Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2010. Том 51, № 3

УДК 512.542

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ ГРУППАХ, ПОРОЖДЕННЫХ ПАРОЙ ПОЧТИ КВАДРАТИЧНЫХ АВТОМОРФИЗМОВ АБЕЛЕВОЙ ГРУППЫ

Д. В. Лыткина, В. Д. Мазуров

Аннотация. Доказывается конечность периодической группы, порожденный двумя квадратичными или почти квадратичными автоморфизмами абелевой группы.

Ключевые слова: периодическая группа, автоморфизм, квадратичный автоморфизм, почти квадратичный автоморфизм.

К 70-летию Ю. Л. Ершова

Пусть V — аддитивная абелева группа. Автоморфизм a группы V называется *квадратичным*, если существуют целые числа m и n такие, что $va^2 = mva + nv$ для любого элемента $v \in V$. Будем говорить, что a — *почти квадратичный* автоморфизм, если a индуцирует квадратичный автоморфизм на V/U, где U — это некоторая a-инвариантная конечно порожденная подгруппа группы V. Заметим, что для конечно порожденной группы V все ее автоморфизмы являются почти квадратичными.

А. Х. Журтов [1] показал, что периодическая группа, порожденная парой квадратичных автоморфизмов, конечна. Мы обобщаем этот результат на случай почти квадратичных автоморфизмов.

Теорема 1. *Периодическая группа, порожденная парой почти квадратичных автоморфизмов абелевой группы, конечна.*

Поскольку любая конечная группа вкладывается в $GL(V)$ для некоторого конечного векторного пространства V, любая конечная двупорожденная группа удовлетворяет условию теоремы 1.

Для групп, порожденных двумя квадратичными автоморфизмами, ситуация иная. В частности, Е. Н. Макаренко [2] показала, что любой некоммутативный композиционный фактор такой группы вкладывается в $GL(2, q)$ для некоторой степени q простого числа.

Мы уточняем этот результат Макаренко следующим образом.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 08–01–00322–а, 10–01–00026–а, 10–01–90007-Бел-а), Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ–3669.2010.1), программы «Развитие научного потенциала высшей школы» Министерства образования РФ (проект 2.1.1.419) и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (гос. контракт № 02.740.11.0429).

Теорема 2. *Пусть G — периодическая группа, порожденная парой квадратичных автоморфмизмов абелевой группы. Тогда G изоморфна расширению конечной нильпотентной группы посредством подгруппы прямого произведения $L_1 \times \dots \times L_s$, где $L_i \simeq GL(2, p_i^{m_i})$, $i = 1, \dots, s$. Здесь p_i простое, а m_i натуральное для каждого i.*

§ 1. Квадратичные автоморфизмы

Для доказательства теоремы 1 нам понадобятся некоторые предварительные результаты.

Лемма 1. *Пусть G — конечная группа автоморфизмов абелевой группы V. Тогда существует конечная G-инвариантная секция V, на которой G действует точно.*

Доказательство. Для любого нетривиального $g \in G$ существует $v_g \in V$ такой, что $v_g g \neq v_g$. Поскольку $M = \{v_g h \mid 1 \neq g \in G, h \in G\}$ — это конечное G-инвариантное подмножество, $U = \langle M \rangle$ является конечно порожденной G-инвариантной подгруппой из V, на которой G действует точно.

Пусть U_0 — подгруппа, состоящая из всех элементов U конечного порядка. По основной теореме о конечно порожденных абелевых группах U_0 конечна. Если $U_0 = U$, то U — требуемая секция.

Предположим, $U_0 \neq U$. Пусть p — простое число, взаимно простое с $|G|$, $m = p|U_0|$, $W = mU = \{mu \mid u \in U\}$. Ясно, что W — конечно порожденная G-инвариантная подгруппа из U без кручения. Покажем, что U/W — это требуемая секция.

Предположим противное. Очевидно, что U/W конечна. Пусть g — нетривиальный элемент из G, действующий тривиально на U/W, и $u \in U$ такой, что $ug \neq u$. Тогда $ug = u + w$, где $w \in W$, $w \neq 0$. Поскольку $\bigcap\limits_{s=0}^{\infty} p^s W = 0$, существует s такой, что $w \in p^s W \setminus p^{s+1} W$.

Имеем $ug^2 = (u+w)g = u + w + wg$. Так как $w = p^s ma$ для некоторого $a \in U$ и $ag = a + mb$ для некоторого $b \in U$, то $wg = w + p^s m^2 b$, т. е. $wg = w + w_1$, где $w_1 \in p^{s+1}W$. Аналогично $ug^3 = u + 2w + w_1 g = u + 3w + w_2$, где $w_2 \in p^{s+1}W, \dots$, $ug^n = u + nw + c$, где $c \in p^{s+1}W$. Если порядок g равен n, то последнее равенство показывает, что $nw \in p^{s+1}W$. Поскольку n взаимно просто с p, существуют $k, l \in \mathbb{Z}$ такие, что $kn + lp^{s+1} = 1$, откуда $w = knw + lp^{s+1}w \in p^{s+1}W$ вопреки выбору w. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть V — конечная элементарная абелева p-группа и G — группа, порожденная парой квадратичных автоморфизмов группы V. Если G действует на V неприводимо, то G изоморфна подгруппе прямого произведения конечного числа групп $GL(2, q)$ для некоторой степени q простого числа p.*

Доказательство. Рассмотрим V как векторное пространство над полем $GF(p)$. Пусть $G = \langle a, b \rangle$, где для любого $v \in V$ выполняются следующие равенства:

$$va^2 = \alpha va + \beta v, \quad vb^2 = \gamma vb + \delta v.$$

Здесь $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Z}$.

Пусть m — порядок ab, $GF(q)$ — расширение $GF(p)$, содержащее все корни многочлена $x^m - 1$, и $W = V_{GF(p)} \otimes GF(q)$. Поскольку V неприводимо, $W = W_1 \oplus \dots \oplus W_s$, где W_i, $i = 1, \dots, s$, — это неприводимые $GF(q)G$-модули. Пусть

w_i — собственный вектор для ab, принадлежащий W_i, и $u_i = w_i a$. Далее, пусть $w_i ab = \lambda_i w_i$, где $\lambda_i \in GF(q)$. Тогда

$$u_i a = w_i a^2 = \alpha w_i a + \beta w_i = \beta w_i + \alpha u_i, \quad u_i b = w_i ab = \lambda_i w_i;$$

$$w_i b = \big(\lambda_i^{-1} w_i ab\big) b = \big(\lambda_i^{-1} w_i a\big) b^2 = \gamma \lambda_i^{-1} w_i ab + \delta \lambda_i^{-1} w_i a = \gamma w_i + \delta \lambda_i^{-1} u_i.$$

Это показывает, что $\langle u_i, w_i \rangle$ является G-инвариантным подпространством, откуда $W_i = \langle u_i, w_i \rangle$, т. е. $\dim W_i \leq 2$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть $G = \langle a, b \rangle$, где a, b — квадратичные автоморфизмы группы V. Как доказано в [1], G конечна. В силу леммы 1 существует конечная G-инвариантная секция V, на которой G действует точно. Поскольку a и b индуцируют квадратичный автоморфизм на каждой G-инвариантной секции группы G, можно считать, что V конечна. Если $1 \neq V_0 < V_1 < \cdots < V_s = V$ — неуплотняемый ряд G-инвариантных подгрупп, то $W_i = V_i / V_{i-1}$, $i = 1, \dots, s$, — векторное пространство над простым полем порядка p_i и G индуцирует на W_i неприводимую подгруппу H_i группы $\mathrm{Aut}(W_i)$, порожденную парой квадратичных автоморфизмов. Пересечение ядер естественных гомоморфизмов $\varphi_i : G \to H_i$ действует тривиально на факторах ряда $1 = V_0 < V_1 < \cdots < V_s = V$ и поэтому нильпотентно по теореме Калужнина (см. [3, лемма 16.3.1]). По теореме Ремака (см. [3, теорема 4.3.9]) G/K вкладывается в прямое произведение подгрупп H_i, $i = 1, \dots, s$, а каждая H_i по лемме 2 вкладывается в прямое произведение групп $GL_2(q_i)$, где q_i — это некоторая степень числа p_i. Теорема доказана.

§ 2. Почти квадратичные автоморфизмы

Пусть V — нетривиальная абелева группа и $G = \langle g, h \rangle \leq \mathrm{Aut}\, V$. Предположим, что существуют натуральные m, n, p, r такие, что подгруппы

$$W_1 = \langle vg^2 - mvg - nv \mid v \in V \rangle$$

и

$$W_2 = \langle vh^2 - pvh - rv \mid v \in V \rangle$$

конечно порождены. Предположим также, что порядок s элемента gh конечен.

Пусть $W = \langle W_1, W_2 \rangle$.

Лемма 3. *Подгруппа* $U = \langle W(gh)^i, W(gh)^i g \mid i = 0, \dots, s-1 \rangle$ *конечно порождена и* G*-инвариантна.*

Доказательство. Очевидно, что U конечно порождена.

Для доказательства того, что U является G-инвариантной, достаточно показать, что $vg, vh \in U$ для любого $v \in \bigcup_{i=0}^{s-1} (W(gh)^i \cup W(gh)^i g)$.

Предположим, что $v \in W = W(gh)^0$. Ясно, что $vg \in W(gh)^0 g \leq U$. Более того,

$$vh = v(gh)^s h = v(gh)^{s-1} gh^2 = p(v(gh)^{s-1} g)h + r(v(gh)^{s-1} g) + w \\ = pv + rv(gh)^{s-1} g + w,$$

где $w \in W_1 \leq W$. Поскольку каждое слагаемое в последнем выражении принадлежит U, то $vh \in U$.

Пусть $v \in W(gh)^i$, где $i \geq 1$. Тогда $v = w(gh)^i$ для некоторого $w \in W$ и $vg = w(gh)^i g \in W(gh)^i g \leq U$. Более того,

$$vh = w(gh)^i h = w(gh)^{i-1} gh^2,$$

и, как и в предыдущем абзаце, получаем $vh \in U$.

Пусть $v \in W(gh)^i g$, где $0 \leq i \leq s-1$. Тогда $vh \in W(gh)^{i+1}$. Если $i = s-1$, то $vh \in W(gh)^s = W \leq U$, а в другом случае $vh \in W(gh)^{i+1} \leq U$ по определению U. Кроме того, $vg = w(gh)^i g^2$ для некоторого $w \in W$, откуда

$$vg = mw(gh)^i g + nw(gh)^i + u$$

для некоторого $u \in W$. Отсюда следует $vg \in U$. Лемма доказана.

Нам потребуется следующая (вероятно, известная)

Лемма 4. *Периодические подгруппы группы $GL(t, \mathbb{Z})$ конечны.*

Доказательство. Пусть $p > 2t$ простое и $X = E + pA$, где E — единичная матрица, A — ненулевая целочисленная $(t \times t)$-матрица. Тогда $X^l \neq E$ для всех l.

Действительно, в противном случае характеристические числа $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_t$ матрицы X являются корнями многочлена $x^l - 1$ и след $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_t$ матрицы X равен $t + pc$ для некоторого целого c. Поскольку $|t + pc| = |\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_t| \leq |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| + \dots + |\varepsilon_t| = t$, получаем $c = 0$ и $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_t = t$, откуда $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = \varepsilon_t = 1$. Тогда жорданова форма матрицы X совпадает с E, т. е. $X = E$.

Пусть теперь

$$H = \{X \in GL(t, \mathbb{Z}) \mid X = E + pA, A = (a_{ij})_{t \times t},\ a_{ij} \in \mathbb{Z},\ 1 \leq i, j \leq t\}.$$

Рассуждения из предыдущего абзаца показывают, что H — подгруппа группы $GL(n, \mathbb{Z})$ без кручения, в частности, $H \cap P = 1$ для любой периодической подгруппы P группы $GL(n, \mathbb{Z})$. Это означает, что P изоморфна подгруппе группы $GL(n, \mathbb{Z})/H \lesssim GL(n, p)$ и, следовательно, конечна. Лемма доказана.

Лемма 5. *Периодическая подгруппа P группы автоморфизмов конечно порожденной абелевой группы A конечна.*

Доказательство. Пусть B — подгруппа, содержащая все элементы конечного порядка из A. Поскольку A конечно порождена, B является конечной P-инвариантной подгруппой группы A. Пусть K — ядро действия P на B. Ясно, что G/K конечна. С другой стороны, P действует на A/B, и если L — ядро этого действия, то P/L изоморфна некоторой периодической подгруппе $H \leq GL(t, \mathbb{Z})$, где t — минимальное число порождающих группы A/B. В силу леммы 4 P/L конечна и, следовательно, $P/K \cap L$ тоже конечна.

Если $a_1 + B, \dots, a_t + B$ — свободные порождающие группы A/B, то для любого $g \in P$ и каждого i, $1 \leq i \leq t$, выполняется равенство $a_i^g = a_i + b_i$, где $b_i = b_i(g) \in B$, и набор $(b_1, \dots, b_t)$ определяет g единственным образом. Тем самым $|K \cap L| \leq |B|^t$ и, в частности, P конечна. Лемма доказана.

Вернемся к группе G. Предположим, что G периодическая. Пусть U — подгруппа, определенная в лемме 3, K — ядро действия G на V/U, L — ядро действия G на U. Тогда G/K — периодическая подгруппа группы $\mathrm{Aut}(V/U)$, порожденная парой квадратичных автоморфизмов. В силу основного результата работы [1] G/K конечна. По леммам 3 и 5 G/L тоже конечна. Таким образом,

$G/K \cap L$ конечна. Как подгруппа конечного индекса в конечно порожденной группе $K \cap L$ конечно порождена (см. [4, теорема 7.2.8]).

Поскольку $K \cap L$ действует тривиально на факторах ряда $0 \leq U \leq V$, она нильпотентна. Теперь, в силу [4, следствие 10.2.3] $K \cap L$ конечна. Следовательно, конечна и G. Теорема 1 доказана.

Следствие. *Пусть V — абелева группа, $g, h \in \mathrm{Aut}\, V$, $g^3 = h^3 = 1$ и $G = \langle g, h \rangle$ периодическая. Если $C_V(g)$ и $C_V(h)$ конечно порождены, то $G = \langle g, h \rangle$ конечна.*

Доказательство. Для любого $v \in V$ выполняется $vg^2 + vg + v \in C_V(g)$ и, значит, g — почти квадратичный автоморфизм. То же самое справедливо для h. По теореме 1 G конечна.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Журтов А. Х.* О квадратичных автоморфизмах абелевых групп // Алгебра и логика. 2000. Т. 39, № 3. С. 320–328.
2. *Макаренко Е. Н.* Группы автоморфизмов абелевых групп, порожденные двумя квадратичными автоморфизмами // Вестн. Новосибирского гос. ун-та. Сер. Математика, механика, информатика. 2003. Т. 3, № 1. С. 55–60.
3. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. М.: Физматлит, 1996.
4. *Холл М.* Теория групп. М.: Изд-во иностр. лит., 1961.

Статья поступила 20 февраля 2010 г.

Лыткина Дарья Викторовна
Новосибирский гос. университет, ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
daria.lytkin@gmail.com

Мазуров Виктор Данилович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет, механико-математический факультет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
mazurov@math.nsc.ru