Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2010. Том 51, № 3

УДК 510.64

СОВМЕСТНАЯ НЕПРОТИВОРЕЧИВОСТЬ В РАСШИРЕНИЯХ МИНИМАЛЬНОЙ ЛОГИКИ

Л. Л. Максимова

Аннотация. Найдены аналоги теоремы Робинсона о совместной непротиворечивости, равносильные слабому интерполяционному свойству WIP в расширениях минимальной логики Йохансона J. Хотя все пропозициональные суперинтуиционистские логики обладают этим свойством, существуют J-логики, не имеющие свойства WIP. Доказано, что проблема справедливости WIP в J-логиках сводится к аналогичной проблеме над логикой Gl, которая получается добавлением закона исключенного третьего к логике J. Найдены алгебраические критерии выполнимости свойства WIP над J и Gl.

Ключевые слова: минимальная логика, интерполяция, совместная непротиворечивость.

К юбилею Юрия Леонидовича Ершова

В [1] Робинсон доказал теорему о совместной непротиворечивости для классической логики предикатов. Теорема говорит, что если даны две непротиворечивые теории в разных языках и их пересечение является полной теорией в общем языке, то объединение данных теорий непротиворечиво. Позднее различные аналоги этой теоремы изучались и в других логиках (см. [2]).

Теорема Робинсона оказалась равносильной интерполяционной теореме, доказанной Крейгом [3] для классической логики первого порядка. Теорема Крейга стала источником большого числа исследований по проблеме интерполяции в классических и неклассических теориях [2, 4]. В настоящее время интерполяция рассматривается как стандартное свойство логик наряду с непротиворечивостью, полнотой и т. д. Для интуиционистской логики предикатов и для минимальной логики Йохансона интерполяционная теорема доказана Шютте [5]. Семантическое доказательство интерполяционной теоремы в интуиционистской логике предикатов найдено Габбаем [6], в этой же книге исследовались соотношения интерполяции и свойства совместной непротиворечивости в интуиционистских теориях.

В данной статье рассматривается слабый вариант интерполяционного свойства в минимальной логике и ее расширениях. Минимальная логика, введенная Йохансоном [7], имеет тот же позитивный фрагмент, что и интуиционистская логика, но в минимальной логике нет специальных аксиом для противоречия. В отличие от классической и интуиционистской логики минимальная логика допускает нетривиальные теории, содержащие некоторое утверждение вместе с его

Исследование выполнено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 09–01–00090a), гранта «Научные школы» НШ–3606.2010.1 и гранта АВЦП Минобразования России «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект 2.1.1/419).

отрицанием. Семантическая интерпретация минимальной логики предложена в [8], где доказаны теоремы о полноте для этой логики и ряда ее расширений.

Интерполяционное свойство допускает различные варианты, которые равносильны в классической логике, но не эквивалентны в других логиках. В [6] доказано, что в интуиционистской логике предикатов полная версия теоремы Робинсона о совместной непротиворечивости неверна. Однако выполняется слегка ослабленный вариант RCP$''$ этой теоремы и интерполяционное свойство Крейга CIP равносильно этому варианту теоремы Робинсона во всех расширениях интуиционистской логики предикатов.

В данной статье исследуется слабое интерполяционное свойство WIP, введенное в [9]. Доказывается, что во всех расширениях минимальной логики свойство WIP равносильно слабой версии WRP свойства Робинсона. В [9] доказано, что все пропозициональные суперинтуиционистские логики обладают свойством WIP, хотя это не распространяется на все предикатные суперинтуиционистские логики. Так как лишь конечное число пропозициональных суперинтуиционистских логик имеет свойство CIP [10], WIP и WRP не эквивалентны свойствам CIP и RCP$''$ над интуиционистской логикой. Тем более они не эквивалентны над минимальной логикой J. Здесь мы введем еще один аналог свойства Робинсона JCP и докажем его равносильность свойствам WIP и WRP. Мы заметим, что свойство WIP нетривиально в пропозициональных расширениях минимальной логики: множества J-логик с WIP и без WIP имеют мощность континуума.

В разд. 4–6 статьи исследование свойства совместной непротиворечивости сводится к свойствам многообразий J-алгебр. В разд. 5 найден алгебраический эквивалент свойства WIP, а именно введено свойство слабой амальгамируемости и доказана его равносильность слабому интерполяционному свойству. В разд. 6 найден более простой алгебраический критерий слабой амальгамируемости. Кроме того, доказано, что проблема справедливости WIP в J-логиках сводится к рассмотрению расширений логики Gl, которая получается добавлением закона исключенного третьего к логике J. В разд. 7 найдена полезная классификация логик над Gl, а также указаны логики со свойством CIP и логики без WIP.

1. Совместная непротиворечивость и интерполяция

Если $\mathbf{p}$ — список нелогических символов, то через $A(\mathbf{p})$ обозначаем формулу, у которой все нелогические символы входят в $\mathbf{p}$, а через $\mathscr{F}(\mathbf{p})$ — множество всех таких формул.

Пусть L — логика, $\vdash_L$ — отношение следования в L. Пусть $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{r}$ — попарно не пересекающиеся списки нелогических символов, $A(\mathbf{p},\mathbf{q})$, $B(\mathbf{p},\mathbf{r})$ — формулы. *Интерполяционное свойство Крейга* CIP и *дедуктивное интерполяционное свойство* IPD определяются следующим образом.

CIP. Если $\vdash_L A(\mathbf{p},\mathbf{q}) \to B(\mathbf{p},\mathbf{r})$, то существует формула $C(\mathbf{p})$ такая, что $\vdash_L A(\mathbf{p},\mathbf{q}) \to C(\mathbf{p})$ и $\vdash_L C(\mathbf{p}) \to B(\mathbf{p},\mathbf{r})$.

IPD. Если $A(\mathbf{p},\mathbf{q}) \vdash_L B(\mathbf{p},\mathbf{r})$, то существует формула $C(\mathbf{p})$ такая, что $A(\mathbf{p},\mathbf{q}) \vdash_L C(\mathbf{p})$ и $C(\mathbf{p}) \vdash_L B(\mathbf{p},\mathbf{r})$.

В [9] введено *слабое интерполяционное свойство*:

WIP. Если $A(\mathbf{p},\mathbf{q}), B(\mathbf{p},\mathbf{r}) \vdash_L \bot$, то существует формула $A'(\mathbf{p})$ такая, что $A(\mathbf{p},\mathbf{q}) \vdash_L A'(\mathbf{p})$ и $A'(\mathbf{p}), B(\mathbf{p},\mathbf{r}) \vdash_L \bot$.

В классической логике все эти свойства равносильны. Во всех нормальных модальных логиках выполнено

$$\mathrm{CIP} \Rightarrow \mathrm{IPD} \Rightarrow \mathrm{WIP}\,.$$

Обратные стрелки в общем случае неверны. В интуиционистской логике и ее расширениях CIP и IPD равносильны.

В классической логике предикатов свойство CIP равносильно следующему свойству совместной непротиворечивости по Робинсону.

RCP. Пусть T_1, T_2 — две непротиворечивые L-теории в языках $\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2$ соответственно. Если $T_1 \cap T_2$ — полная L-теория в общем языке $\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2$, то $T_1 \cup T_2$ является L-непротиворечивой.

Та же эквивалентность справедлива для всех классических модальных логик [4]. При этом под L-теорией понимается множество формул, содержащее все теоремы логики L и замкнутое относительно правила модус поненс. Теория называется *непротиворечивой*, если в ней невыводимо противоречие $\perp$. L-теория T в языке $\mathscr{L}$ называется *полной* в $\mathscr{L}$, если $A \in T$ или $\neg A \in T$ для любой формулы $A \in \mathscr{L}$, где $\neg A = A \to \perp$.

В [9] доказано, что в классических модальных логиках RCP равносильно следующему свойству.

RCP$'$. Пусть T_1, T_2 — две L-теории в языках $\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2$ соответственно, $\mathscr{L}_0 = \mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2$, $T_{i0} = T_i \cap \mathscr{L}_0$. Если теория $T_{10} \cup T_{20}$ в общем языке $\mathscr{L}_0$ является L-непротиворечивой, то $T_1 \cup T_2$ тоже L-непротиворечива.

2. J-логики и совместная непротиворечивость

Исследование интерполяционного свойства и свойства совместной непротиворечивости в интуиционистской логике предпринято Габбаем [6]. Он доказал, что в расширениях интуиционистской логики предикатов интерполяционное свойство Крейга CIP равносильно несколько более слабой версии RCP$''$ свойства Робинсона, а теорема Робинсона в полном объеме неверна в интуиционистской логике первого порядка. При этом интуиционистская теория определялась как пара (T, F), где T было множеством «истинных» формул, а F — множеством «ложных» формул. Поэтому полное свойство Робинсона требовало сохранения всех истинных и всех ложных формул в обеих теориях (T_1, F_1) и (T_2, F_2), что не всегда было возможно. Свойство RCP$''$ требует дополнительного условия $F_1 \subseteq F_2$, в частности, F_1 должно быть в общем языке. По аналогии с RCP$'$ в [9] определена слабая версия свойства Робинсона WRP, где теория отождествлялась с множеством «истинных» формул подобно теориям в классической логике. Такие теории названы *открытыми*. Доказано, что в случае суперинтуиционистских логик WRP эквивалентно свойству WIP и много слабее, чем CIP. Более того, все пропозициональные суперинтуиционистские логики обладают свойством WIP.

В данной статье рассматриваются расширения минимальной логики Йохансона. Аксиоматизация минимальной логики JQ имеет в качестве своих постулатов все схемы аксиом интуиционистской логики предикатов, не содержащие противоречия.

Пусть L — расширение минимальной логики с помощью дополнительных схем аксиом. Если Γ — множество формул, A — формула, пишем $\Gamma \vdash_L A$, если A выводима из $\Gamma \cup L$ с помощью правила модус поненс: $A, A \to B/\ B$. Тогда справедлива лемма о дедукции.

Лемма 2.1. $\Gamma, A \vdash_L B \iff \Gamma \vdash_L A \to B$.

Определим *открытую* L*-теорию* языка $\mathscr{L}$ как множество T формул этого языка, замкнутое относительно выводимости $\vdash_L$. Тогда открытая L-теория T — это то же самое, что теория $(T, \varnothing)$ в смысле Габбая [6]. Множество $T \subseteq \mathscr{L}$ называется *полным в языке* $\mathscr{L}$, если $A \in T$ или $\neg A \in T$ для любой формулы $A \in \mathscr{L}$. Множество T называется L*-непротиворечивым*, если $T \nvdash_L \bot$. Легко видеть, что любое L-непротиворечивое и полное множество формул в языке $\mathscr{L}$ является открытой L-теорией. Следующая лемма, доказанная для классической логики Линденбаумом, справедлива для любой J-логики L.

Лемма 2.2. *Любая L-непротиворечивая открытая теория может быть расширена до полной непротиворечивой открытой L-теории.*

Доказательство. Заметим, что если множество формул T является L-непротиворечивым, то $T \cup \{A\}$ или $T \cup \{\neg A\}$ также L-непротиворечиво для любой формулы A. В самом деле, если оба множества $T \cup \{A\}$ и $T \cup \{\neg A\}$ противоречивы, то по теореме дедукции получим $T \vdash_L A \to \bot$ и $T \vdash_L (A \to \bot) \to \bot$, следовательно, $T \vdash_L \bot$.

Поэтому утверждение легко следует из леммы Цорна, так как объединение цепи L-непротиворечивых множеств также L-непротиворечиво. □

Определим два варианта свойства Робинсона для открытых теорий — *свойство совместной непротиворечивости* JCP и *слабое свойство Робинсона* WRP.

JCP. Пусть T_1, T_2 — две L-непротиворечивые открытые L-теории языков $\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2$ соответственно. Если $T_1 \cap T_2$ — полная L-теория в общем языке $\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2$, то множество $T_1 \cup T_2$ является L-непротиворечивым.

WRP. Пусть T_1 и T_2 — две открытые L-теории языков $\mathscr{L}_1$ и $\mathscr{L}_2$ соответственно, $\mathscr{L}_0 = \mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2$, $T_{i0} = T_i \cap \mathscr{L}_0$. Если множество $T_{10} \cup T_{20}$ в общем языке L-непротиворечиво, то $T_1 \cup T_2$ является L-непротиворечивым.

Для открытых L-теорий в расширениях логики J сохраняется равносильность WIP и WRP, свойства JCP и WRP также оказываются равносильными.

Следующая теорема является аналогом теоремы, доказанной Габбаем для суперинтуиционистских логик [6, теорема 8.32].

Теорема 2.3. *Для любого* (*предикатного или пропозиционального*) *расширения L минимальной логики свойства WIP и WRP равносильны.*

Доказательство. Предположим, что L имеет WIP, и докажем WRP. Пусть T_1, T_2 — две открытые L-теории языков $\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2$ соответственно, $\mathscr{L}_0 = \mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2$, $T_{i0} = T_i \cap \mathscr{L}_0$. Допустим, что множество $T_1 \cup T_2$ является L-противоречивым. Тогда существуют формулы $A \in T_1$ и $B \in T_2$ такие, что

$$A, B \vdash_L \bot.$$

По WIP существует формула C в общем языке $\mathscr{L}_0$ такая, что

$$A \vdash_L C \text{ и } C, B \vdash_L \bot.$$

Тогда получаем

$$T_1 \vdash_L C \text{ и } T_2 \vdash_L C \to \bot,$$

поэтому $T_{10} \cup T_{20}$ является L-противоречивым.

Обратно, пусть L имеет WRP. Пусть A, B — произвольные формулы языков $\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2$ соответственно и

$$A, B \vdash_L \bot.$$

Обозначим через T_1 открытую теорию языка $\mathscr{L}_1$ с единственной аксиомой A, а через T_2 — открытую теорию языка $\mathscr{L}_2$ с аксиомой B. Тогда множество $T_1 \cup T_2$ является L-противоречивым. По WRP множество $T_{i1} \cup T_{i2}$ в общем языке $\mathscr{L}_0 = \mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2$, где $T_{i0} = T_i \cap \mathscr{L}_0$, является L-противоречивым, т. е.

$$T_{10} \cup T_{20} \vdash_L \bot.$$

Поэтому существует формула C в общем языке $\mathscr{L}_0$ такая, что

$$C \in T_{10} \text{ и } C, T_{20} \vdash_L \bot.$$

По определению T_i, T_{i0} получаем $A \vdash_L C$ и $C, B \vdash_L \bot$. $\square$

Следствие 2.4. *Если (предикатное или пропозициональное) расширение минимальной логики имеет* CIP*, то оно имеет* WRP.

Доказательство. По теореме о дедукции ясно, что из CIP следует WIP. Поэтому утверждение сразу вытекает из теоремы 2.3. $\square$

Теорема 2.5. *Для любого расширения логики* J *свойства* WRP *и* JCP *равносильны.*

Доказательство. Пусть L имеет WRP. Пусть даны две L-непротиворечивые открытые L-теории T_1, T_2 языков $\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2$ соответственно, причем $T_0 = T_1 \cap T_2$ — полная L-теория в общем языке $\mathscr{L}_0 = \mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2$. Ясно, что T_0 является L-непротиворечивой. Покажем, что $T_{i0} = T_i \cap \mathscr{L}_0 = T_0$ для $i = 1, 2$. В самом деле, очевидно, что $T_0 \subseteq T_{i0}$. Допустим, что $C \in T_{i0}$, $C \notin T_0$. Так как T_0 полна, получаем $\neg C \in T_0 \subseteq T_i$ и теория T_i оказывается противоречивой вопреки условию.

Таким образом, $T_{10} = T_{20} = T_0$, поэтому $T_{10} \cup T_{20} = T_0$ непротиворечиво. По WRP множество $T_1 \cup T_2$ непротиворечиво, и JCP доказано.

Обратно, пусть L имеет JCP. Докажем WRP. Пусть T_1 и T_2 — две открытые L-теории языков $\mathscr{L}_1$ и $\mathscr{L}_2$ соответственно, $\mathscr{L}_0 = \mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2$, $T_{i0} = T_i \cap \mathscr{L}_0$, и множество $T_{10} \cup T_{20}$ в общем языке L-непротиворечиво. Покажем, что $T_1 \cup T_2$ является L-непротиворечивым.

По лемме 2.2 множество $T_{10} \cup T_{20}$ можно расширить до полной L-непротиворечивой открытой теории T_0 языка $\mathscr{L}_0$. Обозначим $T_1' = \{A \in \mathscr{L}_1 \mid T_1 \cup T_0 \vdash_L A\}$ и докажем, что $T_1' \cap \mathscr{L}_0 = T_0$. В самом деле, пусть $C \in T_1' \cap \mathscr{L}_0$. Тогда $T_1 \cup T_0 \vdash_L C$ и по теореме дедукции $T_1 \vdash A \to C$ для некоторой формулы $A \in T_0$. Поэтому $(A \to C) \in T_{10} \subseteq T_0$, $C \in T_0$, и равенство доказано.

Аналогично $T_2' \cap \mathscr{L}_0 = T_0$, где $T_2' = \{A \in \mathscr{L}_2 \mid T_2 \cup T_0 \vdash_L A\}$. Так как $T_0 \nvdash_L \bot$ и $\bot \in \mathscr{L}_0$, теории T_1' и T_2' непротиворечивы. Кроме того, они имеют полное пересечение T_0. По JCP множество $T_1' \cup T_2'$ L-непротиворечиво, а значит, L-непротиворечиво и его подмножество $T_1 \cup T_2$. $\square$

Отметим, что результаты этого раздела относятся к непротиворечивым теориям. Напомним, что в J-логиках в отличие от суперинтуиционистских логик из противоречивости теории не следует ее тривиальность и непротиворечивые теории составляют лишь небольшую часть нетривиальных теорий.

3. Пропозициональные J-логики

В этом разделе рассмотрим пропозициональные J-логики.

В [10] найдено полное описание суперинтуиционистских логик с интерполяционным свойством. Существует лишь конечное число таких логик. Все позитивные логики с интерполяционным свойством описаны в [11], где также было начато изучение этого свойства в расширениях минимальной логики Йохансона.

Язык логики J в качестве исходных связок содержит $\&, \vee, \to, \bot, \top$; отрицание определяется как сокращение $\neg A = A \to \bot$; $(A \leftrightarrow B) = (A \to B)\&(B \to A)$. Множество всех формул обозначаем через For. Формула называется *позитивной*, если не содержит вхождений символа $\bot$. Логика J может быть задана исчислением, которое имеет те же схемы аксиом, что и позитивное интуиционистское исчисление Int^+, и единственное правило вывода модус поненс. Под *J-логикой* понимается любое множество формул, содержащее все аксиомы логики J и замкнутое относительно подстановки и правила модус поненс. Обозначаем

$$\mathrm{Int} = \mathrm{J} + (\bot \to p), \quad \mathrm{Cl} = \mathrm{Int} + (p \vee \neg p), \quad \mathrm{Neg} = \mathrm{J} + \bot.$$

Логика *нетривиальна*, если не совпадает с множеством всех формул For. J-логика называется *суперинтуиционистской*, если она содержит интуиционистскую логику Int, и *негативной*, если расширяет логику Neg; L называется *паранепротиворечивой*, если не содержит ни Int, ни Neg. Можно доказать, что логика является негативной тогда и только тогда, когда она не содержится в Cl. Для любой J-логики L обозначаем через $E(L)$ семейство всех J-логик, содержащих L.

В [9] доказано, что все пропозициональные суперинтуиционистские логики обладают слабым интерполяционным свойством WIP. Очевидно, все негативные логики также имеют это свойство.

Теорема 3.1. *Для любой* J*-логики* L *следующие условия эквивалентны:*
1) L *имеет* WIP,
2) $L \cap L_1$ *имеет* WIP *для любой негативной логики* L_1,
3) $L \cap \mathrm{Neg}$ *имеет* WIP.

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$. Пусть L имеет WIP, $L_1 \vdash \bot$ и

$$L \cap L_1 \vdash A(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \to (B(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \to \bot).$$

Тогда

$$L \vdash A(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \to (B(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \to \bot).$$

Так как L имеет WIP, существует формула $C(\mathbf{p})$ такая, что

$$L \vdash A(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \to C(\mathbf{p}) \text{ и } L \vdash C(\mathbf{p}) \to (B(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \to \bot).$$

Из первого условия следует

$$L \cap L_1 \vdash A(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \to C(\mathbf{p}) \vee \bot.$$

Из второго условия вытекает

$$L \vdash C(\mathbf{p}) \vee \bot \to (B(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \to \bot).$$

Кроме того,

$$L_1 \vdash C(\mathbf{p}) \vee \bot \to (B(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \to \bot).$$

Следовательно,

$$L \cap L_1 \vdash C(\mathbf{p}) \vee \bot \to (B(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \to \bot).$$

Таким образом, $C(\mathbf{p}) \vee \bot$ является интерполянтом данной формулы в $L \cap L_1$.

$2 \Rightarrow 3$. Очевидно.

$3 \Rightarrow 1$. Пусть $L \cap \mathrm{Neg}$ имеет WIP и

$$L \vdash A(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \to (B(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \to \bot).$$

Тогда

$$L \cap \mathrm{Neg} \vdash A(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \to (B(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \to \bot).$$

Существует интерполянт $C(\mathbf{p})$ для этой формулы в $L \cap \mathrm{Neg}$. Ясно, что $C(\mathbf{p})$ является интерполянтом и в L. $\square$

Следствие 3.2. *Любая пропозициональная* J*-логика, содержащая* $\mathrm{J} + (\bot \vee (\bot \to p))$*, обладает свойством* WIP.

Доказательство. Любая логика, содержащая $\mathrm{J} + (\bot \vee (\bot \to p))$, представима как пересечение негативной и суперинтуиционистской логики. Как уже отмечено, все суперинтуиционистские логики имеют WIP. Поэтому утверждение следует из теоремы 3.1. $\square$

Следствие 3.2 нельзя расширить до класса всех J-логик. Картина меняется, если мы рассматриваем расширения логики

$$\mathrm{Gl} = \mathrm{J} + (p \vee (p \to \bot)) = \mathrm{J} + (p \vee \neg p).$$

В [12] доказано, что эта логика имеет CIP. В последнем разделе этой статьи показано, что далеко не все расширения логики Gl имеют WIP. Теорема 6.3 говорит о том, что проблема слабой интерполяции в J-логиках сводится к аналогичной проблеме в расширениях логики Gl.

Рассмотрим логику Gl более подробно. Широко известная теорема Гливенко утверждает, что формула вида $\neg A$ принадлежит Int тогда и только тогда, когда является тавтологией классической логики Cl. Заметим, что имеется аналогичное соотношение между J-логиками и расширениями логики Gl. Следующее предложение вытекает из [13, предложение 6.1.3].

Предложение 3.3. *Для любой* J*-логики* L *и любой формулы* A

$$L + (p \vee \neg p) \vdash \neg A \iff L \vdash \neg A.$$

4. Алгебраическая семантика

Алгебраическая семантика для расширений минимальной логики строится с помощью так называемых J-*алгебр*, т. е. алгебр $\mathbf{A} = \langle A; \&, \vee, \to, \bot, \top \rangle$, удовлетворяющих условиям:

$\langle A; \&, \vee, \to, \bot, \top \rangle$ есть решетка относительно $\&, \vee$ с наибольшим элементом $\top$,

$z \leq x \to y \iff z \& x \leq y$,

$\bot$ — произвольный элемент в A.

J-алгебра называется *гейтинговой*, или *псевдобулевой алгеброй*, если $\bot$ — наименьший элемент множества A, и *негативной алгеброй*, если $\bot$ — наибольший элемент множества A. Одноэлементная J-алгебра $\mathbf{E}$ называется *единичной*, или *вырожденной*; это единственная J-алгебра, которая является одновременно негативной и гейтинговой алгеброй.

J-алгебра $\mathbf{A}$ называется *невырожденной*, если она содержит не менее двух элементов; $\mathbf{A}$ называется *вполне связной*, или *сильно компактной*, если для всех $x, y \in \mathbf{A}$ выполняется $x \vee y = \top \Leftrightarrow (x = \top$ или $y = \top)$. Элемент Ω алгебры $\mathbf{A}$ называется *предпоследним элементом*, или *опремумом* алгебры $\mathbf{A}$, если он является наибольшим среди элементов алгебры $\mathbf{A}$, отличных от $\top$. Через B_0 обозначаем двухэлементную булеву алгебру.

Напомним, что невырожденная алгебра называется *подпрямо неразложимой*, если она не разлагается в подпрямое произведение отличных от нее сомножителей. Называем алгебру *финитно неразложимой*, если она не разлагается в подпрямое произведение конечного числа отличных от нее сомножителей.

В [14] показано, что существует взаимно однозначное соответствие между конгруэнциями на импликативной решетке и фильтрами этой решетки. Это справедливо и для J-алгебр. Фильтру ∇ соответствует конгруэнция

$$x{\sim_\nabla}y \rightleftharpoons (x \to y)\&(y \to x) \in \nabla.$$

Обозначаем $\mathbf{A}/\nabla \rightleftharpoons \mathbf{A}/{\sim_\nabla}$. Если Θ — конгруэнция, то $\nabla(\Theta) \rightleftharpoons \{x \mid x\Theta\top\}$ есть фильтр, причем $\sim_{\nabla(\Theta)}$ совпадает с Θ.

Фильтр ∇ называется *простым*, если он не представим в виде пересечения конечного числа отличных от него фильтров. Следующие леммы, известные для гейтинговых алгебр (см., например, [10]), легко переносятся на J-алгебры.

Лемма 4.1. *Для любой* J-*алгебры* $\mathbf{A}$

а) $\mathbf{A}$ *финитно неразложима тогда и только тогда, когда единичный фильтр* $\nabla = \{\top\}$ *является простым, т. е.* $\mathbf{A}$ *вполне связна;*

б) $\mathbf{A}$ *подпрямо неразложима тогда и только тогда, когда* $\mathbf{A}$ *имеет опремум.*

Лемма 4.2. *Для любой* J-*алгебры* $\mathbf{A}$ *и любого фильтра* ∇ *на* $\mathbf{A}$ *следующие условия эквивалентны:*

а) *фильтр* ∇ *является простым,*

б) $\mathbf{A}/\nabla$ *финитно неразложима.*

Доказательство следующей леммы аналогично доказательству соответствующей леммы для гейтинговых алгебр, приведенной в [15].

Лемма 4.3. *Пусть* Φ — *фильтр в* J-*алгебре* $\mathbf{A}$, *не содержащий элемента* b. *Тогда существуют подпрямо неразложимая* $\mathbf{C}$ *с предпоследним элементом* Ω *и гомоморфизм* $f : \mathbf{A} \to \mathbf{C}$ *такие, что* $f(x) = \top$ *для всех* $x \in \Phi$ *и* $f(b) = \Omega$. *В частности, если в* $\mathbf{A}$ *неверно* $a \leq b$, *то существуют подпрямо неразложимая* $\mathbf{C}$ *с предпоследним элементом* Ω *и гомоморфизм* $f : \mathbf{A} \to \mathbf{C}$ *такие, что* $f(a) = \top$ *и* $f(b) = \Omega$.

Напомним конструкцию из [12]. Если $\mathbf{A} = \langle A; \&, \vee, \to, \bot, \top\rangle$ — негативная алгебра и $\mathbf{B} = \langle B; \&, \vee, \to, \bot, \top\rangle$ — гейтингова алгебра, то определяем новую J-алгебру $\mathbf{A} \uparrow B$ следующим образом:

универсум новой алгебры есть $C = A \cup B'$, где B' изоморфно B, $A \cap B' = \{\bot_\mathbf{A}\} = \{\bot_{\mathbf{B}'}\}$ и C частично упорядочено отношением

$$x \leq_\mathbf{C} y \Leftrightarrow [(x \in A \text{ и } y \in B') \text{ или } (x, y \in A \text{ и } x \leq_\mathbf{A} y) \text{ или } (x, y \in B' \text{ и } x \leq_{\mathbf{B}'} y)].$$

Как следствие $\bot_\mathbf{C} = \bot_\mathbf{A} = \bot_{\mathbf{B}'}$, $\top_\mathbf{C} = \top_{\mathbf{B}'}$.

Таким образом, $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ можно рассматривать как интервалы частично упорядоченного множества $\mathbf{C}$. Из определения вытекает, что $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ являются подрешетками $\mathbf{C}$, а операция $\to$ удовлетворяет условиям

$$x \to_\mathbf{C} y = \begin{cases} \top, & \text{если } x \leq_\mathbf{C} y, \\ x \to_\mathbf{A} y, & \text{если } x, y \in \mathbf{A},\ x \not\leq_\mathbf{A} y, \\ x \to_{\mathbf{B}'} y, & \text{если } x, y \in \mathbf{B}', \\ y, & \text{если } x \in \mathbf{B}',\ y \in \mathbf{A} - \{\top_\mathbf{A}\}. \end{cases}$$

В частности, любая негативная алгебра $\mathbf{A}$ представима как $\mathbf{A} \uparrow \mathbf{E}$, а гейтингова алгебра $\mathbf{B}$ — как $\mathbf{E} \uparrow \mathbf{B}$. J-алгебру называем *стройной*, если она имеет вид $\mathbf{A} \uparrow \mathbf{B}$ для подходящих негативной алгебры $\mathbf{A}$ и гейтинговой алгебры $\mathbf{B}$.

Из определения легко вытекает

Лемма 4.4. 1. *Алгебра* $\mathbf{B}$ *является подалгеброй алгебры* $\mathbf{C} = \mathbf{A} \uparrow \mathbf{B}$.

2. *Алгебра* $\mathbf{A}$ *является гомоморфным образом алгебры* $\mathbf{A} \uparrow \mathbf{B}$ *относительно гомоморфизма*

$$f(z) = z \& \bot.$$

3. $\mathbf{A}$ *является подалгеброй алгебры* $\mathbf{C}$ *в том и только в том случае, если* $\mathbf{B}$ — *вырожденная алгебра.*

Особую роль в этой статье будут играть стройные алгебры вида $\mathbf{A} \uparrow B_0$, где B_0 — двухэлементная булева алгебра. Для негативной алгебры $\mathbf{A}$ определим

$$\mathbf{A}^{\Lambda} = \mathbf{A} \uparrow B_0.$$

Очевидно, все J-алгебры $\mathbf{A}^{\Lambda}$ подпрямо неразложимы и имеют $\bot$ в качестве опремума.

Лемма 4.5. *Пусть* $\mathbf{A}$ *и* $\mathbf{B}$ — *негативные алгебры,* $\mathbf{C}$ — *J-алгебра.*

1. *Отображение* $\alpha : \mathbf{A}^{\Lambda} \to \mathbf{B}^{\Lambda}$ *является мономорфизмом тогда и только тогда, когда его ограничение* α^l *на* $\mathbf{A}$ *является мономорфизмом из* $\mathbf{A}$ *в* $\mathbf{B}$.

2. *Для любого гомоморфизма* $h : \mathbf{A}^{\Lambda} \to \mathbf{C}$ *выполнено в точности одно из условий:*

(a) $h(\bot) = \top_{\mathbf{C}}$, *алгебра* $\mathbf{C}$ *негативна и ограничение* h^l *отображения* h *на* $\mathbf{A}$ *является гомоморфизмом из* $\mathbf{A}$ *в* $\mathbf{C}$;

(b) $h(\bot) \neq \top_{\mathbf{C}}$ *и* h *является мономорфизмом из* $\mathbf{A}^{\Lambda}$ *в* $\mathbf{C}$.

3. *Если* $\mathbf{C}$ *не является негативной, то существует гомоморфизм алгебры* $\mathbf{C}$ *на подходящую алгебру вида* $\mathbf{C}_1^{\Lambda}$.

Доказательство. 1. Следует сразу из определения.

2. Если $h(\bot) = \top_{\mathbf{C}}$, то $\bot_{\mathbf{C}} = h(\bot) = \top_{\mathbf{C}}$. Пусть $h(\bot) \neq \top_{\mathbf{C}}$. Тогда для любых $x, y \in \mathbf{A}$, $x \not\leq y$, выполняется $h(x) \to h(y) = h(x \to y) \leq h(\bot) < \top_{\mathbf{C}}$, а значит, $h(x) \not\leq h(y)$.

3. Вытекает из леммы 4.3. $\square$

Хорошо известно, что семейство J-алгебр образует многообразие и существует взаимно однозначное соответствие между логиками, содержащими логику J, и многообразиями J-алгебр. Если A — формула, $\mathbf{A}$ — алгебра, то говорим, что в $\mathbf{A}$ *общезначима* формула A, и пишем $\mathbf{A} \models A$, если тождество $A = \top$ выполняется в $\mathbf{A}$. Пишем $\mathbf{A} \models L$ вместо $(\forall A \in L)(\mathbf{A} \models A)$.

Каждой логике $L \in E(\mathrm{J})$ соответствует многообразие J-алгебр

$$V(L) = \{\mathbf{A} \mid \mathbf{A} \models L\}.$$

Любая логика характеризуется многообразием $V(L)$. Если $V(L)$ порождается алгеброй $\mathbf{A}$, то пишем иногда $L = L\mathbf{A}$.

Если $L \in E(\mathrm{Int})$, то $V(L)$ — многообразие гейтинговых алгебр, а если $L \in E(\mathrm{Neg})$, то — многообразие негативных алгебр.

Для $L_1 \in E(\mathrm{Neg})$, $L_2 \in E(\mathrm{Int})$ обозначим через $L_1 \uparrow L_2$ логику, характеризуемую всеми алгебрами вида $\mathbf{A} \uparrow \mathbf{B}$, где $\mathbf{A} \models L_1$, $\mathbf{B} \models L_2$. Через $L_1 \Uparrow L_2$ обозначаем логику, характеризуемую классом алгебр вида $\mathbf{A} \uparrow \mathbf{B}$, где $\mathbf{A}$ — финитно неразложимая алгебра из $V(L_1)$, а $\mathbf{B} \in V(L_2)$.

В качестве примера рассмотрим логику $\mathrm{Gl} = \mathrm{J} + (p \vee \neg p)$.

Предложение 4.6. *Логика* $\mathrm{Gl} = \mathrm{J} + (p \vee \neg p)$ *совпадает с* $\mathrm{Neg} \uparrow \mathrm{Cl}$ *и порождается классом* $\{\mathbf{A}^{\Lambda} \mid \mathbf{A}$ *— негативная алгебра*$\}$.

Доказательство. Заметим, что в каждой алгебре вида $\mathbf{A} \uparrow \mathbf{B}$, где $\mathbf{B}$ — булева алгебра, общезначима формула $p \vee \neg p$. Отсюда $\mathrm{Neg} \uparrow \mathrm{Cl} \supseteq \mathrm{Gl}$. С другой стороны, если формула $(p \vee \neg p)$ общезначима в некоторой подпрямо неразложимой J-алгебре, то по лемме 4.1 эта алгебра негативная или имеет вид $\mathbf{A}^{\Lambda}$ для подходящей негативной алгебры $\mathbf{A}$. Поэтому справедливо обратное включение. Кроме того, каждая негативная алгебра $\mathbf{A}$ является гомоморфным образом алгебры $\mathbf{A}^{\Lambda}$, поэтому логика порождается указанным классом алгебр. $\square$

В [12, следствие 3.5(2)] найдена аксиоматизация для логик вида $L \uparrow \mathrm{Cl}$ и $L \Uparrow \mathrm{Cl}$, где L — негативная логика. Доказано

Предложение 4.7. *Для любой негативной логики* L
$L \uparrow \mathrm{Cl} = \mathrm{Gl} + \{(\bot \to A) \mid A \in L\}$,
$L \Uparrow \mathrm{Cl} = \mathrm{Gl} + \{(\bot \to A) \mid A \in L\} + ((\bot \to p \vee q) \to (\bot \to p) \vee (\bot \to q))$.

Аналогично предложению 4.6 нетрудно показать, что логика $L \uparrow \mathrm{Cl}$ порождается классом алгебр $\mathbf{A}^{\Lambda}$, где $\mathbf{A} \in V(L)$, а логика $L \Uparrow \mathrm{Cl}$ — классом алгебр $\mathbf{A}^{\Lambda}$, где $\mathbf{A}$ — финитно неразложимая алгебра из $V(L)$.

5. Слабая амальгамируемость

В этом разделе найден алгебраический эквивалент слабого интерполяционного свойства.

Напомним [11], что J-логика обладает интерполяционным свойством Крейга тогда и только тогда, когда многообразие $V(L)$ имеет свойство амальгамируемости AP. В случае J-алгебр AP равносильно сверхамальгамируемости SAP. Напомним необходимые определения.

Пусть V — класс алгебр, инвариантный относительно изоморфизмов. Класс V *амальгамируем*, если удовлетворяет следующему условию AP для любых алгебр $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ из V.

AP. Если $\mathbf{A}$ — общая подалгебра алгебр $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$, то существуют $\mathbf{D}$ из V и мономорфизмы $\delta : \mathbf{B} \to \mathbf{D}$, $\varepsilon : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ такие, что $\delta(x) = \varepsilon(x)$ для всех $x \in \mathbf{A}$.

Тройка $(\mathbf{D}, \delta, \varepsilon)$ называется *амальгамой* для $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$.

Говорим, что класс V имеет *свойство сверхамальгамируемости* SAP, если для любых алгебр $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ из V выполнено условие AP и, кроме того, в $\mathbf{D}$ имеют место соотношения

$$\delta(x) \leq \varepsilon(y) \iff (\exists z \in \mathbf{A})(x \leq z \text{ и } z \leq y),$$

$$\delta(x) \geq \varepsilon(y) \iff (\exists z \in \mathbf{A})(x \geq z \text{ и } z \geq y).$$

Найдем алгебраический эквивалент слабого интерполяционного свойства WIP. Определим *свойство слабой амальгамируемости* для класса V J-алгебр.

WAPJ. Для любых $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in V$ и мономорфизмов $\beta : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$, $\gamma : \mathbf{A} \to \mathbf{C}$ существуют алгебра $\mathbf{D}$ из V и гомоморфизмы $\delta : \mathbf{B} \to \mathbf{D}$, $\varepsilon : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ такие, что $\delta\beta(x) = \varepsilon\gamma(x)$ для всех $x \in \mathbf{A}$, причем $\bot \neq \top$ в $\mathbf{D}$, если $\bot \neq \top$ в $\mathbf{A}$.

Многообразие J-алгебр называем *слабо амальгамируемым*, если оно имеет свойство WAPJ.

Заметим, что введенное здесь определение отличается от определения слабой амальгамируемости WAP, рассмотренного в [16]. Свойство WAP является частным случаем свойства WAPJ.

Отметим, что если класс V замкнут относительно изоморфизмов, то условие WAPJ равносильно следующему условию.

Для любых $\mathbf{B}, \mathbf{C} \in V$, имеющих общую подалгебру $\mathbf{A}$, существуют алгебра $\mathbf{D}$ из V и гомоморфизмы $\delta : \mathbf{B} \to \mathbf{D}$, $\varepsilon : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ такие, что $\delta(x) = \varepsilon(x)$ для всех $x \in \mathbf{A}$, причем $\bot \neq \top$ в $\mathbf{D}$, если $\bot \neq \top$ в $\mathbf{A}$.

Докажем, что для многообразий J-алгебр слабое интерполяционное свойство равносильно свойству слабой амальгамируемости WAPJ. Для доказательства применяем методы из [4, 10]. Используется представление алгебр с помощью порождающих и определяющих соотношений [17].

Если $\mathbf{x}$ — множество переменных, через $F(\mathbf{x})$ обозначим множество всех формул, построенных с помощью переменных из $\mathbf{x}$.

Пусть дана алгебра $\mathbf{A}$, порожденная множеством X. Каждому элементу $a \in X$ ставится в соответствие переменная p_a. Обозначим $\mathbf{x} = \{p_a \mid a \in X\}$. Определим каноническое означивание $v_0(p_a) = a$. На множестве $F(\mathbf{x})$ определяем отношение

$$A =_{\mathbf{A}} B \iff \mathbf{A} \models v_0(A) = v_0(B).$$

Тогда $=_{\mathbf{A}}$ является конгруэнцией на $F(\mathbf{x})$ и существует изоморфизм φ_0 между $F(\mathbf{x})/ =_{\mathbf{A}}$ и $\mathbf{A}$ такой, что $\varphi_0(A/_{=_{\mathbf{A}}}) = v_0(A)$ для любой $A \in F(\mathbf{x})$. Для формул $A, B \in F(\mathbf{x})$ обозначим

$$D^+(\mathbf{A}, X) = \{A(\mathbf{x}) \mid \mathbf{A} \models v_0(A(\mathbf{x})) = \top\}.$$

Если X совпадает с $\mathbf{A}$, положим

$$D^+(\mathbf{A}) = D^+(\mathbf{A}, X).$$

Если $\mathbf{B} \models D^+(\mathbf{A})[v]$ для некоторой алгебры $\mathbf{B}$ и означивания v, то отображение $h(a) = v(p_a)$ является гомоморфизмом алгебры $\mathbf{A}$ в $\mathbf{B}$.

Для данного класса алгебр K через $FG(K)$ обозначается класс конечно порожденных алгебр из K. Докажем следующую теорему.

Теорема 5.1. *Пусть L — J-логика. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) L *имеет* WIP,
2) $V(L)$ *имеет* WAPJ,
3) $FG(V(L))$ *имеет* WAPJ.

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$. Пусть $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in V(L)$, $\mathbf{A}$ является общей подалгеброй алгебр $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$. Обозначим $\mathbf{x} = \{p_a \mid a \in \mathbf{A}\}$, $\mathbf{y} = \{p_a \mid a \in \mathbf{B} - \mathbf{A}\}$, $\mathbf{z} = \{p_a \mid a \in \mathbf{C} - \mathbf{A}\}$. На множестве $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ определим отношение

$$A \Theta B \iff D^+(\mathbf{B}), D^+(\mathbf{C}) \vdash_L (A \leftrightarrow B).$$

Тогда Θ является конгруэнцией на $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$. Обозначим

$$\mathbf{D} = F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})/\Theta$$

и положим

$$g(b) = p_b/\Theta \text{ для } b \in \mathbf{B}, \quad h(c) = p_c/\Theta \text{ для } c \in \mathbf{B}.$$

Тогда g, h — гомоморфизмы из $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ соответственно в алгебру $\mathbf{D}$, причем $g(a) = h(a)$ для всех $a \in \mathbf{A}$.

Допустим, что $\bot = \top$ в $\mathbf{D}$. Тогда $D^+(\mathbf{B}), D^+(\mathbf{C}) \vdash_L \bot$. Отсюда следует, что существуют конечные подмножества $\Gamma \subseteq D^+(\mathbf{B})$, $\Delta \subseteq D^+(\mathbf{C})$ такие, что

$\Gamma, \Delta \vdash_L \bot$. Обозначим через $B(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ конъюнкцию всех формул из Γ, а через $C(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ — конъюнкцию всех формул из Δ. Тогда получаем

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{y}), C(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \vdash_L \bot.$$

Из WIP следует, что существует формула $A(\mathbf{x})$ такая, что

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \vdash_L A(\mathbf{x}) \text{ и } A(\mathbf{x}), C(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \vdash_L \bot.$$

При означивании $v(p_b) = b$ для $b \in \mathbf{B}$ получаем, что $\mathbf{B} \models \Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y})[v]$, а следовательно, $\mathbf{A} \models A(\mathbf{x})[v]$. Положим $v'(p_c) = c$ для $c \in \mathbf{C}$. Тогда $v(p_a) = v'(p_a)$ для $a \in \mathbf{A}$, поэтому получаем $\mathbf{C} \models A(\mathbf{x})[v']$. Далее, $\mathbf{C} \models D^+(\mathbf{C})[v']$, следовательно, $\mathbf{C} \models C(\mathbf{x}, \mathbf{z})[v']$ и $\mathbf{C} \models \bot$, а значит, $\bot = \top$ в $\mathbf{C}$ и в $\mathbf{A}$.

$2 \Rightarrow 3$. Очевидно.

$3 \Rightarrow 1$. Предположим, что $FG(V(L))$ имеет WAPJ. Докажем, что L имеет WIP.

Пусть $B(\mathbf{x}, \mathbf{y}), C(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \vdash_L \bot$. Ясно, что списки $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ можно считать конечными. Обозначим

$$\Gamma(\mathbf{x}) = \{A(\mathbf{x}) \mid B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \vdash_L A(\mathbf{x})\}$$

и покажем, что $\Gamma(\mathbf{x}), C(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \vdash_L \bot$.

Допустим противное. На множестве $F(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ определим отношение

$$t\Theta t' \iff \Gamma(\mathbf{x}), C(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \vdash_L (t \leftrightarrow t').$$

Тогда Θ — конгруэнция и $\mathbf{C} = F(\mathbf{x}, \mathbf{z})/\Theta \in FG(V(L))$, причем $\mathbf{C} \not\models \bot = \top$.

На множестве $F(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ определим отношение

$$t\Phi t' \iff B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \vdash_L (t \leftrightarrow t').$$

Обозначим $\mathbf{B}_1 = F(\mathbf{x}, \mathbf{y})/\Phi$, и пусть $\mathbf{A}_1$ — подалгебра алгебры $\mathbf{B}_1$, порожденная множеством $\mathbf{x}/\Phi$. Заметим, что для любых формул $t, t' \in F(\mathbf{x})$ таких, что $(t, t') \in \Phi$, выполняется $(t \leftrightarrow t') \in \Gamma(\mathbf{x})$ и, следовательно, $t\Theta t'$. Отсюда вытекает, что существует гомоморфизм алгебры $\mathbf{A}_1$ на подалгебру $\mathbf{A}$ алгебры $\mathbf{C}$, порожденную множеством $\mathbf{x}/\Theta$. Так как многообразие J-алгебр обладает свойством продолжаемости конгруэнций CEP, этот гомоморфизм можно продолжить до гомоморфизма f всей алгебры $\mathbf{B}_1$ на $\mathbf{B} = f(\mathbf{B}_1)$. Кроме того, $f(\mathbf{A}_1) = \mathbf{A}$ и $f(x/\Phi) = x/\Theta$ для любого $x \in \mathbf{x}$.

Так как алгебра $\mathbf{A}$ является подалгеброй обеих алгебр $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$, все алгебры конечно порожденные и $\bot \neq \top$ в алгебре $\mathbf{C}$, по WAPJ существуют некоторая конечно порожденная алгебра $\mathbf{D} \in FG(V(L))$ и два гомоморфизма $g : \mathbf{B} \to \mathbf{D}$ и $h : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ такие, что $g(a) = h(a)$ для всех $a \in \mathbf{A}$. При этом $\bot \neq \top$ в алгебре $\mathbf{A}$, а значит, и в $\mathbf{D}$.

Определим означивание v' в алгебре $\mathbf{D}$:

$v'(u) = g(f(u/\Phi))$ для $u \in \mathbf{x} \cup \mathbf{y}$,

$v'(u) = h(u/\Theta)$ для $u \in \mathbf{x} \cup \mathbf{z}$.

Определение корректно, так как при $x \in \mathbf{x}$ выполнено $g(f(x/\Phi)) = h(x/\Theta)$.

По построению алгебры $\mathbf{B}$ получаем $\mathbf{D} \models B(\mathbf{x}, \mathbf{y})[v']$, а по построению алгебры $\mathbf{C}$ имеем $\mathbf{D} \models C(\mathbf{x}, \mathbf{z})[v']$. Наконец, $\mathbf{D} \not\models \bot = \top$. Это противоречит условию $B(\mathbf{x}, \mathbf{y}), C(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \vdash_L \bot$. Теорема доказана. $\square$

Для модальных логик алгебраический эквивалент WIP найден в [9].

6. Критерии для WIP

Найдем более простой критерий справедливости WIP в J-логиках. Кроме того, покажем, что рассмотрение свойства WIP в J-логиках сводится к исследованию расширений логики $\mathrm{Gl} = \mathrm{J} + (p \vee \neg p)$.

Напомним обозначение из разд. 4. Для любой негативной алгебры $\mathbf{A}$ обозначаем

$$\mathbf{A}^\Lambda = (\mathbf{A} \uparrow B_0),$$

где B_0 — двухэлементная булева алгебра. Для данной J-логики L определим класс

$$\Lambda(L) = \{\mathbf{A}^\Lambda \mid \mathbf{A} \text{ — негативная алгебра и } \mathbf{A}^\Lambda \in V(L)\}.$$

Легко видеть, что справедлива

Лемма 6.1. *Класс $\Lambda(L)$ пуст тогда и только тогда, когда L — негативная логика.*

Доказательство. Если логика L не является негативной, то $\bot \neq \top$ в некоторой алгебре $\mathbf{A} \in V(L)$. Тогда алгебра B_0 является подалгеброй алгебры $\mathbf{A}$ и входит в $\Lambda(L)$. Обратное очевидно. $\square$

Теорема 6.2. *Пусть L — J-логика. Тогда L имеет WIP в том и только в том случае, если класс $\Lambda(L)$ пуст или амальгамируем.*

Доказательство. $\Rightarrow$ Пусть L имеет WIP. Тогда $V(L)$ имеет WAPJ по теореме 3.1. Допустим, что класс $\Lambda(L)$ непуст. Пусть алгебры $\mathbf{A}^\Lambda$, $\mathbf{B}^\Lambda$ и $\mathbf{C}^\Lambda$ принадлежат $\Lambda(L)$ и $\beta : \mathbf{A}^\Lambda \to \mathbf{B}^\Lambda$, $\gamma : \mathbf{A}^\Lambda \to \mathbf{C}^\Lambda$ — мономорфизмы. По WAPJ существуют алгебра $\mathbf{D}$ из $V(L)$ и гомоморфизмы $\delta : \mathbf{B}^\Lambda \to \mathbf{D}$, $\varepsilon : \mathbf{C}^\Lambda \to \mathbf{D}$ такие, что $\delta\beta = \varepsilon\gamma$ и $\bot \neq \top$ в $\mathbf{D}$. Можем считать, что алгебра $\mathbf{D}$ подпрямо неразложимая и $\bot$ — ее опремум. Тогда $\mathbf{D}$ имеет вид $\mathbf{D}_1^\Lambda$ и принадлежит классу $\Lambda(L)$. Если $x, y \in \mathbf{B}^\Lambda$ и $x \not\leq u$, то $x \to y \leq \bot$, $\delta(x) \to \delta(y) = \delta(x \to y) \leq \bot < \top$ и $\delta(x) \not\leq \delta(y)$. Поэтому δ — мономорфизм. Аналогично ε является мономорфизмом.

$\Leftarrow$ Если класс $\Lambda(L)$ пуст, логика L является негативной по лемме 6.1, а значит, имеет WIP.

Допустим, что класс $\Lambda(L)$ непуст и амальгамируем. Докажем, что $V(L)$ имеет свойство WAPJ.

Пусть даны $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in V(L)$ и мономорфизмы $\beta : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$, $\gamma : \mathbf{A} \to \mathbf{C}$, причем $\bot \neq \top$ в $\mathbf{A}$. Тогда существует фильтр ∇ в $\mathbf{A}$, максимальный среди фильтров, не содержащих $\bot$. Можно расширить $\beta(\nabla)$ до фильтра Φ в $\mathbf{B}$, максимального среди фильтров алгебры $\mathbf{B}$, не содержащих $\top$. Тогда $\Phi \cap \beta(\mathbf{A}) = \beta(\nabla)$ и $\bot$ является опремумом алгебры $\mathbf{B}/\Phi$. Аналогично можно расширить $\gamma(\nabla)$ до фильтра Ψ в $\mathbf{C}$, максимального среди фильтров алгебры $\mathbf{C}$, не содержащих $\top$. Тогда $\Psi \cap \gamma(\mathbf{A}) = \gamma(\nabla)$ и $\bot$ является опремумом алгебры $\mathbf{C}/\Psi$. Поэтому алгебры $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}/\nabla$, $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}/\Phi$, $\mathbf{C}_1 = \mathbf{C}/\Psi$ подпрямо неразложимы и входят в $\Lambda(L)$; существуют мономорфизмы $\beta_1 : \mathbf{A}_1 \to \mathbf{B}_1$, $\gamma_1 : \mathbf{A}_1 \to \mathbf{C}_1$ такие, что для $x \in \mathbf{A}$ будет $\beta(x)/\Phi = \beta_1(x/\nabla)$, $\gamma(x)/\Psi = \gamma_1(x/\nabla)$.

Ввиду амальгамируемости класса $\Lambda(L)$ существуют алгебра $\mathbf{D} \in \Lambda(L)$ и мономорфизмы $\delta : \mathbf{B}_1 \to \mathbf{D}$, $\varepsilon : \mathbf{C}_1 \to \mathbf{D}$ такие, что $\delta\beta_1 = \varepsilon\gamma_1$. Тогда $\delta'(y) = \delta(y/\Phi)$, $\varepsilon'(z) = \varepsilon(z/\Psi)$ — требуемые гомоморфизмы из $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ в $\mathbf{D}$. $\square$

Как следствие, проблема справедливости WIP в J-логиках сводится к рассмотрению расширений логики $\mathrm{Gl} = \mathrm{J} + (p \vee (p \to \bot))$.

Теорема 6.3. *J-логика L имеет WIP тогда и только тогда, когда $L + \mathrm{Gl}$ имеет WIP.*

Доказательство. Заметим, что $\Lambda(L + \mathrm{Gl}) = \Lambda(L)$. В самом деле, очевидно $\Lambda(L + \mathrm{Gl}) \subseteq \Lambda(L)$. С другой стороны, если $\mathbf{A} \in \Lambda(L)$, то $\mathbf{A} \models (p \vee (p \to \bot))$, тем самым $\mathbf{A} \in \Lambda(L + \mathrm{Gl})$. Поэтому утверждение следует из теоремы 6.2. $\square$

7. Логики над Gl с CIP

Теорема 6.3 сводит рассмотрение WIP в J-логиках к исследованию расширений логики Gl. Кроме того, теорема 6.2 показывает роль классов $\Lambda(L)$ в этом исследовании. Следующее предложение показывает, что эти классы разбивают семейство Gl-логик на интервалы. Оно дает полезную классификацию логик над Gl, которая дополняет классификацию J-логик из [18].

Предложение 7.1. *Пусть J-логика L_0 порождается классом $\Lambda(L_0)$. Тогда L_0 содержит Gl и для любой $L \in E(\mathrm{Gl})$ выполнена эквивалентность:*

$$\Lambda(L) = \Lambda(L_0) \iff \mathrm{Neg} \cap L_0 \subseteq L \subseteq L_0.$$

Доказательство. Ясно, что формула $p \vee (p \to \bot)$ общезначима во всех алгебрах из $\Lambda(L_0)$, поэтому Gl содержится в L_0. Докажем требуемую эквивалентность.

$\Rightarrow$ Пусть $\Lambda(L) = \Lambda(L_0)$. Тогда $\Lambda(L_0) \subseteq V(L)$ и $V(L_0) \subseteq V(L)$, а значит, $L \subseteq L_0$. Докажем включение $\mathrm{Neg} \cap L_0 \subseteq L$.

Хорошо известно, что любое многообразие порождается своими подпрямо неразложимыми алгебрами. По лемме 4.1 любая подпрямо неразложимая алгебра из $V(\mathrm{Gl})$ либо является негативной, либо имеет вид $\mathbf{A}^{\Lambda}$ для подходящей негативной алгебры $\mathbf{A}$. Все негативные алгебры из $V(L)$ входят в $V(L_0 \cap \mathrm{Neg})$. Все алгебры вида $\mathbf{A}^{\Lambda}$ входят в $\Lambda(L) = \Lambda(L_0)$, а значит, тоже принадлежат $V(L_0 \cap \mathrm{Neg})$. Поэтому $V(L) \subseteq V(L_0 \cap \mathrm{Neg})$ и $L_0 \cap \mathrm{Neg} \subseteq L$.

$\Leftarrow$ Пусть $L_0 \cap \mathrm{Neg} \subseteq L \subseteq L_0$. Тогда $\Lambda(L_0 \cap \mathrm{Neg}) \supseteq \Lambda(L) \supseteq \Lambda(L_0)$. Заметим, что логика $L_0 \cap \mathrm{Neg}$ аксиоматизируема формулами $\{\bot \vee A \mid A \in L_0\}$. Поэтому любая подпрямо неразложимая алгебра из $V(L_0 \cap \mathrm{Neg})$, которая не является негативной, входит в $\Lambda(L_0)$. Таким образом, $\Lambda(L_0 \cap \mathrm{Neg}) \subseteq \Lambda(L_0)$. Отсюда $\Lambda(L) = \Lambda(L_0)$. $\square$

Рассмотрим теперь расширения логики Gl специального вида. Аксиоматизация этих логик вида $L \uparrow \mathrm{Cl}$ и $L \Uparrow \mathrm{Cl}$, где L — негативная логика, указана в предложении 4.7. Логика $\mathrm{Gl} = \mathrm{Neg} \uparrow \mathrm{Cl}$ характеризуется всеми алгебрами вида $\mathbf{A}^{\Lambda}$, где $\mathbf{A}$ — негативная алгебра (см. предложение 4.6). Из теорем 5.1 и 5.2 статьи [12] сразу следует

Предложение 7.2. *Для любой негативной логики L следующие условия эквивалентны:*

(a) $L \uparrow \mathrm{Cl}$ *имеет* CIP*;*

(b) $L \Uparrow \mathrm{Cl}$ *имеет* CIP*;*

(c) L *имеет* CIP.

В [11, теорема 5.5] найдены все негативные логики с CIP:

$$\mathrm{Neg},\ \mathrm{NC} = \mathrm{Neg} + (p \to q) \vee (q \to p),\ \mathrm{NE} = \mathrm{Neg} + p \vee (p \to q),\ \mathrm{For} = \mathrm{Neg} + p.$$

Кроме того, показано, что свойство CIP в негативной логике L равносильно амальгамируемости многообразия $V(L)$ и амальгамируемости класса финитно неразложимых алгебр из $V(L)$. Отсюда по теореме 6.2 сразу получаем

Предложение 7.3. *Пусть L — любая из следующих* Gl-*логик:* Cl, (NE $\uparrow$ Cl), (NC $\uparrow$ Cl), (Neg $\uparrow$ Cl), (NE $\Uparrow$ Cl), (NC $\Uparrow$ Cl), (Neg $\Uparrow$ Cl). *Тогда L имеет* CIP, *а классы $V(L)$ и $\Lambda(L)$ амальгамируемы.*

Напротив, если негативная логика L не имеет CIP, то многообразие $V(L)$ и класс финитно неразложимых алгебр из $V(L)$ не являются амальгамируемыми. Поэтому классы $\Lambda(L \uparrow \mathrm{Cl})$ и $\Lambda(L \Uparrow \mathrm{Cl})$ не являются амальгамируемыми, а логики $L \uparrow \mathrm{Cl}$ и $L \Uparrow \mathrm{Cl}$ не имеют WIP. Таким образом, имеет место

Предложение 7.4. *Пусть L — негативная логика. Тогда следующие условия равносильны:*

1) $(L \uparrow \mathrm{Cl})$ *имеет* WIP*;*
2) $(L \Uparrow \mathrm{Cl})$ *имеет* WIP*;*
3) $(L \uparrow \mathrm{Cl})$ *имеет* CIP*;*
4) $(L \Uparrow \mathrm{Cl})$ *имеет* CIP*;*
5) L *имеет* CIP*;*
6) L *входит в список* $\mathrm{Neg}, \mathrm{NC}, \mathrm{NE}, \mathrm{For}$.

Таким образом, свойство WIP нетривиально в пропозициональных расширениях минимальной логики. Заметим, что множество J-логик с WIP и множество J-логик без WIP имеют мощность континуума. Первое множество содержит все суперинтуиционистские логики, т. е. континуальное семейство. Второе по предложению 7.4 имеет как минимум ту же мощность, что и множество негативных логик, отличных от Neg, NC, NE, For, а множество негативных логик также имеет мощность континуума.

Разумеется, не все расширения логики Gl представимы в виде $(L \uparrow \mathrm{Cl})$ или $(L \Uparrow \mathrm{Cl})$. Например, нельзя представить в таком виде логику $\mathrm{Neg} \cap (\mathrm{NE} \Uparrow \mathrm{Cl})$. Если L — негативная логика без CIP, то логика $L \cap (\mathrm{NE} \Uparrow \mathrm{Cl})$ имеет WIP по теореме 3.1, но можно показать, что она не имеет CIP.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Robinson A.* A result on consistency and its application to the theory of definition // Indag. Math. 1956. V. 18, N 1. P. 47–58.
2. *Model-Theoretic Logics* / J. Barwise, S. Feferman, eds. New York: Springer-Verl., 1985.
3. *Craig W.* Three uses of Herbrand–Gentzen theorem in relating model theory // J. Symb. Log. 1957. V. 22, N 3. P. 269–285.
4. *Gabbay D. M., Maksimova L.* Interpolation and definability: Modal and intuitionistic logics. Oxford: Clarendon Press, 2005.
5. *Schütte K.* Der Interpolationsatz der intuitionistischen Prädikatenlogik // Math. Ann. 1962. Bd 148. S. 192–200.
6. *Gabbay D. M.* Semantical investigations in Heyting's intuitionistic logic. Dordrecht: D. Reidel Publ. Co., 1981.
7. *Johansson I.* Der Minimalkalkül, ein reduzierter intuitionistische Formalismus // Compos. Math. 1937. V. 4. P. 119–136.
8. *Segerberg K.* Propositional logics related to Heyting's and Johansson's // Theoria. 1968. V. 34, N 1. P. 26–61.
9. *Maksimova L.* Interpolation and joint consistency // We Will Show Them! Essays in Honour of Dov Gabbay. V. 2, S. Artemov, H. Barringer, A. d'Avila Garcez, L. Lamb and J. Woods, eds. London: King's College Publ., 2005. P. 293–305.
10. *Максимова Л. Л.* Теорема Крейга в суперинтуиционистских логиках и амальгамируемые многообразия псевдобулевых алгебр // Алгебра и логика. 1977. Т. 16, № 6. С. 643–681.
11. *Максимова Л. Л.* Неявная определимость в позитивных логиках // Алгебра и логика. 2003. Т. 42, № 1. С. 65–93.
12. *Максимова Л. Л.* Интерполяция и определимость в расширениях минимальной логики // Алгебра и логика. 2005. Т. 44, № 6. С. 726–750.

13. *Odintsov S. P.* Constructive negations and paraconsistency. Dordrecht: Springer-Verl., 2008.
14. *Расева Е., Сикорский Р.* Математика метаматематики. М.: Наука, 1972.
15. *Maksimova L. L.* Intuitionistic logic and implicit definability // Ann. Pure Appl. Logic. 2000. V. 105, N 1–3. P. 83–102.
16. *Максимова Л. Л.* Слабая форма интерполяции в эквациональной логике // Алгебра и логика. 2008. Т. 47, № 1. С. 94–107.
17. *Мальцев А. И.* Алгебраические системы. М.: Наука, 1970.
18. *Odintsov S. P.* Logic of classical refutability and class of extensions of minimal logic // Log. Log. Philos. 2001. V. 9. P. 91–107.

Статья поступила 1 февраля 2010 г.

Максимова Лариса Львовна
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет, механико-математический факультет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
lmaksi@math.nsc.ru