tau$$

(см. (21)), получим более громоздкую, но несколько более точную формулу вида

$$\left|y(x,\lambda)-\cos\sqrt{\lambda}x-\beta(x,\lambda)\frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}}+\frac{1}{4\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x\int\limits_0^x\int\limits_0^\tau q_\lambda(\tau)q_\lambda(\xi)\,d\xi d\tau\right|$$

$$\le\frac{\rho_\lambda(1+o(\rho_\lambda))}{2\lambda}.$$

Прежде чем доказывать теорему 2, установим справедливость теоремы $2'$.

Доказательство теоремы $2'$. Во-первых, для $k=0$ формулы (13), (14) следуют из условий задачи Коши (3). Далее, пусть $x \neq x_{0,\lambda}$ — некоторый нуль решения $y(x,\lambda)$ задачи Коши (3). Тогда в силу (8)

$$\left|\sin\left(\sqrt{\lambda}x - \arcsin\frac{\int\limits_0^x q_\lambda(\tau)d\tau}{2\sqrt{\lambda}\sqrt{1+\frac{1}{4\lambda}\left[\int\limits_0^x q_\lambda(\tau)d\tau\right]^2}}\right)\right| \leq \frac{\rho_\lambda(1+\pi\rho_\lambda)}{2\lambda}.$$

Разложим функцию арксинус в нуле по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано:

$$\left|\sin\left(\sqrt{\lambda}x - \frac{\int\limits_0^x q_\lambda(\tau)d\tau}{2\sqrt{\lambda}\sqrt{1+\frac{1}{4\lambda}\left[\int\limits_0^x q_\lambda(\tau)d\tau\right]^2}}\right.\right.$$
$$\left.\left. + o\left(\left(\frac{\int\limits_0^x q_\lambda(\tau)d\tau}{2\sqrt{\lambda}\sqrt{1+\frac{1}{4\lambda}\left[\int\limits_0^x q_\lambda(\tau)d\tau\right]^2}}\right)^2\right)\right)\right| \leq \frac{\rho_\lambda(1+\pi\rho_\lambda)}{2\lambda}.$$

Получаем неравенство

$$\left|\left(\sqrt{\lambda}x - \pi m - \frac{\int\limits_0^x q_\lambda(\tau)d\tau}{2\sqrt{\lambda}\sqrt{1+\frac{1}{4\lambda}\left[\int\limits_0^x q_\lambda(\tau)d\tau\right]^2}}\right.\right.$$
$$\left.\left. + o\left(\left(\frac{\int\limits_0^x q_\lambda(\tau)d\tau}{2\sqrt{\lambda}\sqrt{1+\frac{1}{4\lambda}\left[\int\limits_0^x q_\lambda(\tau)\,d\tau\right]^2}}\right)^2\right)\right)\right| \leq \frac{\pi}{2}\frac{\rho_\lambda(1+\pi\rho_\lambda)}{2\lambda},$$

где m — некоторое целое число, или, учитывая ограничение на скорость роста радиусов шаров ρ_λ в (10), — равенство

$$x - \frac{\pi m}{\sqrt{\lambda}} = O\left(\frac{\rho_\lambda}{\lambda}\right) + O\left(\frac{\rho_\lambda^2}{\lambda\sqrt{\lambda}}\right) = o\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}\ln\lambda}\right).$$

Следовательно, найдется $\lambda_0 > 0$ такое, что для всех $\lambda > \lambda_0$ нули решений задачи Коши (3) будут попадать в $\gamma(\lambda)$-окрестность точек $\frac{\pi m}{\sqrt{\lambda}}$, $m \in \mathbb{Z}$, где $\gamma(\lambda) = o\big(\frac{1}{\sqrt{\lambda}\ln\lambda}\big)$. Так как нулевой узел уже определен условиями задачи (3), целое число m по теореме осцилляции должно совпадать с номером узла k согласно нумерации (4). Таким образом, (13) доказана. Формула (14) получается подстановкой (13) в (9). Теорема $2'$ доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть x — нуль решения задачи Коши (2). Продолжим функцию

$$q_\lambda(x) = \begin{cases} q_\lambda(x) & \text{при } x \in [0,\pi], \\ 0 & \text{при } x \notin [0,\pi], \end{cases} \tag{25}$$

после чего сделаем замену независимой переменной

$$x = \frac{2\sqrt{\lambda}+1}{2\sqrt{\lambda}}t - \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}}. \tag{26}$$

Обозначим

$$\hat{y}(t,\hat{\lambda}) = y\left(\frac{2\sqrt{\lambda}+1}{2\sqrt{\lambda}}t - \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}}\right) \quad \text{при } t \in [0,\pi], \tag{27}$$

$$\hat{q}_{\hat{\lambda}}(t) = \left(\frac{2\sqrt{\lambda}+1}{2\sqrt{\lambda}}\right)^2 q_\lambda\left(\frac{2\sqrt{\lambda}+1}{2\sqrt{\lambda}}t - \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}}\right), \quad \hat{\lambda} = \left(\frac{2\sqrt{\lambda}+1}{2\sqrt{\lambda}}\right)^2 \lambda. \tag{28}$$

После замены переменных (26) получаем в силу теоремы Пикара, что функция $\hat{y}(t,\hat{\lambda})$ является одновременно решением задач Коши

$$\hat{y}'' + (\hat{\lambda} - \hat{q}_{\hat{\lambda}})\hat{y} = 0, \quad \hat{y}(t(0),\hat{\lambda}) = y(0,\lambda) = 1, \quad \hat{y}'(t(0),\hat{\lambda}) = 0$$

и

$$\hat{y}'' + (\hat{\lambda} - \hat{q}_{\hat{\lambda}})\hat{y} = 0, \quad \hat{y}(0,\hat{\lambda}) = y\left(-\frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}}\right) = 0, \quad \hat{y}'(0,\hat{\lambda}) = \frac{2\sqrt{\lambda}+1}{2} = \hat{h}(\hat{\lambda}). \tag{29}$$

Кроме того, в силу (25) и (28)

$$\sqrt{\hat{\lambda}} - 1/2 \le \sqrt{\lambda} \le \sqrt{\hat{\lambda}} + 1/2,$$

и соотношение (10) для задачи (29) сохраняется:

$$\hat{q}_{\hat{\lambda}}(0) = 0 \text{ и } V_0^\pi[\hat{q}_{\hat{\lambda}}] \le \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\right)^2 V_0^\pi[q_\lambda] = o\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\ln\lambda}\right) = o\left(\frac{\sqrt{\hat{\lambda}}}{\ln\hat{\lambda}}\right). \tag{30}$$

Для нулей решения задачи (29) асимптотическая формула (13) имеет вид

$$t_{m,\hat{\lambda}} = \frac{m}{\sqrt{\hat{\lambda}}}\pi + o\left(\frac{\hat{\lambda}^{-\frac{1}{2}}}{\ln\hat{\lambda}}\right).$$

Сделав обратную замену, с учетом (27), (28) и (30) для узлов задачи (2) получаем асимптотическую формулу

$$x_{m,\lambda} = \frac{m\pi}{\sqrt{\lambda}} - \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}} + o\left(\frac{\lambda^{-\frac{1}{2}}}{\ln\lambda}\right).$$

После смены нумерации узлов для задачи (2) согласно (4) приходим к (11).

Для доказательства (12) вновь воспользуемся асимптотической формулой (14) для задачи Коши (29)

$$\hat{y}'(t_{m,\hat{\lambda}}) = \hat{h}(\hat{\lambda})((-1)^m + o(1/\ln\hat{\lambda})).$$

Сделав обратную замену, с учетом (27)–(30) для производной в узловых точках задачи (2) имеем асимптотическую формулу

$$y'(x_{m,\lambda}) = \sqrt{\lambda}((-1)^m + o(1/\ln\lambda)).$$

После смены нумерации узлов для задачи (2) согласно (4) получаем (12).

Теорема 2 доказана.

Следствие 1. *Пусть* $V_{\rho_\lambda}[0,\pi]$ — *семейство шаров* (1), *для которых выполняется условие* (10). *Тогда номер* $n = n(\lambda)$ *наибольшего из нулей решения* $y(x,\lambda)$ *задачи Коши* (3) *согласно нумерации* (4) *удовлетворяет соотношению*

$$o(1/\ln\lambda) \leq \sqrt{\lambda} - n < 1 + o(1/\ln\lambda), \tag{31}$$

а для задачи Коши (2) — *соотношению*

$$-1/2 + o(1/\ln\lambda) \leq \sqrt{\lambda} - n < 1/2 + o(1/\ln\lambda). \tag{32}$$

Доказательство. Справедливость (31) и (32) вытекает из определения номера n согласно нумерации (4) и (11) или (13) после продолжения функции $q_\lambda(x) = q_\lambda(\pi)$ и решения задач Коши на множество $\{x : x > \pi\}$. Следствие 1 доказано.

Доказательство теоремы 3. Для $x = 0$ формула (15) верна. Зафиксируем произвольное $x \in (0,\pi]$. Возьмем любую неограниченно возрастающую последовательность действительных чисел $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$, $\lambda_n \nearrow \infty$. Например, таким образом, чтобы при $\lambda = \lambda_n$ на отрезке $[0,\pi]$ было не менее n нулей задачи Коши (2) с любым потенциалом $q \in C[0,\pi]$, $\|q\|_{C[0,\pi]} \leq 1$. Этого можно добиться, в силу теоремы осцилляции (см., например, [7, гл. 1, § 3, теорема 3.3]). Далее, возьмем убывающую последовательность положительных чисел $A_n \searrow 0$ такую, что найдется $\alpha : -\frac{1}{2} < \alpha < 0$, для которого выполняется соотношение $A_n \geq \lambda_n^\alpha$. Из $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ выберем подпоследовательность $\{A_{n_j}\}_{j=1}^\infty$ так, чтобы для любого натурального j выполнялось неравенство

$$A_{n_j} \leq \frac{1}{2^j}. \tag{33}$$

Затем из этой подпоследовательности вновь выберем подпоследовательность следующим образом. В качестве n_{j_1} возьмем n_1. Предположим, что $n_{j_1}, n_{j_2}, \dots,$ $n_{j_{k-1}}$ уже выбраны. Тогда n_{j_k} берется настолько большим, что выполняются сразу два неравенства

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{2\sqrt{\lambda}_{n_{j_k}}} \int_0^x \sin\sqrt{\lambda}_{n_{j_k}}(x-2\tau) \sum_{i=1}^{k-1} A_{n_{j_i}} \sin\sqrt{\lambda}_{n_{j_i}}(x-2\tau)d\tau \right| \\
&\qquad \leq \left| \frac{1}{4\lambda_{n_{j_k}}} \cos\sqrt{\lambda}_{n_{j_k}}(x-2\tau) \sum_{i=1}^{k-1} A_{n_{j_i}} \sin\sqrt{\lambda}_{n_{j_i}}(x-2\tau)\Big|_0^\pi \right| \\
&\qquad + \left| \frac{1}{4\lambda_{n_{j_k}}} \int_0^x \cos\sqrt{\lambda}_{n_{j_k}}(x-2\tau) \sum_{i=1}^{k-1} A_{n_{j_i}} \sqrt{\lambda}_{n_{j_i}} \cos\sqrt{\lambda}_{n_{j_i}}(x-2\tau)d\tau \right| \\
&\qquad \leq \frac{2\sum_{i=1}^{k-1} A_{n_{j_i}}}{4\lambda_{n_{j_k}}} + \frac{\sum_{i=1}^{k-1} \pi A_{n_{j_i}} \sqrt{\lambda}_{n_{j_i}}}{4\lambda_{n_{j_k}}} \leq \frac{1}{\lambda_{n_{j_k}}^{0.75}},
\end{aligned} \tag{34}$$

$$\sum_{i=j_k}^\infty A_{n_i} \leq \frac{1}{\lambda_{n_{j_{k-1}}}^{0.75}}. \tag{35}$$

Заметим, что если из последнего ряда (35) при выборе членов подпоследовательности с большими номерами удалить положительные слагаемые, то неравенство только усилится.

Теперь в качестве потенциала q_λ возьмем непрерывную функцию

$$q(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} A_{n_{j_k}} \sin\sqrt{\lambda_{n_{j_k}}}(x - 2\tau). \tag{36}$$

Обратим внимание на то, что в силу (33) и признака Вейерштрасса $\|q\|_{C[0,\pi]} \le 1$.

Пользуясь интегральным представлением (20) и оценкой (19), в которой в качестве константы ρ_λ берется $\rho_\lambda \equiv \pi\|q\|_{C[0,\pi]} \le \pi$, как в [7, гл. 1, § 2, лемма 2.2], делаем вывод о существовании константы $B = B(q)$, зависящей только от нормы потенциала q в пространстве $C[0,\pi]$ такой, что начиная с достаточно большого номера k_0 будет выполняться неравенство

$$\begin{aligned}\left| y(x,\lambda_{n_{j_k}}) - \cos\sqrt{\lambda_{n_{j_k}}}\,x - \beta(x,\lambda_{n_{j_k}})\frac{\sin\sqrt{\lambda_{n_{j_k}}}\,x}{\sqrt{\lambda_{n_{j_k}}}} \right| \\ \ge \left| \frac{1}{2\sqrt{\lambda_{n_{j_k}}}} \int_0^x \sin\sqrt{\lambda_{n_{j_k}}}(x-2\tau)q(\tau)\,d\tau \right| - \frac{Bx}{\lambda_{n_{j_k}}}.\end{aligned} \tag{37}$$

Оценим снизу (для достаточно больших $\lambda_{n_{j_k}}$) интеграл в (37), учитывая (34)–(36):

$$\begin{aligned}\left| \frac{1}{2\sqrt{\lambda_{n_{j_k}}}} \int_0^x \sin\sqrt{\lambda_{n_{j_k}}}(x-2\tau)q(\tau)\,d\tau \right| \ge \left| \frac{A_{n_{j_k}}}{2\sqrt{\lambda_{n_{j_k}}}} \int_0^x \sin^2\sqrt{\lambda_{n_{j_k}}}(x-2\tau)\,d\tau \right| \\ - \left| \frac{1}{2\sqrt{\lambda_{n_{j_k}}}} \int_0^x \sin\sqrt{\lambda_{n_{j_k}}}(x-2\tau) \sum_{i=1}^{k-1} A_{n_{j_i}} \sin\sqrt{\lambda_{n_{j_i}}}(x-2\tau)d\tau \right| \\ - \left| \frac{1}{2\sqrt{\lambda_{n_{j_k}}}} \int_0^x \sin\sqrt{\lambda_{n_{j_k}}}(x-2\tau) \sum_{i=k+1}^{\infty} A_{n_{j_i}} \sin\sqrt{\lambda_{n_{j_i}}}(x-2\tau)\,d\tau \right| \\ \ge \left| \frac{A_{n_{j_k}}}{2\sqrt{\lambda_{n_{j_k}}}} \int_0^x \frac{1-\cos 2\sqrt{\lambda_{n_{j_k}}}(x-2\tau)}{2}\,d\tau \right| - \frac{2}{\lambda_{n_{j_k}}^{0.75}}.\end{aligned}$$

В силу (37) и леммы 1 найдется номер k_x, вообще говоря, зависящий от x, такой, что для всех $k > k_x$ будут выполняться неравенства

$$\begin{aligned}\left| y(x,\lambda_{n_{j_k}}) - \cos\sqrt{\lambda_{n_{j_k}}}\,x - \beta(x,\lambda_{n_{j_k}})\frac{\sin\sqrt{\lambda_{n_{j_k}}}\,x}{\sqrt{\lambda_{n_{j_k}}}} \right| \\ \ge \frac{A_{n_{j_k}}x}{4\sqrt{\lambda_{n_{j_k}}}} - \left| \frac{A_{n_{j_k}}}{4\sqrt{\lambda_{n_{j_k}}}} \int_0^x \cos 2\sqrt{\lambda_{n_{j_k}}}(x-2\tau)\,d\tau \right| - \frac{2}{\lambda_{n_{j_k}}^{0.75}} \ge \frac{A_{n_{j_k}}x}{8\sqrt{\lambda_{n_{j_k}}}}.\end{aligned} \tag{38}$$

Отсюда следует (15) в произвольной точке $x \in (0,\pi]$. Согласно методу скользящего горба осталось перенумеровать все точки счетного множества $X = \{x_l\}_{l=1}^{\infty}$, $X \subset (0,\pi]$ и для каждой из них построить подпоследовательность со свойствами (34)–(38). Затем возьмем новый функциональный ряд, выбирая его члены из счетного множества полученных последовательностей и заботясь о том, чтобы все последовательности были представлены бесконечным числом членов, а ряд из коэффициентов абсолютно сходился. Теперь потенциал

$$q(\tau) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} A_{n_{j_k}} \sin \sqrt{\lambda}_{n_{j_k}} (x_l - 2\tau)$$

будет отвечать требованиям теоремы 3, так как для каждого $x \in X$ существует своя подпоследовательность такая, что справедливо (38).

Теорема 3 доказана.

Замечание 3. Сохраняя обозначения асимптотических формул теоремы 1, обратим внимание на то, что потенциал q здесь от λ не зависит, так как берутся фиксированный представитель семейства непрерывных функций и конкретные начальные условия задачи Коши. На самом деле здесь $\beta(x,\lambda) = \beta(x)$.

Замечание 4. Аналогично устанавливается неулучшаемость асимптотических формул (7)–(9).

Замечание 5. Как показывает пример потенциала

$$q_\lambda(x) = \begin{cases} \lambda, & x \in (0,\pi], \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

рассматривать приведенные в данной работе асимптотические формулы в шарах с «быстро» растущими радиусами, например $\rho_\lambda = O(\lambda)$, без дополнительных ограничений не имеет смысла.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Суетин П. К.* Классические ортогональные многочлены. М.: Наука, 1976.
2. *Сегё Г.* Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962.
3. *Бадков В. М.* Асимптотическое поведение ортогональных многочленов // Мат. сб. 1979. Т. 109, № 1. С. 46–59.
4. *Бадков В. М.* Асимптотические свойства ортогональных многочленов // Конструктивная теория функций 81. София, 1983. С. 21–27.
5. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.
6. *Сансоне Дж.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Изд-во иностр. лит., 1953. Т. 1.
7. *Левитан Б. М., Саргсян И. С.* Операторы Штурма — Лиувилля и Дирака. М.: Наука, 1988.
8. *Винокуров В. А., Садовничий В. А.* Асимптотика любого порядка собственных значений и собственных функций краевой задачи Штурма — Лиувилля на отрезке с суммируемым потенциалом // Изв. РАН. Сер мат. 2000. Т. 64, № 4. С. 47–108.
9. *Юрко В. А.* Введение в теорию обратных спектральных задач. М.: Физматлит, 2007.
10. *Савчук А. М., Шкаликов А. А.* Операторы Штурма — Лиувилля с сингулярными потенциалами // Мат. заметки. 1999. Т. 66, № 6. С. 897–912.
11. *Савчук А. М.* О собственных значениях и собственных функциях оператора Штурма — Лиувилля с сингулярным потенциалом // Мат. заметки. 2001. Т. 69, № 2. С. 277–285.
12. *Савчук А. М., Шкаликов А. А.* О собственных значениях оператора Штурма — Лиувилля с потенциалами из пространств Соболева // Мат. заметки. 2006. Т. 80, № 6. С. 897–912.
13. *Покорный Ю. В., Прядиев В. Л.* Некоторые вопросы качественной теории Штурма — Лиувилля на пространственной сети // Успехи мат. наук. 2004. Т. 59, № 3. С. 116–150.
14. *Покорный Ю. В., Зверева М. Б., Шабров С. А.* Осцилляционная теория Штурма — Лиувилля для импульсных задач // Успехи мат. наук. 2008. Т. 63, № 1. С. 111–154.
15. *Покорный Ю. В., Зверева М. Б., Ищенко А. С., Шабров С. А.* О нерегулярном расширении осцилляционной теории спектральной задачи Штурма — Лиувилля // Мат. заметки. 2007. Т. 82, № 4. С. 578–582.
16. *Мухтаров О. Ш., Кадакал М.* Спектральные свойства одной задачи типа Штурма — Лиувилля с разрывным весом // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 4. С. 860–875.

17. *Айгунов Г. А.* Об ограниченности ортонормированных собственных функций одного класса нелинейных операторов типа Штурма — Лиувилля с весовой функцией неограниченной вариации на конечном отрезке // Успехи мат. наук. 2000. Т. 55, № 4. С. 213–214.
18. *Бучаев Я. Г.* Оценки норм собственных функций задачи Штурма — Лиувилля в пространствах Соболева // Мат. заметки. 2003. Т. 73, № 4. С. 625–627.
19. *Гусейнов И. М., Набиев А. А., Пашаев Р. Т.* Операторы преобразования и асимптотические формулы для собственных значений полиномиального пучка операторов Штурма — Лиувилля // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 3. С. 554–566.
20. *Набиев И. М.* Кратность и взаимное расположение собственных значений квадратичного пучка операторов Штурма — Лиувилля // Мат. заметки. 2000. Т. 67, № 3. С. 369–381.
21. *Жидков П. Е.* О полноте систем собственных функций оператора Штурма — Лиувилля с потенциалом, зависящим от спектрального параметра, и некоторой нелинейной задачи // Мат. сб. 1997. Т. 188, № 7. С. 123–138.
22. *McLaughlin J. R.* Inverse spectral theory using nodal points as data — a uniqueness result // J. Differ. Equations. 1988. V. 73, N 2. P. 354–362.
23. *Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н.* Курс современного анализа. М.: Физматгиз, 1963. Ч. 1.
24. *Шилов Г. Е., Гуревич Б. Л.* Интеграл, мера, производная. М.: Наука, 1967.
25. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.

Статья поступила 30 сентября 2007 г.,
окончательный вариант — 27 октября 2009 г.

Трынин Александр Юрьевич
Саратовский гос. университет, механико-математический факультет,
кафедра математической физики и вычислительной математики,
ул. Астраханская, 83, Саратов 410026
tayu@rambler.ru