Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2010. Том 51, № 3

УДК 512.542

ГРУППЫ, ИЗОСПЕКТРАЛЬНЫЕ ЗНАКОПЕРЕМЕННОЙ ГРУППЕ СТЕПЕНИ 10

А. М. Старолетов

Аннотация. *Спектром конечной группы* называется множество порядков ее элементов. Описано композиционное строение любой конечной группы, спектр которой такой же, как у знакопеременной группы степени 10, и неизоморфной последней. Такая группа изоморфна полупрямому произведению абелевой $\{3,7\}$-группы, которая содержит элемент порядка 21, на симметрическую группу степени 5.

Ключевые слова: спектр группы, изоспектральная группа, распознавание групп по спектру, простая группа, группа Фробениуса, знакопеременная группа.

Введение

Пусть G — конечная группа. *Спектром* $\omega(G)$ называется множество порядков элементов группы G. Так как для любого порядка элемента все его делители тоже будут порядками некоторых элементов, спектр полностью определяется множеством $\mu(G)$, которое состоит из всех максимальных по делимости элементов из $\omega(G)$. Две группы называются *изоспектральными*, если их спектры совпадают. Группа G называется *распознаваемой* (*по спектру*), если любая изоспектральная G группа изоморфна G. Цель нашей работы — описание конечных групп, изоспектральных знакопеременной группе A_{10}. Интерес к этой теме вызван прежде всего тем, что до последнего времени A_{10} оставалась одной из двух простых групп, для каждой из которых не было известно, может ли она быть изоспектральной разрешимой группе (см. [1]). Кроме того, A_{10} — единственная простая группа со связным графом простых чисел, в котором нет коклики степени 3 (см. [1, лемма 9]), и единственная среди знакопеременных групп со связным графом простых чисел, для которой установлен факт ее нераспознаваемости по спектру (см. [2, предложение 2]).

Теорема. *Пусть G — конечная группа, изоспектральная A_{10} и не изоморфная A_{10}. Тогда G — полупрямое произведение абелевой $\{3,7\}$-группы A, содержащей элемент порядка 21, на централизатор C в G некоторой инволюции $t \in G$, инвертирующей A. При этом C — расширение $\langle t\rangle$ посредством S_5 и силовская 2-подгруппа из C — обобщенная группа кватернионов порядка 16.*

Неразрешимость любой группы, изоспектральной A_{10}, доказана в [3].

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ (НШ–344.2008.1), АВЦП Рособразования «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект 2.1.1.419) и Лаврентьевского гранта для коллективов молодых ученых СО РАН (постановление Президиума СО РАН № 43 от 04.02.2010).

1. Предварительные результаты

По спектру строится *граф простых чисел* группы G: вершины этого графа — простые делители порядка группы; вершины, соответствующие различным простым числам p и q, в этом графе соединены ребром тогда и только тогда, когда $pq \in \omega(G)$. Обозначим через $t(2,G)$ наибольшее число вершин в независимых множествах графа простых чисел, содержащих простое число 2 (множество вершин графа называется *независимым*, если его вершины попарно не смежны).

В настоящей работе используются следующие обозначения: $\mathrm{Syl}_p(G)$ — множество всех силовских p-подгрупп группы G; $H_\pi(G)$ — множество всех холловых π-подгрупп группы G; группа Фробениуса типа $n:m$ для натуральных чисел n,m является группой Фробениуса, порядок ядра которой равен n, порядок дополнения равен m; $A.B$ — расширение группы A с помощью группы B (конкретное в каждом отдельном случае).

Непосредственно проверяется

Лемма 1. $\mu(A_{10}) = \{8,9,10,12,15,21\}$, $t(2,A_{10}) = 2$.

Лемма 2 (см. [3]). *Пусть группа H изоспектральна группе A_{10}. Тогда H — неразрешимая группа.*

Лемма 3 (см. [4, предложение 2]). *Пусть G — конечная неразрешимая группа и $t(2,G) \geq 2$. Тогда существует конечная неабелева простая группа S такая, что $S \leq \overline{G} = G/N \leq \mathrm{Aut}(S)$ для максимальной разрешимой нормальной подгруппы N в G.*

Лемма 4. *Пусть R — почти простая группа, при этом $\omega(R) \subseteq \omega(A_{10})$. Тогда R изоморфна одной из групп табл.* 1.

Доказательство. Табл. 1 в [2] содержит почти простые группы с простыми делителями порядка, не превосходящими 11. Если рассматривать в этой таблице группы R со свойством $\omega(R) \subseteq \omega(A_{10})$, то получается в точности табл. 1.

Лемма 5 (см. [5, теорема 3.1]). *Пусть G — группа Фробениуса с ядром A и дополнением B. Тогда*

(a) *A нильпотентна;*

(b) *произвольная силовская p-подгруппа в B циклическая для нечетного простого числа p, циклическая или обобщенная группа кватернионов для $p = 2$.*

Лемма 6 (см. [6, лемма 10]. *Пусть N — нормальная элементарная абелева p-подгруппа группы G, $K \cong G/N$, $G_1 = NK$ — естественное полупрямое произведение. Тогда $\omega(G_1) \subseteq \omega(G)$.*

Лемма 7. *Пусть $N \lhd G$, N разрешима, $|G/N|$ делится на 7, $\omega(G)$ не содержит 14 и 35. Тогда $H_{\{2,5\}}(N)$ нильпотентна.*

Доказательство. Пусть $H = H_{\{2,5\}}(G)$. По замечанию Фраттини $G/N \cong N_G(H)/N_N(H)$. Пусть $U = \mathrm{Syl}_7(N_G(H))$. Так как в G нет элементов порядка 14 и 35, группа HU является группой Фробениуса с ядром H, поэтому H нильпотентна по лемме 5.

Лемма 8 (см. [7, леммы 1.4–1.6]). *Пусть H — полупрямое произведение элементарной абелевой p-группы V на группу A_m, p простое, $m \geq 6$, $m \neq 8$. Если A_m действует точно на V, то $\omega(H) \nsubseteq \omega(A_{m+2})$.*

Таблица 1. Почти простые группы $L \leq R \leq \mathrm{Aut}(L)$,
для которых $\omega(R) \subseteq \omega(A_{10})$.

L	R	$\mu(R)$	порядок R	L	R	$\mu(R)$	порядок R
A_5	L	$5,3,2$	$2^2\cdot 3\cdot 5$		$L.2_3$	$10,8,7,6$	
	$L.2$	$6,5,4$			$L.3.2_3$	$21,15,10,8,6$	
$L_2(7)$	L	$7,4,3$	$2^3\cdot 3\cdot 7$	$U_4(2)$	L	$12,9,5$	$2^6\cdot 3^4\cdot 5$
	$L.2$	$8,7,6$			$L.2$	$12,10,9,8$	
$L_2(9)$	L	$5,4,3$	$2^3\cdot 3^2\cdot 5$	$U_3(5)$	L	$10,8,7,6$	$2^4\cdot 3^2\cdot 5^3\cdot 7$
	$L.2_1$	$6,5,4$		A_9	L	$15,12,10,9,7$	$2^6\cdot 3^4\cdot 5\cdot 7$
	$L.2_2$	$10,8,2$		J_2	L	$15,12,10,8,7$	$2^7\cdot 3^3\cdot 5^2\cdot 7$
	$L.2_3$	$8,5,3$		$S_6(2)$	L	$15,12,10,9,8,7$	$2^9\cdot 3^4\cdot 5\cdot 7$
	$L.2^2$	$10,8,6$		A_{10}	L	$21,15,12,10,9,8$	$2^7\cdot 3^4\cdot 5^2\cdot 7$
$L_2(8)$	L	$9,7,2$	$2^3\cdot 3^2\cdot 7$	$U_4(3)$	L	$12,9,8,7,5$	$2^7\cdot 3^6\cdot 5\cdot 7$
	$L.3$	$9,7,6$		$O_8^+(2)$	L	$15,12,10,9,8,7$	$2^{12}\cdot 3^5\cdot 5^2\cdot 7$
A_7	L	$7,6,5,4$	$2^3\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7$				
	$L.2$	$12,10,7$					
$U_3(3)$	L	$12,8,7$	$2^5\cdot 3^3\cdot 7$				
	$L.2$	$12,8,7$					
A_8	L	$15,7,6,4$	$2^6\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7$				
	$L.2$	$15,12,10,8,7$					
$L_3(4)$	L	$7,5,4,3$	$2^6\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7$				
	$L.2_1$	$8,7,6,5$					
	$L.3$	$21,15,6,4$					
	$L.6$	$21,15,12,8$					

Лемма 9 [8, лемма 1]. *Если группа Фробениуса FC с ядром F и циклическим дополнением $C=\langle c\rangle$ порядка n действует точно на векторном пространстве V ненулевой характеристики p, взаимно простой с порядком группы F, то естественное полупрямое произведение VC содержит элемент порядка $p\cdot n$ и* $\dim(C_V(c))>0$.

Лемма 10 (см. [9, лемма 15]). *Пусть p и q — простые числа и $H\langle\phi\rangle$ — полупрямое произведение нормальной $\{2,q,p\}'$-подгруппы H и циклической группы $\langle\phi\rangle$ порядка q. Пусть $[H,\phi]\neq 1$ и группа $H\langle\phi\rangle$ действует точно на векторном пространстве V над полем F_p порядка p. Тогда $C_V(\phi)\neq 0$.*

Лемма 11 [5]. (a) *Если p'-автоморфизм p-группы P действует тривиально на $P/\Phi(P)$, то он действует тривиально на P.*

(b) *Если G — расширение p-группы P с помощью группы S, S порождается p'-элементами, S действует сопряжением тривиально на $P/\Phi(P)$, то $G=PC_G(P)$.*

Лемма 12. *Пусть $G=T.SL_2(9)$, где $\pi(T)\subseteq\{3,7\}$. Тогда*

1. *В G существует холлова $7'$-подгруппа.*
2. *Все холловы $7'$-подгруппы в G сопряжены.*
3. *Каждая $7'$-подгруппа в G вложена в некоторую холлову $7'$-подгруппу.*
4. *В каждой холловой $7'$-подгруппе есть нормальная 3-подгруппа, факторгруппа по которой изоморфна $SL_2(9)$.*

Доказательство. Докажем все четыре утверждения индукцией по порядку группы T. Когда T является 3-группой, все пункты выполнены автоматически. Если T — 7-группа, то утверждения следуют из теоремы Шура — Цассенхауза. Пусть теперь порядок группы T делится на 21. Тогда либо $O_3(T) \neq 1$, либо $O_7(T) \neq 1$.

(a) Пусть $O_3(T) \neq 1$. Тогда в группе $G/O_3(T)$ есть холлова $7'$-подгруппа, ее прообраз — холлова $7'$-подгруппа в G. Рассмотрим две произвольные холловы $7'$-подгруппы R и S в G. Тогда если $\overline{R} = R/O_3(T)$, $\overline{S} = S/O_3(T)$, то существует элемент $\bar{g}$ в $G/O_3(T)$ такой, что $\overline{R}^{\bar{g}} = \overline{S}$. Пусть G — прообраз $\bar{g}$, тогда образ группы R^g есть $\overline{S}$, следовательно, R^g — подгруппа в S, поэтому $R^g = S$.

Докажем утверждение п. 3. Пусть M — $7'$-подгруппа в G. Тогда $O_3(T) \cdot M/O_3(T)$ — $7'$-подгруппа в $G/O_3(T)$, значит, она вложена в некоторую холлову $7'$-подгруппу. Прообраз этой холловой подгруппы и есть искомая холлова $7'$-подгруппа в G для M. Пусть R — холлова $7'$-подгруппа в G, $\overline{R} = R/O_3(T)$, тогда $SL_2(9) = \overline{R}/\overline{S}$ для некоторой 3-группы S. Пусть S — прообраз $\overline{S}$ в группе G, тогда $R/S \cong \overline{R}/\overline{S} = SL_2(9)$. В этом случае все четыре утверждения выполнены.

(b) Пусть $O_7(T) \neq 1$. Тогда в группе $G/O_7(T)$ есть холлова $7'$-подгруппа, в прообразе H этой подгруппы $O_7(T)$ является нормальной силовской 7-подгруппой. По теореме Шура — Цассенхауза существует дополнение в H для $O_7(T)$, которое и будет искомой холловой $7'$-подгруппой в G. П. 2 доказывается, как и в предыдущем случае. Докажем вложение: пусть M — $7'$-подгруппа в G. Тогда $O_7(T) \cdot M/O_7(T)$ — $7'$-подгруппа в $G/O_7(T)$, значит, она вложена в некоторую холлову $7'$-подгруппу. Прообраз этой холловой подгруппы обозначим через K. По теореме Шура — Цассенхауза в K существует дополнение L для $O_7(G)$, при этом L — холлова $7'$-подгруппа в G. Получаем $O_7(T)M \leq O_7(T)L$, следовательно, $M \leq L$. Так как холловы $7'$-подгруппы в G и $G/O_7(T)$ изоморфны, то п. 4 выполнен по индукции. Лемма доказана.

2. Доказательство основной теоремы

Пусть G — конечная группа, изоспектральная A_{10}. Обозначим через N максимальную нормальную разрешимую подгруппу в G. По лемме 1 $t(2, G) \geq 2$, по лемме 2 G неразрешима, поэтому по лемме 3 существует простая неабелева группа S такая, что $S \leq G/N \leq \mathrm{Aut}(S)$. По лемме 4 S — одна из групп табл. 1. Заметим, что если N — единичная группа, то из табл. 1 следует, что G изоморфна A_{10}, поэтому далее предполагаем, что N — неединичная группа. Докажем, что S изоморфна A_5. Для этого докажем, что остальные случаи для S невозможны.

Лемма 13. *Пусть $\omega(G) = \omega(A_{10})$, N — нормальная подгруппа в G, $7 \in \pi(N)$, $|G/N| \vdots 5$. Тогда $\mathrm{Syl}_2(G)$ — обобщенная группа кватернионов порядка 16 или циклическая группа порядка 8, $\mathrm{Syl}_5(G)$ имеет порядок 5.*

Доказательство. Пусть $\overline{G} = G/O_3(N)$, $\overline{N} = N/O_3(N)$. Тогда либо $A = O_{\{2,5\}}(\overline{N}) \neq 1$, либо $B = O_7(\overline{N}) \neq 1$.

(a) Пусть $A \neq 1$. Рассмотрим группу $K = A \cdot \mathrm{Syl}_7(\overline{G})$. Поскольку 14 и 35 не принадлежат $\omega(G)$, то K — группа Фробениуса с дополнением $\mathrm{Syl}_7(\overline{G})$. Из леммы 5 следует, что группа $\mathrm{Syl}_7(\overline{G})$ имеет порядок 7, значит, группа $\mathrm{Syl}_7(N)$ имеет порядок 7. Тогда по замечанию Фраттини получаем, что 5 делит порядок $N_G(\mathrm{Syl}_7(N))$. Но порядок группы $\mathrm{Aut}(\mathrm{Syl}_7(N))$ равен 6, значит, 5 делит порядок $C_G(\mathrm{Syl}_7(N))$, поэтому $35 \in \omega(G)$; противоречие.

(b) Пусть $B \neq 1$. Рассмотрим группу $K = B \cdot \mathrm{Syl}_2(\overline{G})$. Так как $14 \notin \omega(G)$, то K — группа Фробениуса с дополнением $\mathrm{Syl}_2(\overline{G})$, поэтому по лемме 5 группа

$\mathrm{Syl}_2(\overline{G})$ — циклическая или обобщенная группа кватернионов. Силовские 2-подгруппы в G и $\overline{G}$ изоморфны, поэтому так как $8 \in \omega(G)$, то $\mathrm{Syl}_2(G)$ имеет требуемый вид. Аналогично порядок $\mathrm{Syl}_5(G)$ равен 5.

Лемма 14. *$S \ncong A_9$ и $S \ncong A_{10}$.*

Доказательство. Рассмотрим для некоторого простого p силовскую p-группу P из N. По замечанию Фраттини $S \cong G/N \cong N_G(P)/N_N(P)$. Проделав такую же операцию с другими силовскими подгруппами из $N_N(P)$, можно прийти к ситуации, когда N нильпотентна. Далее, если профакторизовать по всем, кроме одной, силовским подгруппам, можно считать, что N — p-группа для некоторого простого p. Наконец, профакторизовав N по $\Phi(N)$, приходим к ситуации, когда N — элементарная абелева группа. По лемме 6 можно считать, что $G = NS$ — естественное полупрямое произведение. Тогда $\omega(G) \subseteq \omega(A_{10})$, что противоречит лемме 8.

Лемма 15. *$S \ncong L_2(9)$.*

Доказательство. Поскольку 7 не делит порядок группы $\mathrm{Aut}(L_2(9))$, то 7 делит порядок N. Заметим, что так как в $L_2(9)$ силовская 2-подгруппа нециклическая, то и в G силовская 2-подгруппа не может быть циклической. По лемме 13 $|\,\mathrm{Syl}_2(G)| = 16$, $|\,\mathrm{Syl}_5(G)| = 5$. Поэтому $G/N = L_2(9)$, следовательно, число $|N|/2$ нечетное. Пусть T — подгруппа в N индекса 2. Тогда $G/N \cong (G/T)/(N/T)$. Поэтому либо $G/T \cong Z_2 \times L_2(9)$, либо $G/T \cong SL_2(9)$. В первом случае $8 \notin \omega(G)$, значит, G — расширение $SL_2(9)$ с помощью группы T. Далее, $\mathrm{Syl}_5(G)$ имеет порядок 5, и $9 \notin \omega(L_2(9))$, следовательно, $\pi(T) = \{3, 7\}$. По лемме 12 в G существует холлова $7'$-подгруппа H, при этом $\omega(H) = \{8, 9, 10, 12, 15\}$. Пусть V — подгруппа в H такая, как в п. 4 леммы 11: $H/V = SL_2(9)$. Так как в группе $SL_2(9)$ нет элементов порядка 12, некоторая степень элемента порядка 12 лежит в V. Пусть b — это шестая степень элемента порядка 12 из H. Образ элемента b — инволюция из центра $SL_2(9)$. По ранее замеченному $C_V(b) \neq 1$. Если $C_{Z(V)}(b) = 1$, то будем рассматривать вместо H ее образ относительно $Z(V)$. Продолжая эту процедуру, можно считать, что $C_{Z(V)}(b) \neq 1$. Так как $SL_2(9)$ действует на $Z(V)$, далее будем считать, что V абелева, $C_V(b) \neq 1$. Аналогично, факторизуя по минимальной нормальной подгруппе в V, можно свести ситуацию к случаю, когда V — элементарная абелева группа. Если действие $SL_2(9)$ на V тривиальное, то в H есть элемент порядка 30, если — точное, то из таблицы 3-модулярных характеров для $SL_2(9)$ (см. [10]) видно, что инволюция из центра действует на V без неподвижных точек; противоречие. Значит, инволюция из $SL_2(9)$ действует тривиально на V. В действии $SL_2(9)$ на V есть элемент порядка 9, поэтому есть и элемент порядка 18; противоречие.

Лемма 16. *$S \ncong U_4(2)$.*

Доказательство. Поскольку порядок группы $\mathrm{Aut}(U_4(2))$ не делится на 7, то 7 делит порядок группы N. Тогда по лемме 13 $|\,\mathrm{Syl}_2(G)| \leq 16$, но порядок G/N делится на 32; противоречие.

Лемма 17. *$S \ncong L_2(8)$.*

Доказательство. Из табл. 1 видно, что в любом случае $4, 5 \in \omega(N)$. По лемме 7 $H_{\{2,5\}}(N)$ нильпотентна, поэтому $20 \in \omega(G)$; противоречие.

Лемма 18. *$S \ncong U_3(5)$, $S \ncong U_4(3)$.*

Доказательство. По лемме 13 порядок N не делится на 7. Как и в лемме 14, можно считать, что N — элементарная абелева группа. Заметим, что

S действует точно на N (иначе найдется элемент порядка 14, 24 или 35 соответственно для $p = 2, 3, 5$). Далее можно предполагать, что G действует точно и неприводимо на N. Из таблицы p-модулярных характеров для S (см. [10]) видно, что тогда в G найдется элемент порядка 14, 20 или 35 соответственно; противоречие.

Лемма 19. $S \ncong S_6(2)$, $S \ncong O_8^+(2)$.

Доказательство. Будем считать, что $S = S_6(2)$, второй случай аналогичен. Как и в лемме 14, можно считать, что N — p-группа для $p = 2, 3, 5$. Группа S_8 содержится в $S_6(2)$ и содержит группы Фробениуса типа $7:6$ и $8:7$, поэтому в силу леммы 9 для случаев $p = 3, 5$ найдутся элементы порядка 18 или 35, что противоречит лемме 1. Значит, $p = 2$. Но тогда, так как группа $S_6(2)$ почти распознаваема (см. [11]), расширение $S_6(2)$ с помощью 2-группы обязано расширить спектр, что невозможно, учитывая спектры групп $S_6(2)$ и A_{10}.

Лемма 20. $S \ncong L_2(7)$.

Доказательство. Будем считать, что $S = L_2(7)$, иначе вместо G возьмем прообраз $L_2(7)$ из S относительно N. Заметим, что 5 делит порядок N. Пусть H — холлова $\{2,5\}$-подгруппа в N. По замечанию Фраттини $G/N \cong N_G(H)/N_N(H)$. Пусть силовская 3-подгруппа T в $N_N(H)$ неединичная и $[H,T] \neq 1$. Пусть U — подгруппа порядка 7 в прообразе силовской 7-подгруппы из $L_2(7)$. Если $[T,U] \neq 1$, то с помощью леммы 10 легко показать, что в G есть элемент порядка 14 или 35. Значит, можно считать, что $[T,U] = 1$. Тогда расширение T с помощью $L_2(7)$ изоморфно прямому произведению этих групп. Если исходное предположение неверно, то $[H,T] = 1$. В любом случае имеем подгруппу, изоморфную расширению H с помощью $L_2(7)$. Тогда $L_2(7)$ действует на $Z(P)$, где P — силовская 5-подгруппа в H. Так как $Z(P)$ — элементарная абелева группа и в G нет элементов порядка 35, это действие можно рассматривать как точное представление группы $L_2(7)$ над полем характеристики 5. Можно считать, что оно неприводимое, тогда из таблицы характеров для $L_2(7)$ (см. [10]) получаем, что в таком представлении всегда есть элемент порядка 20; противоречие.

Лемма 21. *Пусть $S \cong A_7$ или $S \cong A_8$. Тогда порядок N делится на 6, но не делится на 7.*

Доказательство. Докажем сначала, что порядок N не делится на 7. Пусть это не так, тогда по лемме 7 силовская 2-подгруппа в G — циклическая группа порядка 8 или обобщенная группа кватернионов порядка 16. Так как у групп A_7, S_7, A_8, S_8 силовская 2-подгруппа — не циклическая и не обобщенная группа кватернионов, то порядок группы N четен, поэтому возможен только случай $S = A_7$, при этом силовская 2-подгруппа в N имеет порядок 2. Если профакторизовать G по нормальной подгруппе в N индекса 2, то полученная группа содержит инволюцию в центре, тем самым элемент порядка 14 лежит в спектре G; противоречие.

Докажем, теперь, что порядок N делится на 6. Заметим, что в S нет элементов порядков 8 и 9 в случае, когда $G/N \cong A_7$, S_7 или A_8, поэтому достаточно рассмотреть случай $G/N \cong S_8$. Так как в G/N нет элементов порядка 9, то $|N|$ делится на 3. Допустим, что N — $\{3,5\}$-группа. Пусть H — силовская 3-подгруппа в N. Тогда $S_8 = G/N \cong N_G(H)/N_N(H)$. Пусть $N_N(H) = H$. Поскольку $H/\Phi(H)$ абелева, S_8 действует на ней сопряжением. Если это действие точное, то из таблицы 3-модулярных характеров для S_8 (см. [10]) видно, что G содержит элемент порядка 24 или 30, чего не может быть по лемме 1. Значит, либо A_8, либо S_8 действует тривиально на $H/\Phi(H)$. В любом случае A_8 действует тривиально на H, ибо порождается $3'$-элементами. Так как в G не может быть элементов порядка 45, то в H нет элементов порядка 9, значит, таких нет и в G; противоречие. Получаем, что $N_N(H)/H$ — нетривиальная 5-группа. Пусть $K = N_N(H)/H$. Тогда S действует на $K/\Phi(K)$, причем это действие точное, так как в G нет элементов порядка 35. В S_8 есть подгруппа Фробениуса типа $8:7$, поэтому по лемме 10 в G есть элемент порядка 35; противоречие. Поэтому порядок N обязан делится на 2. Лемма доказана.

Лемма 22. $S \ncong A_7$, $S \ncong A_8$.

Доказательство. Пусть $S = A_7$ или $S = A_8$. По лемме 13 получаем, что $|N|$ делится на 6. Далее будем считать, что $G/N = A_7$ (в остальных случаях надо взять прообраз A_7 в S относительно N). Докажем, что N — это $\{2,3\}$-группа. Пусть $|N|$ делится на 5 и $H_{\{2,5\}}$ — холлова $\{2,5\}$-подгруппа. По лемме 8 H нильпотентна. Так как $G = N_G(H)N$, то $N_G(H)/N_N(H) \cong G/N \cong A_7$. Очевидно, что $N_N(H)/H$ — 3-группа. Пусть $T = \mathrm{Syl}_3(N)$. Тогда $N_N(H) = HT$ и так как в G нет элементов порядка 30, то $C_N(H) \cap T{=}1$. По замечанию Фраттини некоторая силовская 7-подгруппа K из $N_G(H)$ нормализует T. Предположим, что $[K,T] \neq 1$. Тогда $[K,T]$ не централизует некоторую силовскую q-подгруппу из H для $q = 2$ или 5, так как в G нет элементов порядка 30 и 70. Пусть $V = \mathrm{Syl}_q(H)$ для этого q. Тогда полупрямое произведение $U \leftthreetimes K$ действует точно на V, где $U = T/C_T(V)$. По лемме 11 в G лежит элемент порядка $7q$; противоречие. Значит, либо $[K,T] = 1$, либо $T = 1$. В любом случае получаем, что A_7 действует тривиально на T, следовательно, либо A_7 действует на H (если T и A_7 перестановочны), либо $3.A_7$ действует на H (если T и A_7 образуют нерасщепляемое центральное произведение). Из таблиц 2- и 5-модулярных характеров группы $3.A_7$ и A_7 (см. [10]) соответственно вытекает, что любое неприводимое представление, в котором элемент порядка 7 действует без неподвижных точек, обладает тем свойством, что в $3.A_7$ и A_7 соответственно существует элемент порядка 3, который обладает неподвижной точкой в этих представлениях, тем самым в G есть элемент порядка 30; противоречие. Поэтому N является $\{2,3\}$-группой.

Положим $R_0 = 1$, $R_1 = O_3(G)$, $R_2 = O_{3,2}(G)$, $R_3 = O_{3,2,3}(G)$ и т. д. Для некоторого n впервые выполнено $R_n = N$, при этом очевидно, что $n \geq 2$. Пусть $\overline{G} = G/R_{n-2}$. Тогда $\overline{N}$ — группа, в которой инвариантна силовская p-подгруппа для $p = 2,3$. Пусть $p = 3$. Тогда $\widetilde{G} = G/R_{n-1}$ обладает нетривиальной нормальной 2-подгруппой $\widetilde{N}{=}R_n/R_{n-1}$, фактор по которой изоморфен A_7. Так как в G нет элементов порядка 14, то A_7 действует сопряжением без неподвижных точек на $\widetilde{N}$. Из таблицы 2-модулярных характеров A_7 (см. [10]) следует, что любой композиционный фактор G, лежащий в $\widetilde{N}$, является неприводимым 6-мерным представлением над полем характеристики 2, в котором размерность пространства неподвижных точек элемента порядка 5 равна 2. Так как к $\widetilde{N}$ в $\widetilde{G}'$ есть дополнение (см. [12]), то A_7 действует на $P = R_{n-1}/R_{n-2} \neq 1$. Из таблицы 3-модулярных характеров для A_7 (см. [10]) видно, что $C_P(x) \neq 1$ для элемента порядка 5 из A_7. Поэтому $C_{\overline{R_n}}(x)$ является расширением нетривиальной 3-группы с помощью 2-группы ранга не меньше 2 и поэтому содержит элемент порядка 6. По выбору x получаем, что в G есть элемент порядка 30, поэтому $p = 2$. В этом случае $T = R_{n-1}/R_{n-2}$ является 2-группой, содержащей свой централизатор в $\widetilde{R} = N/R_{n-2}$. С помощью леммы 11 легко показать, что $\widetilde{G}/\widetilde{R} \cong A_7$ действует тривиально на $\widetilde{R}$. Значит, либо $G \cong 3.A_7$, либо $G \cong \widetilde{R} \times A_7$. Покажем, что во втором случае $\widetilde{R}$ имеет порядок 3. Так как в G нет элементов порядка $9 \cdot 7$, то $\widetilde{R}$ периода 3. Если $\widetilde{R}$ нециклическая, то $C_T(\tilde{y}) \neq 1$ для некоторого $\tilde{y}$ из $\widetilde{R}$. Как и ранее, элемент порядка 5 из G централизует в $C_T(\tilde{y})$ некоторый нетривиальный элемент, и, следовательно, в G есть элемент порядка 30; противоречие. Пусть $K = 3.A_7$, если $\widetilde{G} = 3.A_7$, и $K = A_7$, если $\widetilde{G} = \widetilde{R} \times A_7$. В любом случае (когда $S = A_7$ или $S = A_8$) так как в $\overline{G}$ нет элементов порядка 9, а в G он должен быть, то $R_{n-2} \neq 1$. Из таблиц 2-модулярных характеров получаем, что K действует на $\overline{R}$ тривиально. Далее, как и в случае $p = 3$, получаем, что для элемента x порядка 5 из K группа $C_{R_{n-1}/R_{n-3}}(x)$ содержит элемент порядка 6, поэтому G содержит элемент порядка 30; противоречие.

Лемма 23. *Пусть* $S \cong U_3(3)$. *Тогда* $\mathrm{Syl}_3(N)$ *централизует* $O_{3'}(N)$.

Доказательство. Пусть $R = \mathrm{Syl}_3(N)$, $H = O_{3'}(N)N_G(R)$. Тогда H содержит единственный неабелев композиционный фактор, который изоморфен $U_3(3)$. Пусть $C = C_R(O_{3'}(N))$. Предположим, что $C \neq R$. Тогда группа U порядка 7 из $\overline{H} = H/C$ действует на $(O_{3'}(N)R)/C$. Если U не централизует $\overline{R}$, то по лемме 10 в $\overline{H}$ есть элемент порядка $2 \cdot 7$ или $5 \cdot 7$; противоречие. Значит, U централизует $\overline{R}$, поэтому $C_{\overline{H}}(\overline{R})$ содержит $U_3(3)$, но тогда в $\overline{H}$ есть элемент порядка 24; противоречие. Получаем, что $C = R$, что и требовалось доказать.

Лемма 24. $S \ncong U_3(3)$.

Доказательство. Пусть $S = U_3(3)$. Тогда из заключения леммы 14 получаем, что $O_{3',3}(N) = O_{3'}(N) \times O_3(N)$, в частности, $V = O_3(G) \neq 1$. Предположим, что порядок N четен. По лемме 8 холлова $\{2,5\}$-подгруппа L из N нильпотентна. Пусть $Z = Z(L)$. Тогда Z — прямое произведение 2-группы и 5-группы, каждая из которых ранга не выше 2, так как на них действует без неподвижных точек элемент порядка 7. Поэтому $C_V(t) \neq 1$ для некоторого элемента порядка 2 из Z и на $C_V(t)$ действует силовская 5-подгруппа из Z. Получаем, что некоторый элемент порядка 5 из Z централизует некоторый элемент порядка 6 из N; противоречие. Поэтому N — это $\{3,5\}$-группа. Пусть a — элемент порядка 8 из нормализатора силовской 5-подгруппы X из N. Предположим, что $O_5(G) \neq 1$. Если a^4 действует без неподвижных точек на $O_5(G)$ или $O_3(G)$, то образ a^4 лежит в центре группы $G/C_G(O_5(G)) \leq \mathrm{Aut}(O_5(G))$ или $G/C_G(O_3(G)) \leq \mathrm{Aut}(O_3(G))$, тем самым $C_G(O_5(G))$ или $C_G(O_3(G))$ неразрешима, что невозможно, так как порядки этих подгрупп имеют не более двух различных простых делителей. Поэтому a^4 централизует некоторый элемент порядка 15, что также невозможно. Значит, $O_5(G) = 1$. В частности, $Z(\mathrm{Syl}_5(G))$ действует точно на $O_3(G)$, стало быть, по лемме 10 в $O_3(G)Z(\mathrm{Syl}_5(G))\langle a\rangle$ есть элемент порядка 24; противоречие.

Лемма 25. $S \ncong J_2$.

Доказательство. Пусть $S = J_2$. Из табл. 1 видно, что $G/N \cong J_2$. Пусть 7 делит $|N|$. Тогда по лемме 13 силовская 2-подгруппа в G имеет порядок 16, однако порядок G/N делится на 32; противоречие. Так как в J_2 нет элемента порядка 9, то $|N|$ делится на 3. Пусть $R_0 = 1, R_1 = O_3(G), R_2 = O_{3,3'}(G), R_3 = O_{3,3',3}(G)$ и т. д., впервые $R_n = N$ для некоторого n. Тогда $|R_n/R_{n-1}|$ не делится на 3, ибо иначе из таблицы 3-модулярных характеров для J_2 получаем, что элемент порядка 30 принадлежит G. Пусть $\overline{R} = R_n/R_{n-1}$ и $|\overline{S}|$ делится на 5. Тогда по лемме 7 $\overline{R}$ нильпотентна. Значит, J_2 действует на некоторой нетривиальной 5-группе. Так как в J_2 есть группа Фробениуса порядка $2^4 \cdot 5$, то в G есть элемент порядка 25; противоречие. Значит, $\overline{R}$ — нетривиальная 2-группа. Из таблицы 2-модулярных характеров для J_2 (см. [10]) видно, что элемент x из класса 5a имеет размерность пространства неподвижных точек не меньше 2. С помощью леммы 10 легко получить, что $|C_G(x)|$ делится на 3. Так как нециклическая силовская 2-подгруппа из $|C_G(x)|$ действует на силовской 3-подгруппе из $|C_G(x)|$, в $C_G(x)$ есть элемент порядка 6, который коммутирует с x. Получаем, что в G есть элемент порядка 30; противоречие.

Лемма 26. *Пусть $S \cong L_3(4)$. Тогда порядок N делится на 6, но не делится на 5 и 7, более того, N/N' — p-группа для $p = 2$ или 3.*

Доказательство. Пусть $|N|$ делится на 7, тогда по лемме 12 порядок силовской 2-подгруппы не больше 16, но $|G/N|$ делится на 32; противоречие. Докажем, что $|N|$ делится на 6. Если $G/N \simeq L_3(4) \cdot 2_3$ или $G/N \simeq L_3(4) \cdot 3 \cdot 2_3$ (см. табл. 1), то G/N не содержит элементов порядка 9, поэтому $|N|$ делится на 3, докажем, что $|N|$ четно. Допустим, что это не так, и аналогично лемме 14 будем считать, что N — p-группа, где $p = 3$ или 5. Из таблиц модулярных характеров для группы $L_3(4) \cdot 2_3$ (см. [10]) видно, что в этом случае найдутся элементы порядка 24 или 40 соответственно; противоречие.

В остальных случаях для G/N нет элементов порядков 9 и 10, поэтому N делится на 3 и еще хотя бы на одно из чисел 2, 5. Далее считаем, что $G/N \simeq L_3(4)$. Пусть $|N|$ делится на 5. Обозначим холлову $\{2,5\}$-подгруппу в N через H. По лемме 8 H нильпотентна. По замечанию Фраттини $N_G(H)/N_N(H) = L_3(4)$. Пусть $N_N(H)/H = T$ — неединичная 3-группа. Если $[T,U] \neq 1$, где U — силовская 7-подгруппа в $N_G(H)$, то группа PTU содержит элемент порядка $5 \cdot 7$, где P — силовская 5-подгруппа в H; противоречие. Значит, $[T,U] = 1$, поэтому $L_3(4)$ действует тривиально на T. Получаем, что либо $3.L_3(4)$, либо $L_3(4)$ действует на $\mathrm{Syl}_5(H)$. Из таблиц 5-модулярных характеров для $L_3(4)$ и для $3.L_3(4)$ получаем, что в N есть элемент порядка $5 \cdot 7$; противоречие. Поэтому $|N|$ делится на 6 и не делится на 5 и 7. Докажем, что $\overline{N} = N/N'$ является примарной группой. Пусть $\overline{G} = G/N'$. Тогда $\overline{G}$ — расширение абелевой $\{2,3\}$-группы посредством $L_3(4)$ и поскольку элемент порядка 5 в любом p-модулярном представлении $L_3(4)$ при $p = 2,3$ имеет неподвижную точку, то $\overline{G}$ содержит элемент порядка 30; противоречие. Значит, N' — p-группа.

Лемма 27. $S \ncong L_3(4)$.

Доказательство. Пусть $S = L_3(4)$. По лемме 26 порядок N делится на 6, и N/N' — p-группа для $p = 2$ или $p = 3$. Далее считаем, что $G/N \simeq L_3(4)$.

Пусть $p = 2$, T — наибольшая нормальная подгруппа из G, лежащая в N и такая, что $\overline{N} = N/T$ не является 2-группой. Тогда $1 \neq O_3(N)$ — элементарная абелева 3-группа и $\overline{N}/O_3(\overline{N})$ — 2-группа. Пусть V — минимальная нормальная подгруппа в $\overline{G}/O_3(\overline{N})$. Тогда V — элементарная абелева 2-подгруппа, лежащая в центре $\overline{N}/O_3(\overline{N})$, и поэтому $L_3(4)$ действует на V. Это действие точное, иначе в G есть элемент порядка 14. Из таблицы 2-модулярных характеров для $L_3(4)$ (см. [10]) получаем, что V как $L_3(4)$-модуль является прямой суммой 9-мерных абсолютно неприводимых модулей над полем характеристики 2. В частности, элемент x порядка 3 из $L_3(4)$ централизует в V нециклическую подгруппу V_0. Пусть x' — прообраз x в группе $\overline{G}/O_3(\overline{N})$. Для некоторого нетривиального элемента $v \in V_0$ $[V,x']$ не централизует $C_{O_3(\overline{N})}(v)$, иначе $[V,x']$ централизует

$O_3(\overline{N}) = \langle C_{O_3(\overline{N})}(v) \mid v \in V_0\rangle$. Теперь группа $C_{O_3(\overline{N})}(v)[V, x']\langle x'\rangle$ содержит элемент порядка 9, который централизует v, поэтому G содержит элемент порядка 18.

Значит, $p = 3$. Пусть $K = O^3(N)$, $T = O^2(K)$. Как и ранее, используя лемму 11, получаем, что $\overline{N} = N/K$ имеет порядок 3, $\overline{G} = G/K \cong Z_3 \times L_3(4)$ или $\overline{G} \cong 3.L_3(4)$. Если $T \neq 1$, то $1 \neq P = O^3(T)$. Тогда группа G/T действует на 3-группе T/P, поэтому в G есть элемент порядка 18. Если $T = 1$, то элемент порядка 9 может возникнуть как произведение элемента порядка 3 из группы автоморфизмов $L_3(4)$ на элемент порядка 3 из N/K. Из таблицы характеров для $L_3(4).3$ (см. [10]) видно, что все такие элементы порядка 3 централизуют либо элемент порядка 5, либо элемент порядка 7 из $L_3(4)$, при этом $L_3(4)$ действует тривиально на N/K, поэтому в G в этом случае есть элемент порядка либо $5 \cdot 9$, либо $7 \cdot 9$; противоречие.

Из предыдущих лемм следует, что возможен лишь случай, когда $S \cong A_5$. Следующая лемма завершает доказательство теоремы.

Лемма 28. *G удовлетворяет заключению теоремы.*

Доказательство. Очевидно, что 7 делит $|N|$. Поскольку в A_5 силовская 2-подгруппа нециклическая, по лемме 13 силовская 2-подгруппа в G имеет порядок 16, силовская 5-подгруппа имеет порядок 5. Значит, порядок N делится на 2, 3, 7, но не делится на 5. Пусть $G/N \simeq A_5$. В группе A_5 нет элементов порядка 4, поэтому в N силовская 2-подгруппа P циклическая порядка 4. Значит, P имеет нормальное дополнение в N. Если профакторизовать по этому дополнению, получаем, что A_5 действует на P. У группы P группа автоморфизмов абелева, следовательно, это действие может быть только тривиальным, и G содержит элемент порядка 20; противоречие. Это означает, что $G/N = S_5$, силовская 2-подгруппа в N порождается инволюцией $\langle t\rangle$ и N обладает нормальным 2-дополнением A. Пусть $C = C_G(t)$. Понятно, что $G = AC$, $A_0 = A \cap C$ является 3-группой, $C/A_0 \simeq 2.S_5$, тем самым S_5 действует на A_0. Если $A_0 \neq 1$, то элемент x порядка 5 из S_5 действует на A_0 без неподвижных точек, тем самым элемент порядка 4 из $N_{S_5}(\langle x\rangle)$ централизует в A_0 нетривиальный элемент. Это означает, что в G есть элемент порядка 24; противоречие. Поэтому $A_0 = 1$, t инвертирует A и A абелева. Лемма, а вместе с ней и теорема доказаны.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lucido M. S., Moghaddamfar A. R.* Groups with complete prime graph connected components // J. Group Theory. 2004. V. 7, N 3. P. 373–384.
2. *Мазуров В. Д.* Распознавание конечных групп по множеству порядков их элементов // Алгебра и логика. 1998. Т. 37, № 6. С. 651–666.
3. *Старолетов А. М.* О неразрешимости групп, изоспектральных знакопеременной группе степени 10 // Сиб. электрон. мат. изв. 2008. Т. 5. С. 20–24.
4. *Васильев А. В.* О связи между строением конечной группы и свойствами ее графа простых чисел // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 3. С. 511–522.
5. *Gorenstein D.* Finite groups. New York: Harper and Row, 1968.
6. *Заварницин А. В., Мазуров В. Д.* О порядках элементов в накрытиях симметрических и знакопеременных групп // Алгебра и логика. 1999. Т. 38, № 3. С. 296–315.
7. *Заварницин А. В.* Распознавание по множеству порядков элементов знакопеременных групп степени $r + 1$ и $r + 2$ для простого r и группы степени 16 // Алгебра и логика. 2000. Т. 39, № 6. С. 648–661.
8. *Мазуров В. Д.* О множестве порядков элементов конечной группы // Алгебра и логика. 1994. Т. 33, № 1. С. 81–89.
9. *Мазуров В. Д., Хухро Е. И.* О группах, допускающих группу автоморфизмов, ранг централизатора которой ограничен // Сиб. электрон. мат. изв. 2006. Т. 3. С. 257–283.

10. *GAP* — Groups, algorithms and programming, version 4.4.9. (http://www.gap-system.org).
11. *Мазуров В. Д.* Характеризации конечных групп множествами порядков их элементов // Алгебра и логика. 1997. Т. 36, № 1. С. 37–53.
12. *Holt D. F., Plesken W.* Perfect groups. Oxford: Clarendon Press, 1989.

Статья поступила 17 ноября 2009 г.

Старолетов Алексей Михайлович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
astaroletov@gmail.com