Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2010. Том 51, № 3

УДК 510.5

Σ–ОПРЕДЕЛИМОСТЬ НЕСЧЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ c–ПРОСТЫХ ТЕОРИЙ

А. И. Стукачев

Аннотация. Показано, что всякая c-простая теория с дополнительным условием дискретности имеет несчетную модель, Σ-определимую в $\mathbb{HF}(\mathbb{L})$, $\mathbb{L}$ — плотный линейный порядок. В качестве следствия этот факт установлен для всех c-простых теорий конечной сигнатуры, являющихся подмодельно полными.

Ключевые слова: теория вычислимости, теория моделей, конструктивная модель, допустимое множество.

Посвящается Юрию Леонидовичу Ершову

1. Введение

В работе, продолжающей [1], исследуются вопросы эффективной представимости (Σ-определимости) алгебраических систем в наследственно конечных надстройках.

Для произвольного бесконечного кардинала α через $\mathscr{K}_\alpha$ будем обозначать класс систем мощности не больше, чем α, с конечной или вычислимой сигнатурой. Для систем с бесконечной вычислимой сигнатурой предполагается, что зафиксирована некоторая гёделевская нумерация формул данной сигнатуры. Для систем $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ через $\mathfrak{A} \leq_\Sigma \mathfrak{B}$ будем обозначать тот факт, что $\mathfrak{A}$ Σ-определима в $\mathbb{HF}(\mathfrak{B})$ (см. [2]). Предполагается, что сигнатура надстройки $\mathbb{HF}(\mathfrak{B})$ содержит предикатный символ Sat^2, интерпретацией которого является предикат истинности атомарных формул системы $\mathfrak{B}$, согласованный с зафиксированной гёделевской нумерацией для формул сигнатуры этой системы. В случае систем конечной сигнатуры добавление предиката Sat к сигнатуре надстройки не является существенным.

Предпорядок $\leq_\Sigma$ порождает на классе $\mathscr{K}_\alpha$ отношение Σ-эквивалентности: $\mathfrak{A} \equiv_\Sigma \mathfrak{B}$, если $\mathfrak{A} \leq_\Sigma \mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B} \leq_\Sigma \mathfrak{A}$. Классы эквивалентности по отношению $\equiv_\Sigma$ будем называть *степенями Σ-определимости*, или *Σ-степенями*. Σ-степень системы $\mathfrak{A}$ будем обозначать через $[\mathfrak{A}]_\Sigma$. Σ-степень будем называть *несчетной*, если она содержит систему некоторой несчетной мощности (легко понять, что все системы такой Σ-степени имеют такую же мощность). Структура

$$\mathcal{S}_\Sigma(\alpha) = \langle \mathscr{K}_\alpha / \equiv_\Sigma, \leq_\Sigma \rangle$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 06–01–04002–ННИОа, 08–01–00442а, 09–01–12140–офи_м), Совета по грантам Президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (проект НШ–335.2008.1) и Лаврентьевского гранта для молодых ученых СО РАН (постановление Президиума СО РАН № 43 от 04.02.2010 г.).

является верхней полурешеткой с наименьшим элементом, которым является степень, состоящая из конструктивизируемых систем. Для любых систем $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathscr{K}_\alpha$ имеем $[\mathfrak{A}]_\Sigma \vee [\mathfrak{B}]_\Sigma = [(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})]_\Sigma$, где $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ — теоретико-модельная пара систем $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$.

Для системы $\mathfrak{A} \in \mathscr{K}_\alpha$ и бесконечных кардиналов $\beta \leq \alpha$ и $\gamma \geq \alpha$ множества

$$I_\beta(\mathfrak{A}) = \{[\mathfrak{B}]_\Sigma \mid \mathfrak{B} \in \mathscr{K}_\beta,\, \mathfrak{B} \leq_\Sigma \mathfrak{A}\}, \quad F_\gamma(\mathfrak{A}) = \{[\mathfrak{B}]_\Sigma \mid \mathfrak{B} \in \mathscr{K}_\gamma,\, \mathfrak{A} \leq_\Sigma \mathfrak{B}\}$$

являются соответственно идеалом в полурешетке $\mathcal{S}_\Sigma(\beta)$ (главным при $\beta = \alpha$) и фильтром в полурешетке $\mathcal{S}_\Sigma(\gamma)$ (главным при любом $\gamma \geq \alpha$). Множества $F_\gamma(\mathfrak{A})$ в полурешетках $\mathcal{S}_\Sigma(\gamma)$ являются аналогом понятия *спектра* системы $\mathfrak{A}$ — это множества Σ-степеней систем, относительно которых $\mathfrak{A}$ конструктивизируема. Множества $I_\beta(\mathfrak{A})$ в полурешетках $\mathcal{S}_\Sigma(\beta)$ состоят из Σ-степеней систем, конструктивизируемых относительно $\mathfrak{A}$. Данная работа посвящена изучению идеалов $I_\beta(\mathfrak{A})$ в случае, когда β — несчетный кардинал, а $\mathfrak{A}$ — «достаточно простая» система.

Теория первого порядка называется *регулярной* [2], если она модельно полна и разрешима, и *c-простой* [2], если она модельно полна, разрешима, ω-категорична и имеет разрешимое множество полных формул. Алгебраическую систему будем называть *регулярной* (*c-простой*), если таковой является ее элементарная теория. Примерами регулярных систем являются поля $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}_p$ и $\mathbb{C}$ действительных, p-адических и комплексных чисел. Примерами c-простых систем являются плотные линейные порядки и бесконечные системы с пустой сигнатурой.

Система $\mathfrak{A}$ называется *локально конструктивизируемой* [2], если $\mathrm{Th}_\exists(\mathfrak{A}, \bar{a})$ вычислимо перечислимо для любого $\bar{a} \in A^{<\omega}$. Свойство локальной конструктивизируемости сохраняется при Σ-определимости. Известно (см. [2]), что поле $\mathbb{C}$ Σ-определимо в $\mathbb{HF}(\mathbb{L})$ для (любого) плотного линейного порядка $\mathbb{L}$ мощности континуум, однако не Σ-определимо в $\mathbb{HF}(\mathbb{S})$ для множеств $\mathbb{S}$ без структуры. Поля $\mathbb{R}$ и $\mathbb{O}_p$ не Σ-определимы над линейными порядками, так как не являются локально конструктивизируемыми.

Известно также, что система $\mathfrak{A}$ локально конструктивизируема тогда и только тогда, когда для любого набора $\bar{a} \in A^{<\omega}$ существуют конструктивизируемая система $\mathfrak{B}$ и набор $\bar{b} \in B^{<\omega}$ такие, что $(\mathfrak{A}, \bar{a}) \equiv_1 (\mathfrak{B}, \bar{b})$ (что равносильно $\mathbb{HF}(\mathfrak{A}, \bar{a}) \equiv_1 \mathbb{HF}(\mathfrak{B}, \bar{b})$). Следующее определение является, таким образом, непосредственным обобщением понятия локальной конструктивизируемости.

Определение 1.1 [3]. Система $\mathfrak{A}$ называется *локально конструктивизируемой уровня* α $(0 < \alpha \leq \omega)$, если для любого набора $\bar{a} \in A^{<\omega}$ существуют конструктивизируемая система $\mathfrak{B}$ и набор $\bar{b} \in B^{<\omega}$ такие, что

$$\mathbb{HF}(\mathfrak{A}, \bar{a}) \equiv_\alpha \mathbb{HF}(\mathfrak{B}, \bar{b}).$$

Локальная конструктивизируемость любого уровня сохраняется при Σ-определимости: имеет место

Предложение 1.1 [3]. *Пусть системы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ таковы, что $\mathfrak{A} \leq_\Sigma \mathfrak{B}$, и система $\mathfrak{B}$ локально конструктивизируемая уровня α для $0 < \alpha \leq \omega$. Тогда система $\mathfrak{A}$ также является локально конструктивизируемой уровня α.*

Всякая c-простая система является локально конструктивизируемой уровня ω, причем соответствующая «конструктивная симуляция» единственна с точностью до вычислимого изоморфизма. В то же время, как уже отмечалось, существуют регулярные системы, не являющиеся локально конструктивизируемыми даже для уровня 1. Наличием хороших свойств локальной конструктивизируемости у c-простых систем обусловлена следующая

Гипотеза 1 (Ю. Л. Ершов [4]). *Всякая c-простая теория имеет несчетную модель, Σ-определимую в $\mathbb{HF}(\mathbb{L})$ для некоторого плотного линейного порядка $\mathbb{L}$.*

Как оказалось, в максимально общей формулировке (без ограничений на мощность сигнатуры) данная гипотеза неверна (см. ниже теорему 2.1). Целью настоящей работы является выделение с помощью одного достаточного условия довольно широкого подкласса класса c-простых теорий, для которых эта гипотеза справедлива.

2. Дискретные и подмодельно полные c-простые теории

Определение 2.1. Теория T называется *sc-простой*, если она ω-категорична, подмодельно полна, разрешима и имеет разрешимое множество полных формул.

Таким образом, определение sc-простой теории отличается от определения c-простой теории тем, что условие модельной полноты заменяется более сильным условием подмодельной полноты. Будем обозначать через C-SIMPLE, C-SIMPLE$_{\mathrm{fin}}$, SC-SIMPLE и SC-SIMPLE$_{\mathrm{fin}}$ классы соответствующих теорий (индекс fin означает, что рассматриваются только системы с конечными сигнатурами).

Как оказалось, не все теории с «очень простыми» с точки зрения вычислимости счетными моделями имеют «достаточно простые» несчетные модели: имеет место

Теорема 2.1 [1]. *Существует sc-простая теория* (*бесконечной сигнатуры*), *не имеющая несчетных моделей, Σ-определимых в $\mathbb{HF}(\mathbb{L})$, $\mathbb{L}$ — плотный линейный порядок.*

Ниже будет показано, что для класса sc-простых теорий конечной сигнатуры в отличие от случая теорий с бесконечной сигнатурой гипотеза 1 верна.

Пусть σ — конечная или вычислимая сигнатура, $V = \{x_i \mid i \in \omega\}$ — фиксированное множество переменных, и пусть T — непротиворечивая теория сигнатуры σ. Для $n \in \omega$ под *n-типом* теории T будем, как обычно, понимать максимальное совместное множество формул сигнатуры σ, все свободные переменные которых находятся среди $x_0, \dots, x_{n-1}$, замкнутое относительно логической выводимости в T. Аналогичным образом определяется понятие *атомарного n-типа* теории T. Тип p будем называть *подтипом* типа q, если $p \subseteq q$.

Определение 2.2. Пусть T — непротиворечивая теория сигнатуры σ. Под *ω-типом* теории T будем понимать максимальное совместное множество формул сигнатуры σ, все свободные переменные которых находятся среди $\{x_n \mid n \in \omega\}$, замкнутое относительно логической выводимости в T.

Тип p называется *вырожденным*, если $(x_i = x_j) \in p$ для некоторых $i \neq j$. Для ω-типа p и набора $\bar{n} = \langle n_0, n_1 \dots \rangle \in \omega^{<\omega} \cup \omega^{\omega}$ через $p|\bar{n}$ будем обозначать тип $[p(x_{n_0}, x_{n_1}, \dots)]^{x_{n_0}, x_{n_1}, \dots}_{x_0, x_1, \dots}$, получающийся заменой переменных $x_{n_0}, x_{n_1}, \dots$ переменными $x_0, x_1, \dots$ соответственно в типе $p(x_{n_0}, x_{n_1}, \dots) \subseteq p$, состоящем из формул, свободные переменные которых принадлежат множеству $\{x_{n_0}, x_{n_1}, \dots\}$.

Будем говорить, что тип p *вкладывается* в тип q (и обозначать $p \hookrightarrow q$), если $p = q|\bar{n}$ для некоторого $\bar{n} \in \omega^{<\omega} \cup \omega^{\omega}$.

Если $\mathfrak{A}$ — вычислимая система и p — ω-тип, то будем говорить, что p *вычислимо реализуется в* $\mathfrak{A}$, если этот тип реализуется некоторой вычислимой последовательностью элементов системы $\mathfrak{A}$.

Лемма 2.1. *Пусть $\mathfrak{A}$ — вычислимая система, и пусть p — ω-тип. Тогда*

1) *если система $\mathfrak{A}$ разрешима, то всякий вычислимо реализующийся в $\mathfrak{A}$ ω-тип вычислим; в частности, если $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ — регулярная теория, то всякий вычислимо реализующийся в $\mathfrak{A}$ ω-тип вычислим;*

2) *если $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ — c-простая теория и p реализуется в $\mathfrak{A}$, то p вычислимо реализуется в $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда, когда p вычислим.*

Доказательство. П. 1 непосредственно вытекает из определений. В п. 2 для доказательства вычислимой реализуемости вычислимого ω-типа в системе $\mathfrak{A}$ достаточно воспользоваться однородностью $\mathfrak{A}$ и разрешимостью множества полных формул теории $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}, \bar{a})$ для любого $\bar{a} \in A^{<\omega}$. $\square$

Определение 2.3. Пусть p и q — произвольные ω-типы (возможно, различных сигнатур). Тип q называется *p-неразличимым* (и обозначается $q \leq_i p$), если для любых наборов $\bar{n}_1, \bar{n}_2 \in \omega^{<\omega}$ одинаковой длины

$$\text{из } p|\bar{n}_1 = p|\bar{n}_2 \text{ следует, что } q|\bar{n}_1 = q|\bar{n}_2.$$

Очевидно, что отношение $\leq_i$ на множестве ω-типов рефлексивно и транзитивно. Будем называть ω-типы p и q *i-эквивалентными* (и обозначать $p \equiv_i q$), если $p \leq_i q$ и $q \leq_i p$, т. е. для любых наборов $\bar{n}_1, \bar{n}_2 \in \omega^{<\omega}$ одинаковой длины, $p|\bar{n}_1 = p|\bar{n}_2$ тогда и только тогда, когда $q|\bar{n}_1 = q|\bar{n}_2$.

Пусть $f : \omega \to \omega^{<\omega}$ — произвольная функция и p — произвольный ω-тип. Определим ω-тип p/f следующим образом: для всякого $\bar{n} = \langle n_0, \ldots, n_{k-1}\rangle \in \omega^{<\omega}$

$$(p/f)|\bar{n} = p|f(n_0)\hat{}\ldots\hat{}f(n_{k-1}).$$

В случае, когда $f(n) = \langle kn, \ldots, kn + k - 1\rangle$ для некоторого $k > 0$, ω-тип p/f будем обозначать через p/k.

Определение 2.4. Для произвольных систем $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ и некоторого $k > 0$ множество $I \subseteq A^k \cap B$ называется *множеством $\mathfrak{A}$-неразличимых элементов в* $\mathfrak{B}$ (размерности k), если для любых наборов $\bar{i}, \bar{i}' \in I^{<\omega}$ одинаковой длины

$$\text{из } \langle \mathfrak{A}, \bar{i}\rangle \equiv \langle \mathfrak{A}, \bar{i}'\rangle \text{ следует, что } \langle \mathfrak{B}, \bar{i}\rangle \equiv \langle \mathfrak{B}, \bar{i}'\rangle.$$

Лемма 2.2. *Для любых c-простых теорий T, T' и $k > 0$ следующие условия эквивалентны:*

1) *существуют вычислимые невырожденные ω-типы p и q теорий T и T' соответственно такие, что q является p/k-неразличимым;*

2) *существуют вычислимые модели $\mathfrak{A} \models T$ и $\mathfrak{A}' \models T'$ такие, что в $\mathfrak{A}'$ существует бесконечное вычислимое множество $\mathfrak{A}$-неразличимых элементов размерности k.*

Доказательство следует из определений и леммы 2.1. $\square$

Определение 2.5. Для $\alpha \leq \omega$ α-тип p называется *упорядоченно неразличимым*, если для любого $k < \alpha$ и любых подмножеств $I, J \subseteq \alpha$ мощности k

$$p|I = p|J,$$

где для $I = \{i_0 < i_1 < \ldots\}$ через $p|I$ обозначается тип $p|\langle i_0, i_1, \ldots\rangle$.

Из определения очевидно, что ω-тип p является упорядоченно неразличимым тогда и только тогда, когда p является q-неразличимым для ω-типа q последовательности всех натуральных чисел в плотном линейном порядке, содержащем $\langle\omega,\leq\rangle$ как подсистему, например, в $\langle\mathbb{Q},\leq\rangle$. Упорядоченная неразличимость p также эквивалентна тому, что множество $\{p|I \mid I\subseteq\omega$ конечно$\}$ конечных подтипов p минимально по включению. Отметим также, что любой ω-подтип $p|I$ для бесконечного $I\subseteq\omega$ совпадает с p.

Упорядоченно неразличимые невырожденные ω-типы теории T — это в точности типы бесконечных последовательностей упорядоченно неразличимых элементов в моделях T. По теореме Эренфойхта — Мостовского любая непротиворечивая теория имеет невырожденные упорядоченно неразличимые ω-типы. Рассмотрим вопрос существования вычислимых невырожденных упорядоченно неразличимых ω-типов у c-простых теорий.

Определение 2.6. Пусть $n\in\omega$. Теорию T будем называть *n-дискретной*, если любой тип теории T однозначно определяется своими n-подтипами.

Будем называть теорию *дискретной*, если она n-дискретна для некоторого $n\in\omega$. Если T — n-дискретная теория, число n-типов которой конечно, то T ω-категорична и подмодельно полна в некотором обогащении конечным числом формульно определимых в исходной сигнатуре предикатов. Всякая регулярная n-дискретная теория с конечным числом n-типов является c-простой.

Лемма 2.3. 1. *Всякая подмодельно полная теория конечной предикатной сигнатуры является n-дискретной с конечным числом n-типов для некоторого $n\in\omega$.*

2. *Всякая ω-категоричная подмодельно полная теория конечной сигнатуры является n-дискретной с конечным числом n-типов для некоторого $n\in\omega$.*

Доказательство. Установим п. 1: пусть T — теория конечной сигнатуры $\sigma=\left\langle R_0^{n_0},\dots,R_{k-1}^{n_{k-1}}\right\rangle$. Вследствие элиминации кванторов и конечности сигнатуры теории T любой ее тип p полностью и однозначно определяется совокупностью своих n_*-подтипов, где где $n_*=\max(n_0,\dots,n_{k-1})$. Каждый n_*-тип $p(x_0,\dots,x_{n_*-1})$, в свою очередь, определяется конечной конъюнкцией атомарных формул и их отрицаний: рассмотрим для всех $i<k$ множества $\mathscr{F}(n_i)$ всех функций из $\{0,\dots,n_i-1\}$ в $\{0,\dots,n_i-1\}$. Тип элементов $x_0,\dots,x_{n_*-1}$ определяется функцией

$$\varepsilon:\{(R_i,f)\mid i<k, f\in\mathscr{F}(n_i)\}\to\{0,1\}$$

следующим образом: $\varepsilon(R_i,f)$=1 тогда и только тогда, когда $R_i(f(\bar{x}))\in p$, где $f(\bar{x})=\langle x_{f(0)},\dots,x_{f(n_i-1)}\rangle$.

Для доказательства п. 2 достаточно заметить, что в моделях ω-категоричных теорий любая конечно порожденная подсистема конечна, причем ее мощность ограничена функцией, равномерно зависящей от количества порождающих. $\square$

Лемма 2.4. *Пусть T — c-простая дискретная теория.*

1. *Все упорядоченно неразличимые невырожденные ω-типы теории T вычислимы. В частности, теория T имеет вычислимые упорядоченно неразличимые невырожденные ω-типы.*

2. *В любой вычислимой модели теории T вычислимо реализуется хотя бы один упорядоченно неразличимый невырожденный ω-тип.*

Доказательство. Пусть для простоты T — теория конечной предикатной сигнатуры $\sigma=\left\langle R_0^{n_0},\dots,R_{k-1}^{n_{k-1}}\right\rangle$. Рассмотрим счетную модель $\mathfrak{M}\models T$. По теореме Рамсея существует бесконечная последовательность $(I, <)$ упорядоченно неразличимых элементов в $\mathfrak{M}$. Пусть p — ω-тип этой последовательности. Вследствие дискретности T ω-тип p однозначно определяется своим невырожденным n_*-подтипом, где $n_* = \max(n_0, \ldots, n_{k-1})$, который, в свою очередь, определяется некоторой бескванторной формулой φ_p. Ввиду разрешимости теории T получаем, что тип p вычислим.

Пусть $\mathfrak{M} \models T$ — вычислимая модель, и пусть p — (вычислимый) упорядоченно неразличимый невырожденный ω-тип, реализующийся в $\mathfrak{A}$. Существует бескванторная формула $\varphi(x, \bar{y})$ сигнатуры σ такая, что для любого набора $\overline{m} \in M^{<\omega}$, реализующего $lh(\overline{m})$-подтип p, и любого $a \in M$ из истинности

$$\mathfrak{M} \models \bigwedge_{\bar{c} \sqsubseteq \overline{m}} \varphi(a, \bar{c})$$

следует, что $\overline{m}\hat{\ }a$ является $(lh(\overline{m}) + 1)$-подтипом p (запись $\bar{c} \sqsubseteq \overline{m}$ означает, что $c_i = m_{h(i)}$ для некоторой возрастающей функции h). Действительно, в качестве $\varphi(x, \bar{y})$ можно взять формулу $\varphi_p(\bar{y}, x)$.

Всякая модель c-простой теории является однородной, поэтому для любых $\overline{m}_1, \overline{m}_2 \in M^{<\omega}$ из $(\mathfrak{M}, \overline{m}_1) \equiv (\mathfrak{M}, \overline{m}_2)$ следует $(\mathfrak{M}, \overline{m}_1) \cong (\mathfrak{M}, \overline{m}_2)$.

Вычислимая бесконечная последовательность элементов системы $\mathfrak{M}$, реализующая ω-тип p, выбирается в ходе пошаговой конструкции следующим образом. На шаге 0 выбираем произвольную последовательность $\overline{m}_0$ из n_* элементов, реализующую n_*-подтип p. Далее, на шаге $s + 1$ выбираем элемент $a \in M$ с наименьшим номером такой, что $\mathfrak{A} \models \varphi(a, \bar{c})$ для всех $\bar{c} \sqsubseteq \overline{m}_s$, где $\overline{m}_s$ — последовательность, построенная на шаге s. Такой элемент a существует вследствие реализуемости p и однородности $\mathfrak{M}$. Полагаем $\overline{m}_{s+1} \leftrightharpoons \overline{m}_s\hat{\ }a$. $\square$

Следствие 2.1. *Если T — sc-простая теория конечной сигнатуры, то в (любой) вычислимой модели теории T существует бесконечное вычислимое множество упорядоченно неразличимых элементов.*

3. Σ-степени несчетных моделей *c*-простых теорий

Возвращаясь к вопросу о Σ-определимости несчетных моделей c-простых теорий, приведем одно (достаточно общее) необходимое условие Σ-определимости, аналогичное введенному в [1].

Предложение 3.1. *Пусть система $\mathfrak{A}$ несчетна, система $\mathfrak{B}$ достаточно насыщена и локально конструктивизируема уровня ω, и пусть $\mathfrak{A} \leq_\Sigma \mathfrak{B}$. Тогда существуют вычислимые системы $\mathfrak{A}' \equiv \mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}' \equiv \mathfrak{B}$ такие, что в $\mathfrak{A}'$ существует бесконечное вычислимое множество $(\mathfrak{B}', \bar{b}')$-неразличимых элементов размерности k для некоторых $k > 0$ и $\bar{b}' \in (B')^{<\omega}$.*

Доказательство. Пусть система $\mathfrak{A}$ Σ-определима в $\mathbb{HF}(\mathfrak{B})$ посредством набора Σ-формул

$$\Gamma = \langle \Phi, \Psi, \Psi^*, \Phi_0, \Phi_0^*, \ldots, \Phi_k, \Phi_k^*, \ldots \rangle,$$

где формулы Ψ и Ψ^* определяют отношения равенства и неравенства соответственно, причем, не нарушая общности, можно считать, что параметром в этих формулах является набор праэлементов $\bar{b}_0 \in B^{<\omega}$. Пусть $(\mathfrak{B}', \bar{b}')$ — конструктивная симуляция уровня ω для системы $(\mathfrak{B}, \bar{b}_0)$.

Набор формул Γ с параметром $\bar{b}'$ корректно определяет в $\mathbb{HF}(\mathfrak{B}')$ некоторую систему $\mathfrak{A}^*$, которая вычислима и элементарно эквивалентна системе $\mathfrak{A}$. Отсюда, в частности, следует, что система $\mathfrak{A}^*$ бесконечна.

Известно [2], что любой элемент наследственно конечной надстройки $\mathbb{HF}(\mathfrak{B}')$ представим в виде значения терма $t_\varkappa(\bar{b})$, где $\bar{b} \in (B')^{<\omega}$ — набор праэлементов, $\varkappa \in \mathrm{HF}(\omega)$. В нашем случае существуют такие элемент $\varkappa \in \mathrm{HF}(k)$ и бесконечное множество $X \subseteq (B')^k$, что $\mathbb{HF}(\mathfrak{B}') \models \Psi^*(t_\varkappa(\bar{b}_1), t_\varkappa(\bar{b}_2))$ для любых различных наборов $\bar{b}_1$ и $\bar{b}_2$ из множества X. Действительно, в противном случае набор формул Γ определял бы не более чем счетную систему в $\mathbb{HF}(\mathfrak{B})$.

Так как система $\mathfrak{B}'$ вычислима и Ψ^* — Σ-формула, можно найти бесконечное вычислимое множество $I \subseteq X$. Для этого достаточно взять произвольное $\bar{b}_0 \in X$, найти (эффективно) $\bar{b}_1 = \mu\bar{b}(\mathbb{HF}(\mathfrak{B}') \models \Psi^*(t_\varkappa(\bar{b}_0), t_\varkappa(\bar{b}))$ и т. д. В результате получим вычислимое бесконечное множество $I \leftrightharpoons \{\bar{b}_0, \bar{b}_1, \dots\}$.

Так как система $\mathfrak{B}'$, как и $\mathfrak{B}$, является достаточно насыщенной, то для любых $c_0, c_1 \in \mathrm{HF}(\mathfrak{B}')$ типы элементов c_1 и c_2 в $\mathbb{HF}(\mathfrak{B}')$ совпадают тогда и только тогда, когда существуют $n \in \omega$, $\varkappa \in \mathbb{HF}(n)$, $\bar{b}_0$, $\bar{b}_1 \in (B')^n$ такие, что $c_0 = t_\varkappa(\bar{b}_0)$, $c_1 = t_\varkappa(\bar{b}_1)$, а элементарные типы наборов $\bar{b}_0$ и $\bar{b}_1$ совпадают в $\mathfrak{B}'$. Таким образом, для любых $i_0, \dots, i_n, i'_0, \dots, i'_n \in I$ из $\langle \mathfrak{B}', \bar{b}', i_0, \dots, i_n\rangle \equiv \langle \mathfrak{B}', \bar{b}', i'_0, \dots, i'_n\rangle$ следует

$$\langle \mathbb{HF}(\mathfrak{B}'), \bar{b}', t_\varkappa(i_0), \dots, t_\varkappa(i_n)\rangle \equiv \langle \mathbb{HF}(\mathfrak{B}'), \bar{b}', t_\varkappa(i'_0), \dots, t_\varkappa(i'_n)\rangle.$$

По произвольной конструктивизации μ системы $\mathfrak{B}'$ можно построить конструктивизацию ν наследственно конечной надстройки $\mathbb{HF}(\mathfrak{B}')$, для которой $\mu^{-1}(i) = \nu^{-1}(t_\varkappa(i))$ при всех $i \in I$. Поскольку система $\mathfrak{A}^*$ определяется в $\mathbb{HF}(\mathfrak{B}')$ набором Σ-формул, на основе этой конструктивизации легко получить вычислимую модель $\mathfrak{A}'$ такую, что I будет бесконечным вычислимым множеством $\langle \mathfrak{B}', \bar{b}'\rangle$-неразличимых элементов в системе $\mathfrak{A}'$. $\square$

В некоторых случаях полученное выше необходимое условие Σ-определимости может быть упрощено. Будем говорить, что теория T обладает свойством *эффективной элиминации констант*, если для любого главного расширения $T \cup p_0(\bar{c})$ теории T конечным числом констант и любого невырожденного вычислимого ω-типа p теории $T \cup p_0(\bar{c})$ существует невырожденный вычислимый ω-подтип $q \hookrightarrow p$ такой, что для сужения $r \subseteq q$ типа q на сигнатуру теории T выполняется $p \equiv_i r$.

Обозначим через DLO теорию плотного линейного порядка без концевых элементов, а через E — теорию бесконечной модели пустой сигнатуры. Очевидно, что обе эти теории являются *sc*-простыми. В [1] показано, что теории DLO и E обладают свойством эффективной элиминации констант.

Теория T называется *широкой*, если в любой невырожденный ω-тип теории T вкладывается любой конечный тип теории T. Легко проверить, что теории DLO и E являются широкими.

Предложение 3.2. *Пусть $\mathfrak{A} \leq_\Sigma \mathfrak{B}$, система $\mathfrak{A}$ несчетна и $\mathfrak{B} \models T$, $T \in \{\mathrm{DLO}, \mathrm{E}\}$. Тогда существует вычислимая система $\mathfrak{A}' \equiv \mathfrak{A}$, содержащая бесконечное вычислимое множество неразличимых* (*упорядоченно для* $T = \mathrm{DLO}$, *тотально для* $T = \mathrm{E}$) *элементов размерности* 1.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{B}' \models T$ — произвольная вычислимая модель и система $\mathfrak{A}'$ определяется в $\mathbb{HF}(\mathfrak{B}')$ тем же набором Σ-формул, что и система $\mathfrak{A}$ в $\mathbb{HF}(\mathfrak{B})$. Используя предложение 3.1 и замечание об элиминации констант, можно считать, что существует бесконечное вычислимое множество $I \subseteq A \cap B^k$ $\mathfrak{B}$-неразличимых элементов в $\mathfrak{A}$ размерности k. Пусть для определенности первых элементов различных наборов из I бесконечное число. Рассмотрим наборы $b_0\hat{\ }\bar{b}_0$ и $b_1\hat{\ }\bar{b}_1$ из $(B')^k$, для которых в обозначениях доказательства предложения 3.1 $\mathbb{HF}(\mathfrak{B}') \models \Phi(\varkappa(b_i\hat{\ }\bar{b}_i))$, $i = 0, 1$, и $\mathbb{HF}(\mathfrak{B}') \models \Psi^*(\varkappa(b_0\hat{\ }\bar{b}_0), \varkappa(b_1\hat{\ }\bar{b}_1))$. Полагаем $I_0 = I_1 = \{b_0\hat{\ }\bar{b}_0, b_1\hat{\ }\bar{b}_1\}$. Пусть для $n > 1$ уже построено множество

$$I_{n-1} = \{b_0\hat{\ }\bar{b}_0, \dots, b_{n-1}\hat{\ }\bar{b}_{n-1}\}.$$

Вследствие насыщенности существует набор $b_n\hat{\ }\bar{b}_n$ такой, что

$$(\mathfrak{B}', b_m\hat{\ }\bar{b}_m, b_n\hat{\ }\bar{b}_n) \equiv (\mathfrak{B}', b_0\hat{\ }\bar{b}_0, b_1\hat{\ }\bar{b}_1)$$

для всех $m < n$. В частности, $\mathbb{HF}(\mathfrak{B}') \models \Phi(\varkappa(b_n\hat{\ }\bar{b}_n))$, и для всех $m < n$ будет $\mathbb{HF}(\mathfrak{B}') \models \Psi^*(\varkappa(b_m\hat{\ }\bar{b}_m), \varkappa(b_n\hat{\ }\bar{b}_n))$. Полагаем $I_n = I_{n-1} \cup \{b_n\hat{\ }\bar{b}_n\}$.

Пусть $I = \bigcup\limits_{n\in\omega} I_n$. Вследствие 2-дискретности теории T для любых $i_0, \dots, i_k \in \omega$ элементарный тип набора $b_{i_0}\hat{\ }\bar{b}_{i_0}\hat{\ }\dots\hat{\ }b_{i_k}\hat{\ }\bar{b}_{i_k}$ в системе $\mathfrak{B}'$ в случае $T = \mathrm{DLO}$ однозначно определяется упорядочением набора натуральных чисел $\langle i_0, \dots, i_k\rangle$, который подобен упорядочению элементов набора $\langle b_{i_0}, \dots, b_{i_k}\rangle$ в системе $\mathfrak{B}'$, а значит, определяется элементарным типом этого набора. В случае $T = \mathrm{E}$ элементарный тип набора $b_{i_0}\hat{\ }\bar{b}_{i_0}\hat{\ }\dots\hat{\ }b_{i_k}\hat{\ }\bar{b}_{i_k}$ в системе $\mathfrak{B}'$ однозначно определяется числом различных элементов в наборе $\langle i_0, \dots, i_k\rangle$. $\square$

В некоторых случаях необходимое условие Σ-определимости несчетных систем, полученное в предложении 3.1, является также и достаточным. Воспользуемся критерием Σ-определимости в $\mathbb{HF}(\mathbb{L})$ из [2].

Определим категорию ${}^*\omega$ следующим образом. Объектами являются множества вида $[\mathbf{n}] \rightleftharpoons \{0, 1, \dots, n-1\}$, $n \in \omega$ ($[\mathbf{0}] \rightleftharpoons \varnothing$), а морфизмами — вложения, сохраняющие порядок. Заметим, что имеется единственный морфизм из $[\mathbf{0}]$ в $[\mathbf{n}]$ для любого $n \in \omega$.

Определение 3.1 (Ю. Л. Ершов [2]). ${}^*\omega$-*Спектром* называется любой функтор S из категории ${}^*\omega$ в категорию Mod^*_σ алгебраических систем (некоторой фиксированной сигнатуры σ), морфизмами которой являются всевозможные вложения.

Чтобы определить ${}^*\omega$-спектр S, нужно задать последовательность $\mathfrak{M}_0, \dots, \mathfrak{M}_n, \dots$, $n \in \omega$, алгебраических систем сигнатуры σ и каждому вложению $\mu : [\mathbf{n}] \to [\mathbf{m}]$, сохраняющему порядок, сопоставить вложение $\mu_* : \mathfrak{M}_n \to \mathfrak{M}_m$, причем так, что если $\mu_0 : [\mathbf{n}] \to [\mathbf{m}]$, $\mu_1 : [\mathbf{m}] \to [\mathbf{k}]$ — морфизмы категории ${}^*\omega$, то $(\mu_0\mu_1)_* = \mu_{1*}\mu_{0*}$, и если $\mu : [\mathbf{n}] \to [\mathbf{n}]$ — единственный морфизм ($= \mathrm{id}_{[\mathbf{n}]}$), то $\mu_* = \mathrm{id}_{\mathfrak{M}_n} : \mathfrak{M}_n \to \mathfrak{M}_n$, $n \in \omega$. Если определен ${}^*\omega$-спектр S, т. е. $\{\mathfrak{M}_n, \mu_* \mid n \in \omega, \mu \in \mathrm{Mor}\,{}^*\omega\}$, то для любого линейно упорядоченного множества L можно определить алгебраическую систему $\mathfrak{M}_L$ ($\mathfrak{M}^S_L$) как предел $\lim_{\vec{L}_0} \mathfrak{M}'_{L_0}$ прямого спектра

$$\{\mathfrak{M}'_{L_0}, \varphi_{L_0,L_1} \mid L_0 \subseteq L_1 \subseteq L, L_1 \text{ конечно}\},$$

где $\mathfrak{M}'_{L_0} \rightleftharpoons \mathfrak{M}_n$, если $L_0 \subseteq L$ конечно и $|L_0| = n$, а вложение $\varphi_{L_0,L_1} : \mathfrak{M}'_{L_0} \to \mathfrak{M}'_{L_1}$ для конечных $L_0 \subseteq L_1 (\subseteq L)$ определено так: если $L_1 = \{l_0 < l_1 < \dots < l_{m-1}\}$, $L_0 = \{l_{i_0} < l_{i_1} < \dots < l_{i_{n-1}}\}$ (тогда $0 \le i_0 < i_1 < \dots < i_{n-1} \le m$) и $\mu : [\mathbf{n}] \to [\mathbf{m}]$ определено как $\mu(j) \rightleftharpoons i_j$, $j < n$, то

$$\varphi_{L_0,L_1} \rightleftharpoons \mu_* : \mathfrak{M}'_{L_0} = \mathfrak{M}_n \to \mathfrak{M}_m = \mathfrak{M}'_{L_1}.$$

Если $L \subseteq L'$ — линейно упорядоченные множества, то система $\mathfrak{M}_L$ естественно отождествляется с подсистемой $\mathfrak{M}_{L'}$.

Любой изоморфизм линейно упорядоченных множеств L и L' индуцирует изоморфизм между $\mathfrak{M}_L$ и $\mathfrak{M}_{L'}$. Кроме того, если $L \subseteq L'$ — плотные линейно упорядоченные множества без концевых элементов, то $\mathfrak{M}_L \preccurlyeq \mathfrak{M}_{L'}$. Как следствие, если L и L' — плотные линейно упорядоченные множества без концевых элементов, то $\mathfrak{M}_L \equiv \mathfrak{M}_{L'}$.

Пусть μ_0 и μ_1 — морфизмы из $[\mathbf{1}]$ в $[\mathbf{2}]$ такие, что $\mu_0(0) = 0$ и $\mu_1(0) = 1$, и пусть выполнено условие

$$\mu_{0*} \neq \mu_{1*}. \tag{$*$}$$

Условия $(*)$ достаточно, чтобы $\left|\mathfrak{M}_L^S\right| \geq |L|$ выполнялось для любого линейно упорядоченного множества L.

Определение 3.2 (Ю. Л. Ершов [2]). Система нумераций $\nu_n : \omega \to M_n$, $n \in \omega$, называется *вычислимой последовательностью конструктивизаций*

$$(\mathfrak{M}_0, \nu_0), (\mathfrak{M}_1, \nu_1), \ldots, (\mathfrak{M}_n, \nu_n), \ldots, \quad n \in \omega,$$

если выполнены следующие условия (предполагается, что сигнатура σ систем $\mathfrak{M}_i$ конечна и не содержит функциональных символов):

1) $E \rightleftharpoons \{\langle n, m_0, m_1\rangle \mid n, m_0, m_1 \in \omega, \nu_n(m_0) = \nu_n(m_1)\}$ — Δ-предикат на ω;

2) $N_P \rightleftharpoons \{\bar{n} = \langle n_0, n_1, \ldots, n_k\rangle \mid \bar{n} \in \omega^{k+1}, \langle \nu_{n_0}(n_1), \ldots, \nu_{n_0}(n_k)\rangle \in P^{\mathfrak{M}_{n_0}}\}$ — Δ-предикат на ω для любого (k-местного) предикатного символа $P \in \sigma$;

3) для любого константного символа $c \in \sigma$ существует Σ-функция $f_c : \omega \to \omega$ такая, что $c^{\mathfrak{M}_n} = \nu_n f_c(n)$.

Каждый морфизм $\mu : [\mathbf{n}] \to [\mathbf{m}]$ категории ${}^*\omega$ однозначно определяется числом m и подмножеством $\mu([\mathbf{n}]) \subseteq [\mathbf{m}]$. Это замечание позволяет определить взаимно однозначное соответствие $\mu^* : \Delta \to \operatorname{Mor}{}^*\omega$ между подмножеством $\Delta \rightleftharpoons \{n \mid n \in \omega, r(n) < 2^{l(n)}\} \subseteq \omega$ и множеством $\operatorname{Mor}{}^*\omega$, считая, что $n \in \Delta$ кодирует морфизм $\mu : [\mathbf{k}] \to [\mathbf{l}]$ такой, что $l = l(n)$, а $r(n)$ — номер подмножества $\mu([\mathbf{k}]) \subseteq [\mathbf{l}] = [\mathbf{l}(n)]$. Очевидно, что Δ есть Δ-подмножество ω.

Определение 3.3 (Ю. Л. Ершов [2]). Пусть $S = \{\mathfrak{M}_n, \mu_* \mid n \in \omega, \mu \in \operatorname{Mor}{}^*\omega\}$ — ${}^*\omega$-спектр. *Конструктивизацией* S называется любая вычислимая последовательность конструктивизаций

$$(\mathfrak{M}_0, \nu_0), (\mathfrak{M}_1, \nu_1), \ldots, (\mathfrak{M}_n, \nu_n), \ldots, \quad n \in \omega,$$

вместе с Σ-функцией $f : \Delta \times \omega \to \omega$ такой, что для любых $n, m, k \in \omega$, $\mu : [\mathbf{n}] \to [\mathbf{m}] \in \operatorname{Mor}{}^*\omega$ если $n^* \in \Delta$ такой, что $\mu^*(n^*) = \mu$, то $\mu_* \nu_n(k) = \nu_m f(n^*, k)$.

${}^*\omega$-Спектр S называется *конструктивизируемым*, если для него существует конструктивизация.

Теорема 3.1 (Ю. Л. Ершов [2]). *Теория T имеет несчетную модель, Σ-определимую в $\mathbb{HF}(\mathbb{L})$, $\mathbb{L} \models \mathrm{DLO}$, тогда и только тогда, когда существует конструктивизируемый ${}^*\omega$-спектр S, удовлетворяющий условию $(*)$ и такой, что $\mathfrak{M}_L^S \models T$.*

Предложение 3.3. *Для c-простой теории следующие условия эквивалентны:*

1) *существует конструктивизируемый ${}^*\omega$-спектр S, удовлетворяющий условию $(*)$ и такой, что $\mathfrak{M}_L^S \models T$;*

2) *теория T имеет вычислимые невырожденные упорядоченно неразличимые ω-типы.*

Доказательство. Импликация из 1) в 2) следует из предыдущей теоремы и предложения 3.1. Установим импликацию из 2) в 1). Пусть p — ω-тип теории T, существование которого утверждается в п. 2) предложения, и пусть $\mathfrak{M}_0 \models T$ — вычислимая модель.

Определим ${}^*\omega$-спектр теории T следующим образом: положим $\mathfrak{M}_n = \mathfrak{M}_0$ для всех $n \in \omega$. Зафиксируем вычислимую реализацию

$$I = \langle i_0, i_1, \dots \rangle \subseteq M_0$$

ω-типа p в системе $\mathfrak{M}_0$. Для каждого морфизма $\mu : [\mathbf{n}] \to [\mathbf{m}]$ категории ${}^*\omega$ определим вложение $\mu_* : \mathfrak{M}_n \to \mathfrak{M}_m$ следующим образом: для всех $k < n$ и $s \geq n$ полагаем

$$\mu_*(i_k) = i_{\mu(k)}, \quad \mu_*(i_{n+s}) = i_{m+s}.$$

Далее, пусть $\mathscr{H}(I) \subseteq M_0$ — эффективная скулемовская оболочка множества I в системе $\mathfrak{M}_0$. Она существует вследствие того, что T — c-простая теория, и отсюда же следует, что $\mathscr{H}(I) \simeq \mathfrak{M}_0$. Любое сохраняющее порядок эффективное вложение множества I в себя продолжается до эффективного изоморфного вложения системы $\mathscr{H}(I)$ в себя. Обозначим его через μ_*. Легко понять, что $\mu_* : \mathfrak{M}_n \to \mathfrak{M}_m$, причем для различных морфизмов $\mu_0, \mu_1 : [\mathbf{1}] \to [\mathbf{2}]$ морфизмы $(\mu_0)_*$ и $(\mu_1)_*$ также различны и выполняется условие на композиции морфизмов. Условие $\mathfrak{M}_L^S \models T$ выполняется вследствие модельной полноты T. $\square$

Следствие 3.1. *Пусть T — c-простая теория. Следующие условия эквивалентны:*

1) *T имеет несчетную модель, Σ-определимую в $\mathbb{HF}(\mathbb{L})$, $\mathbb{L} \models \mathrm{DLO}$;*

2) *T имеет вычислимый невырожденный упорядоченно неразличимый ω-тип.*

В работе [1] установлен следующий критерий существования у c-простой теории несчетной модели с «достаточно простой» Σ-степенью, частным случаем которого является предыдущее следствие (отметим, что приведенное здесь новое доказательство этого факта является более простым).

Теорема 3.2. *Пусть T — c-простая теория, и пусть $\mathfrak{A}$ — (произвольная) вычислимая модель T.*

(i) *T имеет несчетную модель, Σ-определимую в $\mathbb{HF}(\mathbb{L})$, $\mathbb{L} \models \mathrm{DLO}$, тогда и только тогда, когда существует бесконечное вычислимое множество упорядоченно неразличимых элементов в $\mathfrak{A}$ размерности* 1.

(ii) *T имеет несчетную модель, Σ-определимую в $\mathbb{HF}(\mathbb{S})$, $\mathbb{S} \models \mathrm{E}$, тогда и только тогда, когда существует бесконечное вычислимое множество тотально неразличимых элементов в $\mathfrak{A}$ размерности* 1.

Замечание. Теорема 3.2 не справедлива, если теория T не является c-простой. Действительно, для теории ACF алгебраически замкнутых полей существует вычислимая модель, имеющая бесконечное вычислимое множество тотально неразличимых элементов (см. [5]). В то же время никакая несчетная модель теории ACF не определима в $\mathbb{HF}(\mathbb{S})$, $\mathbb{S} \models \mathrm{E}$ (см. [2]).

Непосредственно из леммы 2.4 и следствия 3.1 вытекает

Следствие 3.2. *Если T — c-простая дискретная теория, то существует несчетная система $\mathfrak{A} \models T$, для которой $\mathfrak{A} \leq_\Sigma \mathbb{L}$, $\mathbb{L} \models \mathrm{DLO}$.*

Аналогично из следствий 2.1 и 3.1 получаем

Следствие 3.3. *Если T — sc-простая теория конечной сигнатуры, то существует несчетная система $\mathfrak{A} \models T$, для которой $\mathfrak{A} \leq_\Sigma \mathbb{L}$, $\mathbb{L} \models$ DLO.*

Как уже отмечалось, условие конечности сигнатуры теории существенно. Таким образом, гипотеза 1 верна для класса SC-SIMPLE$_{\text{fin}}$, но не верна для класса SC-SIMPLE.

4. Примеры дискретных c-простых теорий

Для ω-категоричной теории T ее *функцией Рыль-Нардзевского* называется функция $r_T : \omega \to \omega$ такая, что для всякого $n \in \omega$ значение $r_T(n)$ равно числу (полных) n-типов теории T.

Лемма 4.1. *Пусть T — ω-категоричная разрешимая теория. Следующие утверждения эквивалентны:*

1) *T имеет вычислимое множество полных формул;*

2) *T имеет вычислимую функцию Рыль-Нардзевского.*

Доказательство. 1. Пусть $n \in \omega$, и пусть $\bar{x} = \langle x_0, \dots, x_{n-1}\rangle$. Вследствие разрешимости равномерно по n эффективно находятся полные формулы $\varphi_1(\bar{x}), \dots, \varphi_k(\bar{x})$ теории T (с минимальными гёделевскими номерами), для которых

$$T \vdash \forall \bar{x}(\varphi_1(\bar{x}) \vee \ldots \vee \varphi_k(\bar{x})).$$

Тогда $r_T(n) = k$.

2. Пусть $n \in \omega$, $\bar{x} = \langle x_0, \dots, x_{n-1}\rangle$, и пусть $r_T(n) = k$. Вследствие разрешимости теории T эффективно находятся формулы $\varphi_1(\bar{x}), \dots, \varphi_k(\bar{x})$ (с минимальными гёделевскими номерами) такие, что $T \vdash \forall \bar{x}(\varphi_1(\bar{x}) \vee \ldots \vee \varphi_k(\bar{x}))$ и для всех $1 \leq i, j \leq k$, $i \neq j$, справедливо

$$T \vdash \neg\exists \bar{x}(\varphi_i(\bar{x}) \wedge \varphi_j(\bar{x})).$$

Тогда $\varphi_1(\bar{x}), \dots, \varphi_k(\bar{x})$ — полные формулы теории T от переменных $\bar{x}$. $\square$

Замечание. Существуют примеры ω-категоричных разрешимых теорий без вычислимой функции Рыль-Нардзевского. Более того, существуют примеры таких теорий с дополнительным условием подмодельной полноты.

Одним из способов построения ω-категоричных теорий является конструкция Фрессе прямого предела класса конечно порожденных систем, удовлетворяющего некоторым дополнительным условиям.

Определение 4.1. Пусть K — класс конечно порожденных систем некоторой фиксированной сигнатуры.

1. K обладает свойством *наследственности* ($K \models$ HP), если для любых $\mathfrak{A} \in K$ и $\mathfrak{B}$ из $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ следует, что $\mathfrak{B} \in K$.

2. K обладает свойством *совместной вложимости* ($K \models$ JEP), если для любых $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K$ существует $\mathfrak{C} \in K$, для которой $\mathfrak{A} \hookrightarrow \mathfrak{C}$ и $\mathfrak{B} \hookrightarrow \mathfrak{C}$.

3. K обладает свойством *амальгамируемости* ($K \models$ AP), если для любых $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C} \in K$, для которых существуют вложения $f_1 : \mathfrak{C} \hookrightarrow \mathfrak{A}$ и $f_2 : \mathfrak{C} \hookrightarrow \mathfrak{B}$, существуют $\mathfrak{D} \in K$ и вложения $g_1 : \mathfrak{A} \hookrightarrow \mathfrak{D}$ и $g_2 : \mathfrak{B} \hookrightarrow \mathfrak{D}$ такие, что $f_1 g_1 = f_2 g_2$.

4. K является *равномерно локально конечным* ($K \models$ ULF), если существует функция $f : \omega \to \omega$ такая, что для любой $\mathfrak{A} \in K$ если система $\mathfrak{A}$ имеет не более n порождающих, то число элементов в $\mathfrak{A}$ не превосходит $f(n)$.

Известно, что если класс K конечно порожденных систем обладает свойствами HP, JEP и AP, то существует единственная с точностью до изоморфизма подмодельно полная счетная система $\mathfrak{A}$, класс конечно порожденных систем которой (с точностью до изоморфизма) совпадает с классом K (см, например, [6]). Будем называть такую систему $\mathfrak{A}$ *пределом Фрессе* класса K (и обозначать $\mathfrak{A} = \lim_{\mathrm{F}} K$).

Теорема 4.1 [6]. *Пусть K — счетный класс конечно порожденных систем некоторой конечной сигнатуры, обладающий свойствами* HP, JEP, AP *и* ULF, *и пусть* $\lim_{\mathrm{F}} K$ *— предел Фрессе класса K. Тогда* $\mathrm{Th}(\lim_{\mathrm{F}} K)$ *ω-категорична.*

Определение 4.2. Класс K конечно порожденных систем сигнатуры σ называется ULF-*вычислимым*, если он вычислим, и вычислима функция f из определения свойства ULF. Класс K будем называть ULF-*вычислимо представимым*, если существуют ULF-вычислимый класс K' и сохраняющее изоморфизм сюръективное отображение $\tau : K \twoheadrightarrow K'$.

Предложение 4.1. *Пусть K — класс конечно порожденных систем некоторой конечной сигнатуры, удовлетворяющий условиям* HP, JEP, AP *и* ULF. *Тогда* $\mathrm{Th}(\lim_{\mathrm{F}} K) \in$ SC-SIMPLE *тогда и только тогда, когда K имеет* ULF-*вычислимое представление.*

Доказательство легко следует из леммы 4.1.

Приведем некоторые примеры *sc*-простых теорий, получающихся в результате конструкции Фрессе.

Пусть FinGraph — класс всех конечных неупорядоченных графов. Легко убедиться, что этот класс удовлетворяет условиям HP, JEP, AP и имеет ULF-вычислимое представление.

Определение 4.3. Неупорядоченный граф $\mathfrak{A}$ называется *случайным*, если для любых конечных $X, Y \subseteq A$ таких, что $X \cap Y = \varnothing$, существует вершина $v \in A \setminus (X \cup Y)$ такая, что v смежна со всеми вершинами из X, v не смежна ни с одной из вершин из Y.

Предложение 4.2 [6]. *Если $\mathfrak{A}$ — предел Фрессе класса* FinGraph, *то $\mathfrak{A}$ — случайный граф. Как следствие,* $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}) \in \text{SC-SIMPLE}_{\text{fin}}$.

Доказательство следующего предложения непосредственно вытекает из определений.

Лемма 4.2. *Если в подмодельно полной теории T предикатной сигнатуры σ все предикаты симметричны, т. е. $T \vdash (R(\bar{x}) \leftrightarrow R(f(\bar{x})))$ для любой перестановки f множества $\{0, \dots, lh(\bar{x}) - 1\}$, то в любой модели $\mathfrak{M}$ теории T всякое множество упорядоченно неразличимых элементов является множеством тотально неразличимых элементов.*

Таким образом, если $\mathfrak{A}$ — случайный граф, то всякое множество упорядоченно неразличимых элементов в $\mathfrak{A}$ является множеством тотально неразличимых элементов.

Следствие 4.1. *Существует несчетный случайный граф $\mathfrak{A}$ такой, что* $\mathfrak{A} \leq_\Sigma \mathbb{S}$, $\mathbb{S} \models \mathrm{E}$.

Пусть σ — конечная предикатная сигнатура. Класс $\mathrm{Fin}(\sigma)$ удовлетворяет условиям HP, JEP, AP и имеет ULF-вычислимое представление.

Определение 4.4. Пусть σ — конечная сигнатура. *Случайной системой* $\mathrm{Ran}(\sigma)$ сигнатуры σ называется предел Фрессе класса $\mathrm{Fin}(\sigma)$.

Следствие 4.2. $\mathrm{Th}(\mathrm{Ran}(\sigma)) \in \text{SC-SIMPLE}_{\text{fin}}$, *и существует несчетная система* $\mathfrak{A} \equiv \mathrm{Ran}(\sigma)$ *такая, что* $\mathfrak{A} \leq_\Sigma \mathbb{L}$, $\mathbb{L} \models \mathrm{DLO}$.

Системой аксиом для $\mathrm{Th}(\mathrm{Ran}(\sigma))$ являются предложения $\forall \bar{x}(\psi(\bar{x}) \to \exists y \in \chi(\bar{x}, y))$, где $\psi(\bar{x})$ и $\chi(\bar{x}, y)$ — произвольные непротиворечивые бескванторные формулы сигнатуры σ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Стукачев А. И.* Σ-определимость в наследственно конечных надстройках и пары моделей // Алгебра и логика. 2004. Т. 43, № 4. С. 459–481.
2. *Ершов Ю. Л.* Определимость и вычислимость. Новосибирск: Научная книга, 1996.
3. *Стукачев А. И.* О степенях представимости моделей. II // Алгебра и логика. 2008. Т. 47, № 1. С. 108–126.
4. *Ershov Yu. L.* Σ-definability of algebraic structures // Handbook of recursive mathematics. V. 1. Recursive model theory Amsterdam: Elsevier Sci. B. V., 1998. P. 235—260. (Stud. Logic Found. Math.; V. 138) .
5. *Kierstead H. A., Remmel J. B.* Indiscernibles and decidable models // J. Symbol. Logic. 1983. V. 48, N 1. P. 21–32.
6. *Hodges W.* Model theory. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1993.

Статья поступила 8 декабря 2008 г.

Стукачев Алексей Ильич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
Новосибирский гос. университет, механико-математический факультет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
aistu@math.nsc.ru